MATHEMATICA VOL. 6 (29), 1, 1964 pp. 145 – 155

INTRODUCTION À L'ÉTUDE COMPARATIVE DES ENSEMBLES DE FONCTIONS INTERPOLATOIRES

par

ELENA MOLDOVAN

à Cluj

1. L'étude des ensembles de fonctions interpolatoires a ouvert la voie à d'intéressantes recherches sur la meilleure approximation et sur le comportement de certaines classes de fonctions par rapport à un ensemble interpolatoire donné. Ces deux directions de recherches ont été d'abord entreprises sur l'ensemble interpolatoire formé par les polynomes d'un degré donné et sur les ensembles engendrés par les fonctions formant un système Tchebycheff. Les ensembles de fonctions ainsi considérés étaient toujours des ensembles linéaires. Plus tard les résultats trouvés ont été étendus à des ensembles interpolatoires non linéaires.

En ce moment l'étude comparative des problèmes cités plus haut, s'impose. Plus exactement on peut se demander, l'allure d'une fonction étant définie par la façon dont elle se comporte par rapport à un certain ensemble interpolatoire, quels sont les ensembles interpolatoires par rapport auxquels la fonction considérée se comporte de la même manière?

Les recherches faites dans les 15 dernières années sur les ensembles interpolatoires ont réussi à préciser plusieurs propriétés des fonctions convexes par rapport à un ensemble interpolatoire d'un ordre donné. Pour préciser les problèmes soulevés par l'étude comparative que nous avons signalée plus haut, nous donnerons au préalable quelques définitions que nous utiliserons plus loin.

2. Nous considérons uniquement des fonctions réelles d'une variable réelle.

Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions continues sur l'intervalle fini et fermé $[a, b]$ est dit du type $I_n[a, b]$ $(n \geqq 1)$ (on l'appele aussi ensemble interpolatoire d'ordre n sur l'intervalle $[a, b]$ si, quels que soient les points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $[a, b]$ et quels que soient les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il existe dans $\mathcal{F}$ une fonction et une seule $\varphi(x)$ qui vérifie les conditions $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dans cette définition on peut d'ailleurs remplacer l'intervalle fermé $[a, b]$ par un intervalle ouvert, un intervalle semi-ouvert et même par un ensemble de points quelconques. Dans la suite nous utiliserons la notion d'ensemble interpolatoire seulement relativement à un intervalle fini et fermé, sauf si on ne spécifie pas expressément le contraire.

Dans les travaux [1], [2] et [3] j'ai étudié quelques propriétés des ensembles du type $I_n[a, b]$ et j'ai défini la propriété de $\mathcal{F}$ — convexité ($\mathcal{F}$ — concavité, $\mathcal{F}$ — non-concavité, $\mathcal{F}$ — non-convexité, $\mathcal{F}$ — polynomialité) d'une fonction définie sur $[a, b]$. Nous allons rappeler ces définitions. Nous désignons par $L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \ldots, x_n; y|x)$ la fonction de $\mathcal{F}$ qui sur les points

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{1}$$

de $[a, b]$ prend respectivement les valeurs

$$y_1, y_2, \ldots, y_n. \tag{2}$$

La fonction de $\mathcal{F}$ qui sur les points (1) prend les valeurs de la fonction $f(x)$ sera conséquemment désignée par $L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x)$

Considérons maintenant les points (indexés d'après leur ordre de grandeur numérique)

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} \tag{3}$$

de $[a, b]$. Une fonction $f(x)$ définie sur les points (3) est dite $\mathcal{F}$ — convexe, $\mathcal{F}$ — polynomiale respectivement $\mathcal{F}$ — concave, sur les points (3), suivant que la différence

$$f(x_{n+1}) - L(\mathcal{F}; x_1 x_2, \ldots, x_n; f|x_{n+1}) \tag{4}$$

est positive, nulle respectivement négative. Une fonction $f(x)$, définie sur l'intervalle $[a, b]$, est dite $\mathcal{F}$ — convexe, $\mathcal{F}$ — polynomiale respectivement $\mathcal{F}$ — concave sur $[a, b]$, suivant que la différence (4) est positive, nulle respectivement négative sur tout système de points (3) de $[a, b]$. Lorsque

$$f(x_{n+1}) - L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x_{n+1}) \geqq 0, \text{ respectivement } \leqq 0 \tag{5}$$

sur tout système de points (3) de $[a, b]$ la fonction $f(x)$ est dite $\mathcal{F}$ — non-concave respectivement $\mathcal{F}$ — non-convexe sur $[a, b]$.

J'ai appelé une fonction $f(x)$, définie sur $[a, b]$, n-valente par rapport à $\mathcal{F}$ si, quelle que soit $g \in \mathcal{F}$, la différence $f(x) - g(x)$ s'annule sur au plus n points distincts de $[a, b]$.

Si la fonction $f(x)$ est $\mathcal{F}$-convexe et si $x_1 < x_2 \ldots < x_n$ sont n points de $[a, b]$, nous avons

$$(-1)^{n-i} \, [f(x) - L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x)] > 0 \tag{6}$$

pour $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n$. L'inégalité subsiste pour $i = 0$ si $a = x_0 < x_1$ et pour $i = n$ si $x_n < b = x_{n+1}$. Nous avons une propriété analogue pour une fonction $\mathcal{F}$ — concave, pour laquelle les inégalités (6) avec le signe $<$ sont valables. Remarquons qu'il existe toujours au moins un indice i, $0 \leqq i \leqq n (n \geqq 1)$ tel que $x_i < x_{i+1}$.

Si l'ensemble $\mathcal{F}$ est du type $I_n[a, b]$, de la continuité de $f(x)$ sur $[a, b]$ et de sa n-valence par rapport à $\mathcal{F}$, il résulte [4] que cette fonction est $\mathcal{F}$ — convexe ou $\mathcal{F}$ — concave sur $[a, b]$. La notion de n-valence par rapport à l'ensemble des polynomes de degré $n - 1$ a été introduit dans le travail [5].

Pour concrétiser par un exemple simple, considérons la fonction $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et désignons par $\mathcal{P}_1$ l'ensemble du type $I_2[0, 1]$ formé par tous les polynomes de premier degré. La fonction $f(x)$ est 2-valente par rapport à $\mathcal{P}_1$ et on sait qu'elle est aussi $\mathcal{P}_1$ — convexe. Si nous considérons l'ensemble $\mathcal{P}_1^{(1)}$ de tous les polynomes de la forme $x + c$, où c est un nombre réel quelconque, la fonction $f(x)$ est 1-valente par rapport à cet ensemble, qui est du type $I_1[0, 1]$. En effet, tout polynome $x + c$ coincide avec $x^2 - x + \frac{1}{4}$ sur au plus un point de $[0, 1]$. La propriété de 1-valence reste vraie si, au lieu des polynomes de la forme $x + c$, nous considérons l'ensemble des polynomes de la forme $\alpha x + c$, avec un $\alpha \in [1, +\infty)$ donné.

3. Définition. 1. *Les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ étant du type I_n $[a, b]$, nous dirons que $\mathcal{F}$ est n-valente par rapport à $\mathcal{G}$ si toute fonction de $\mathcal{F}$ est n-valente par rapport à $\mathcal{G}$.*

La relation de n-valence d'un ensemble du type $I_n[a, b]$ par rapport à un autre ensemble du type $I_n[a, b]$ est symétrique.

Pour concrétiser nous donnerons quelques exemples.

Désignons par $\mathcal{P}_n\{a_0 = 1\}$ l'ensemble des polynomes $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ de degré n avec le coefficient de x^n égal à 1 et par $\mathcal{P}_{n-1}$ l'ensemble des polynomes de degré $n - 1$ (de degré effectif $\leqq n - 1$). Ces deux ensembles sont interpolatoires d'ordre n sur tout intervalle. Considérons un intervalle $[a, b]$. Tout élément de $\mathcal{P}_n\{a_0 = 1\}$ est n-valent par rapport à l'ensemble $\mathcal{P}_{n-1}$. L'ensemble $\mathcal{P}_n\{a_0 = 1\}$ est donc n-valent par rapport à $\mathcal{P}_{n-1}$ et de même $\mathcal{P}_{n-1}$ est n-valent par rapport à $\mathcal{P}_n\{a_0 = 1\}$. Dans cet exemple, tout élément de $\mathcal{P}_n\{a_0 = 1\}$ est convexe par rapport à l'ensemble $\mathcal{P}_{n-1}$. En effet, tout $P \in \mathcal{P}_n\{a_0 = 1\}$ coïncide sur au plus n points (distincts) avec un élément de $\mathcal{P}_{n-1}$ d'où il résulte le caractère de convexité ou de concavité de P par rapport à $\mathcal{P}_{n-1}$ sur l'intervalle $[a, b]$ considéré. Le coefficient de x^n dans $P \in \mathcal{P}_n\{a_0 = 1\}$ est positif et il résulte alors que, quels que soient les points (3) et $P_1 \in \mathcal{P}_{n-1}$ qui coïncide avec P sur les n premiers de ces points, on a $P(x_{n+1}) > P_1(x_{n+1})$, donc $P(x)$ est convexe par rapport à $\mathcal{P}_{n-1}$.

On peut évidemment construire un exemple analogue prenant, au lieu de l'ensemble $\mathcal{P}_n\{a_0 = 1\}$, l'ensemble $\mathcal{P}_n\ \{a_0 = -1\}$ de tous les polynomes de degré n dans lesquels le coefficent de x^n est égal à -1. Dans ce cas les éléments de $\mathcal{P}_n\ \{a_0 = -1\}$ sont concaves par rapport à l'ensemble $\mathcal{P}_{n-1}$.

En particulier, pour $n = 1$, $\mathcal{P}_1\{a_0 = 1\}$ est l'ensemble des polynomes de la forme $x + c$ et $\mathcal{P}_0$ est l'ensemble de toutes les constantes. On peut facilement énoncer les résultats précédents pour ce cas.

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}_0$ des constantes et l'ensemble $\mathcal{P}_1\{a_1 = 0\}$ des polynomes de premier degré de la forme a_0x (donc qui s'annule à l'origine). Alors $\mathcal{P}_1\{a_1 = 0\}$ est un ensemble interpolatoire d'odre 1 sur tout intervalle qui ne contient pas l'origine. Soit $[\eta, b]$ un tel intervalle, avec $b > \eta > 0$. L'ensemble $\mathcal{P}_1\{a_1 = 0\}$ est divisé en trois classes: celle des fonctions convexes par rapport à $\mathcal{P}_0$, celle des fonctions concaves par rapport à $\mathcal{P}_0$ et la classe formée par la fonction nulle, qui appartient aussi à $\mathcal{P}_0$.

Un exemple analogue est donné par la paire formée par l'ensemble $\mathcal{P}_0$ et l'ensemble $\mathcal{P}_2\ (a_1 = a_2 = 0\}$ des tous les polynomes de la forme a_0x^2. L'intervalle de définition est toujours $[\eta, b]$ avec $b > \eta > 0$.

Dans les exemples jusqu'ici nous n'avons considéré que des ensembles de polynomes. La construction de ces ensembles peut être généralisée à un ensemble interpolatoire qui s'obtient en considérant toutes les combinaisons linéaires d'un suite de n fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ formant un système de Tchebycheff sur un intervalle donné $[a, b]$. Dans ce cas intéressants sont les sous-ensembles interpolatoires de l'ensemble des fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi_i\,(x)$, sous l'hypothèse de l'existence de tels sous-ensembles. On peut aussi considérer des exemples qui s'obtiennent en partant de 2 systèmes de Tchebycheff différents, contenant un même nombre de fonctions définies sur un même intervalle. On peut obtenir un tel exemple en considérant l'ensemble des intégrales d'une équation différentielle linéaire (homogène) avec des coefficients constantes, avec le second membre nul et l'ensemble des intégrales de l'équation (non homogène) qu'on déduit de la précédente en remplaçant le second membre par 1. Si les racines de l'équation caractéristique sont toutes réelles, la propriété interpolatoire d'ordre égal à l'ordre de l'équation, de l'ensemble des intégrales a lieu sur tout l'axe réel.

Dans la suite, pour simplifier l'exposé, nous écrirons $\mathcal{F} \overset{n}{\times} \mathcal{G}$ si les ensembles $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ du type $I_n\,[a, b]$ sont n-valents l'un par rapport à l'autre.

4. THÉORÈME 1. *Si les ensembles de fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont du type $I_n[a, b]$ et si $\mathcal{F} \overset{n}{\times} \mathcal{G}$, alors les fonctions de $\mathcal{F}$ qui coïncident sur n points avec une même fonction de $\mathcal{G}$ sont toutes $\mathcal{G}$-convexes ou $\mathcal{G}$-concaves sur $[a, b]$.*

Pour la démonstration soit un élément $g \in \mathcal{G}$. Par suite de l'hypothèse $\mathcal{F} \overset{n}{\times} \mathcal{G}$, la fonction $g(x)$ est n-valente par rapport à l'ensemble $\mathcal{F}$ sur

$[a, b]$, donc elle est ou bien $\mathcal{F}$-convexe ou bien $\mathcal{F}$-concave sur $[a, b]$. Supposons qu'il existe un $f_1 \in \mathcal{F}$ qui coïncide avec $g(x)$ sur les points $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et qui est $\mathcal{G}$-convexe et un $f_2 \in \mathcal{F}$ qui coïncide avec $g(x)$ sur les points $x_1' < x_2' < \cdots < x_n'$ et qui est $\mathcal{G}$-concave. En posant $x_0 = x_0' = a$, $x_{n+1} = x_{n+1}' = b$, on peut trouver un indice i de manière que $(-1)^{n-i}\,[f_1(x) - g(x)] > 0$ pour $x \in (x_i, x_{i+1})$ et on peut trouver un indice j (non pas nécessairement égal à i) de manière que l'on ait $(-1)^{n-j}\,[f_2(x) - g(x)] < 0$ pour $x \in (x_j', x_{j+1}')$. De cette manière nous sommes en contradiction avec le fait que $g(x)$ est $\mathcal{F}$-convexe ou $\mathcal{F}$-concave sur $[a, b]$. La conclusion du théorème 1 en résulte.

Lemme 1. *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des ensembles du type $I_1\,[a, b]$ et si $\mathcal{F} \overset{1}{\times} \mathcal{G}$, alors ou bien tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont $\mathcal{G}$-convexes, ou bien tous sont $\mathcal{G}$-concaves sur $[a, b]$.*

Pour la démonstration remarquons que, sous les hypothèses de l'énoncé, quel que soit $\xi \in [a, b]$ et quel que soit le nombre y, il existe une paire de fonctions (et une seule), $f \in \mathcal{F}$ et $g \in \mathcal{G}$ de manière que $f(\xi) = g(\xi) = y$ et que $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, $x \neq \xi$. Supposons que $\mathcal{F}$ contienne des fonctions $\mathcal{G}$-convexs et aussi des fonctions $\mathcal{G}$-concaves sur $[a, b]$. Soit donné un point $\xi \in [a, b]$ et soit $\xi < \xi_1 \leq b$. Il existe alors un nombre y_1 de manière que pour la paire de fonctions $f_1 \in \mathcal{F}$, $g_1 \in \mathcal{G}$ qui vérifient la condition $f_1(\xi) = g_1(\xi) = y_1$ nous ayons $f_1(\xi_1) < g_1(\xi_1)$. De même, il existe un nombre y_2 de manière que pour la paire de fonctions $f_2 \in \mathcal{F}$, $g_2 \in \mathcal{G}$ qui vérifient la condition $f_2(\xi) = g_2(\xi) = y_2$ nous ayons $f_2(\xi_1) > g_2(\xi_1)$. Pour fixer les idées supposons que l'on ait $y_2 < y_1$ (ce qui ne restreint pas la généralité). A tout $y \in [y_2, y_1]$ correspond une fonction (et une seule) $L(\mathcal{G};\ \xi; y|x)$ de $\mathcal{G}$ qui sur ξ prend la valeur y et deux fonctions distinctes de $\mathcal{G}$ ne coïncident sur aucun point de $[a, b]$. Lorsque y décrit l'intervalle $[y_2, y_1]$, la valeur sur le point ξ_1 de la fonction $L(\mathcal{G};\ \xi;\ y|x)$ décrit un intervalle d'extrémités $\alpha = f_2(\xi_1) < \beta = f_1(\xi_1)$. Cette correspondence définit une fonction continue $L(\mathcal{G}; \xi;\ y|\xi_1)$ de y sur $[y_2, y_1]$, que nous convenons de désigner par $\varphi_{\mathcal{G}}(y)$. La continuité résulte du fait que c'est une fonction monotone qui prend toutes les valeurs comprises entre α et β; cette continuité résulte aussi directement de la propriété interpolatoire [3]. Un raisonnement analogue nous montre que les fonctions de $\mathcal{F}$, $L(\mathcal{F}; \xi; y|x)$ qui sur ξ prend des valeurs $y \in [y_2, y_1]$ ont sur ξ_1 des valeurs comprises entre $\gamma = g_2(\xi_1) < \delta = g_1(\xi_1)$ et que $L(\mathcal{F}; \xi; y|\xi_1) = \varphi_{\mathcal{F}}(y)$ est une fonction continue de y sur $[y_2, y_1]$. La différence $\varphi_{\mathcal{F}}(y) - \varphi_{\mathcal{G}}(y)$ est une fonction continue qui est négative sur y_2 et positive sur y_1. Il existe, par conséquent, un point $y_0 \in (y_2, y_1)$ tel que $\varphi_{\mathcal{F}}(y_0) = \varphi_{\mathcal{G}}(y_0)$, ce qui signifie que les fonctions $L(\mathcal{G};\ \xi;\ y_0|x)$ et $L(\mathcal{F}; \xi; y_0|x)$ coïncident aussi sur le point ξ_1, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\mathcal{F} \overset{1}{\times} \mathcal{G}$.

Le lemme 1 est donc démontré.

Dans l'exemple considéré au no. 3, dans lequel le rôle de $\mathcal{F}$ est joué par $\mathcal{P}_1\{a_1 = 0\}$ et le rôle de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{P}_0$, remarquons que nous n'avons pas $\mathcal{F} \overset{1}{\times} \mathcal{G}$, puisque $\mathcal{P}_1\{a_1 = 0\}$ contient et des éléments convexes et des éléments concaves par rapport à $\mathcal{P}_0$ sur $[\eta, b]$. En effet, les deux ensembles considérés ont un élément commun, la fonction nulle sur $[\eta, b]$ et qui ne peut être remplaçée par une autre fonction de manière que $\mathcal{P}_1\{a_1 = 0\}$ reste du type $I_1[\eta, b]$, puisque deux fonctions distinctes d'un tel ensemble ne peuvent coïncider sur aucun point.

5. Dans l'étude des ensembles interpolatoires $\mathcal{F}$, d'un ordre $n > 1$, sur un intervalle $[a, b]$, intervient souvent le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé par les fonctions qui sur les points donnés $x_1 < x_2 < , \dots < x_{n-1}$ de $[a,b]$ prennent les valeurs correspondentes données $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Cet ensemble est dit un épi interpolatoire [3], relativement aux points $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ et aux nombres correspondents $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Nous le désignons par $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$. Il est utile de souligner que l'ensemble $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$ est interpolatoire d'ordre 1 sur chacun des intervalles (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \dots, n-1$ et aussi sur $[a, x_1)$, $(x_{n-1}, b]$ lorsque $a \neq x_1$ et $x_{n-1} \neq b$ respectivement. Si $\mathcal{F} \overset{n}{\times} \mathcal{G}$, nous désignerons par $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F}; \mathcal{G};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$ la réunion des épis $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$ et $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$.

Pour donner un exemple, considérons l'ensemble $\mathcal{P}_2\{a_0 = 1\}$ des polynomes de degré 2 de la forme $x^2 + a_1 x + a_2$ que nous désignerons par $\mathcal{F}$ et l'ensemble $\mathcal{P}_1$ des polynomes de degré 1 que nous désignerons par $\mathcal{G}$. Nous avons, dans ce cas, $\mathcal{F} \overset{2}{\times} \mathcal{G}$, l'intervalle sur lequel nous considérons les éléments de ces ensembles étant un intervalle fini et fermé quelconque $[a, b]$. Pour simplifier, supposons que $a = 0$, $b = 1$. Tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont $\mathcal{G}$-convexes (c'est la propriété de convexité habituelle).

L'épi $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0\end{matrix}\right\}$ contient tous les polynomes de degré 1 et qui s'annulent sur $\frac{1}{2}$ et $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F};\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0\end{matrix}\right\}$ contient tous les polynomes de la forme $x^2 - \left(2\beta + \frac{1}{2}\right)x + \beta$ où β prend toutes les valeurs réelles. L'ensemble $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F}; \mathcal{G};\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0\end{matrix}\right\}$ est alors la réunion des deux ensembles de polynomes considérés.

L e m m e 2. *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des ensembles du type $I_n[a, b]$, $n > 1$, si pour un système de points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$, de $[a, b]$, $x_{n-1} < b$ et pour un système de n-1 nombres $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, l'ensemble*

$\mathcal{S}\left\{\mathcal{F}; \mathcal{G};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$ contient une fonction de $\mathcal{F}$ qui est $\mathcal{G}$-convexe et une fonction de $\mathcal{F}$ qui est $\mathcal{G}$-concave sur $[a, b]$, alors les ensemble $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas n-valents l'un par rapport à l'autre.

Pour la démonstration il suffit de supposer que $\mathcal{F} \overset{n}{\times} \mathcal{G}$ et de nous baser sur le théorème 1, compte tenant des remarques faites sur les propriétés interpolatoires des ensembles $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$ et $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$.

6. D é f i n i t i o n 2. *Deux épis $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$ et $\mathcal{S}\left\{\mathcal{F};\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\end{matrix}\right\}$ de l'ensemble $\mathcal{F}$, supposé du type $I_n[a, b]$, $n > 1$, sont considérés distincts si pour au moins un indice i, $1 \leq i \leq n - 1$, nous avons $y_i \neq z_i$.*

Nous avons le

THÉORÈME 2. *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des ensembles du type $I_n[a, b]$ $(n \geq 1)$, et si $\mathcal{F} \overset{n}{\times} \mathcal{G}$, alors ou bien tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont $\mathcal{G}$-convexes sur $[a, b]$, ou bien tous sont $\mathcal{G}$-concaves sur $[a, b]$.*

Pour la démonstration, le cas $n = 1$ résulte du lemne 1 et pour $n > 1$ considérons n points distincts de $[a, b]$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, où $x_n < b$. Il existe alors, pour tout $y_1, y_2, \dots, y_n$ une paire de fonctions $f \in \mathcal{F}$ et $g \in \mathcal{G}$ telles que l'on ait $f(x_i) = g(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Supposons que $\mathcal{F}$ contienne une fonction $\mathcal{G}$-convexe sur $[a, b]$ et une fonction $\mathcal{G}$-concave sur $[a, b]$. Soit, par exemple, y_i, $i = 1, 2, \dots, n$ les valeurs que la fonction $\mathcal{G}$-convexe $f_1 \in \mathcal{F}$ prend sur les points x_i et z_i, $i = 1, 2, \dots, n$ les valeurs que la fonction $\mathcal{G}$-concave $f_2 \in \mathcal{F}$ prend sur les points x_i. On peut alors construire un épi $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\begin{matrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}} \\ u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{n-1}}\end{matrix}\right\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n$ de manière que l'ensemble $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G}; \mathcal{F};\begin{matrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}} \\ u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{n-1}}\end{matrix}\right\}$ contienne une fonction $\mathcal{G}$-convexe sur $[a, b]$ et une fonction $\mathcal{G}$-concave sur $[a, b]$.

L'épi $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\begin{matrix} x_2, x_3, \dots, x_n \\ y_2, y_3, \dots, y_n\end{matrix}\right\}$ contient une fonction qui sur le point x_1 prend la valeur z_1. Des hypothèses faites il résulte que $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G}; \mathcal{F};\begin{matrix} x_2, x_3, \dots, x_n \\ z_2, y_3, \dots, y_n\end{matrix}\right\}$ contient au moins une fonction $\mathcal{G}$-convexe. Si $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G}; \mathcal{F};\begin{matrix} x_2, x_3, \dots, x_n \\ z_2, y_3, \dots, y_n\end{matrix}\right\}$ contient une fonction $\mathcal{G}$-concave le théorème est démontré. Dans le cas contraire nous considérons l'élément de l'épi $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\begin{matrix}x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n\\ z_1, y_3, y_4, \ldots, y_n\end{matrix}\right\}$ qui sur le point x_2 prend la valeur z_2. Si $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\mathcal{F};\begin{matrix}x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n\\ z_1, z_2, y_4, \ldots, y_n\end{matrix}\right\}$ contient une fonction $\mathcal{G}$-concave le théorème est démontré. Dans le cas contraire, nous continuons la construction précédente avec le point x_3. Dans le cas le moins favorable nous arrivons jusqu'à l'épi $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\begin{matrix}x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\\ z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\end{matrix}\right\}$ de manière que $\mathcal{S}\left\{\mathcal{G};\mathcal{F};\begin{matrix}x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\\ z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\end{matrix}\right\}$ contient une fonction $\mathcal{G}$-convexe qui prend la valeur y_n sur x_n et une fonction $\mathcal{G}$-concave qui prend la valeur z_n sur x_n. En appliquant le lemme 2, la démonstration du théorème en résulte.

7. Les ensembles du type $I_n[a, b]$ qui sont n-valents par rapport à un ensemble donné $\mathcal{F}$ du type $I_n[a, b]$, peuvent être: ou bien avec tous leurs éléments $\mathcal{F}$-convexes ou bien avec tous leurs éléments $\mathcal{F}$-concaves sur $[a, b]$.

D e f i n i t i o n 3. *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des ensembles du type $I_n[a, b]$ et $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, alors $\mathcal{F}$ est dit un ensemble sur-$\mathcal{G}$ lorsque tous ses éléments sont $\mathcal{G}$-convexes sur $[a, b]$ et est dit un ensemble sous-$\mathcal{G}$ lorsque tous ses éléments sont $\mathcal{G}$-concaves sur $[a, b]$.*

Nous avons le

L e m m e 3. *Si $\mathcal{F}$ est un ensemble sur-$\mathcal{G}$ et $f(x)$ une fonction $\mathcal{F}$-convexe sur $[a, b]$, alors $f(x)$ est aussi $\mathcal{G}$-convexe sur $[a, b]$.*

La démonstration résulte immédiatement si nous tenons compte du fait que $f(x)$ étant $\mathcal{F}$-convexe sur $[a, b]$, elle est aussi n-valente par rapport à l'ensemble $\mathcal{F}$, par conséquence, quels que soient les points (3) de $[a, b]$ nous avons

$$f(x_{n+1}) > L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x_{n+1}), \tag{7}$$

donc aussi

$$f(x_{n+1}) > L(\mathcal{G}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x_{n+1}). \tag{8}$$

L e m m e 4. *Si $\mathcal{F}$ est un ensemble sous-$\mathcal{G}$ et $f(x)$ est une fonction $\mathcal{F}$-concave sur $[a, b]$, alors $f(x)$ est aussi $\mathcal{G}$-concave sur $[a, b]$.*

La démonstration se fait de la même manière que pour le lemme 3.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons par $F \prec G$ le fait que $\mathcal{F}$ est un ensemble sous-$\mathcal{G}$ et par $\mathcal{F} \succ \mathcal{G}$ que $\mathcal{F}$ est un ensemble sur-$\mathcal{G}$. Des propriétés énoncées, il résulte que si F est un ensemble sous-$\mathcal{G}$ alors $\mathcal{G}$ est un ensemble sur-$\mathcal{F}$. Les relations $\mathcal{F} \prec \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \succ \mathcal{F}$ sont donc équivalentes. Il résulte des lemmes 3 et 4 la propriété suivante de transitivité:

si

$$\mathcal{F} \prec \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{G} \prec \mathcal{H}, \tag{9}$$

alors

$$\mathcal{F} \prec \mathcal{H}. \tag{10}$$

8. Dans la théorie des ensembles interpolatoires on connait [1] un théorème de la moyenne relativement au comportement sur un nombre fini $m \geqq n+1$ de points, d'éléments d'un ensemble interpolatoire d'ordre n sur $[a,b]$. Ce théorème peut être étendu à un triplet d'ensembles interpolatoires du même ordre, de la manière suivante. Considérons les ensembles $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ du type $I_n[a, b]$ et les points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \quad m \geqq n+1 \tag{11}$$

de l'intervalle $[a, b]$, où $x_m < b$.

THÉORÈME 3. *Si $\mathcal{G} \prec \mathcal{F}$ et $\mathcal{H} \prec \mathcal{G}$, nous avons*

$$\begin{gathered}\min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} L(\mathcal{H}; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y|\xi) < \\ < L(\mathcal{G}; x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; y|\xi) < \\ \max_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} < L(\mathcal{F}; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y|\xi),\end{gathered} \tag{12}$$

où $x_{i_n} < \xi \leqq b$ et $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqq m$.

Pour la démonstration nous nous appuyerons sur le théorème que nous avons démontré dans [1]:

$$\begin{gathered}\min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} L(\mathcal{F}; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j-n+1}; y|\xi) \leqq \\ \leqq L(\mathcal{F}; x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, y|\xi) \leqq \\ \max_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} L(\mathcal{F}; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y|\xi).\end{gathered} \tag{13}$$

Les inégalités (12) résultent de (13) et des inégalités analogues appliquées à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ et si nous remarquons que

$$L(\mathcal{H}; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y|\xi) < L(\mathcal{G}; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y|\xi) \tag{14}$$

et

(15) $L(\mathcal{G}; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y|\xi) < L(\mathcal{F}; x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y|\xi)$

pour $j = i_1, i_1 + 1, \ldots, i_n - n + 1$ et $x_{i_n} < \xi \leqq b$.

9. Les notions introduites dans ce travail et les propriétés énoncées permettent d'attacher à un ensemble interpolatoire d'ordre donné n sur $[a, b]$, tous les ensembles qui sont n-valents par rapport à lui.

Étant donné un ensemble $\mathcal{F}$ du type $I_n[a, b]$, l'ensemble formé par $\mathcal{F}$ et par tous les ensembles n-valentes par rapport à $\mathcal{F}$ sera appelé une classe de n-valence et sera désigné par $\mathcal{V}(\mathcal{F})$. On peut se poser le problème de l'existence d'un ensemble du type $I_{n+1}[a, b]$ formé par des fonctions appartenant à la réunion des éléments de $\mathcal{V}(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est un ensemble du type I_n $[a, b]$. On peut aussi poser le problème de la classification de tous les ensembles interpolatoires d'un même ordre sur $[a, b]$, d'après leur n-valence.

L'exemple suivant nous montrera que ces problèmes se posent effectivement. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}_{n-1}$ des polynomes de degré $n-1$ et tous les ensembles $\mathcal{P}_n\{a_0 = A\}$ des polynomes de degré n avec le coefficient de x^n égal à A, où le nombre réel quelconque A est donné (on a évidemment $\mathcal{P}_n\{a_0 = 0\} = \mathcal{P}_{n-1}$). Remarquons que $\mathcal{V}(\mathcal{P}_{n-1})$ contient, en particulier, tous les ensembles de la forme $\mathcal{P}_n\{a_0 = A\}$. En même temps les éléments de $\mathcal{V}(\mathcal{P}_{n-1})$ contiennent tous les polynomes de degré n, qui forment l'ensemble $\mathcal{P}_n$, interpolatoire d'ordre $n+1$ sur tout intervalle de l'axe réel, quoique tous les éléments de $\mathcal{V}(\mathcal{P}_{n-1})$ sont du type $I_n[a, b]$.

10. Comme application des résultats précédents, considérons le problème de la meilleure approximation d'une fonction continue sur $[a, b]$, par des éléments d'un ensemble $\mathcal{F}$ du type $I_n[a, b]$. On sait [6] que l'existence et l'unicité de l'élément de la meilleure approximation sont assurées pour toute fonction continue sur $[a, b]$. Le problème de la meilleure approximation dont il est question ici est celui au sens de Tchebycheff par rapport à la norme

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = ||f||.$$

Lorsque $f(x)$ est $\mathcal{F}$-convexe ou $\mathcal{F}$-concave sur $[a, b]$, le nombre des points d'alternance au sens de Tchebycheff, relativement à $\varphi^* \in \mathcal{F}$, pour lequel $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi^*(x)| \geqq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)|$, $\varphi \in \mathcal{F}$, est égal à $n+1$.

Désignons par $\mathcal{E}(f; \mathcal{F})$ la meilleure approximation sur $[a, b]$ de la fonction $f(x)$ par les éléments de $\mathcal{F}$.

THÉORÈME 4. *Si $f(x)$ est une fonction $\mathcal{F}$-convexe sur l'intervalle $[a, b]$ et si $\mathcal{G}$ est un ensemble sous-$\mathcal{F}$, nous avons* $\mathcal{E}(f; \mathcal{F}) < \mathcal{E}(f; \mathcal{G})$.

THÉORÈME 5. *Si $f(x)$ est une fonction $\mathcal{F}$-concave sur $[a, b]$ et $\mathcal{H}$ un ensemble sur-$\mathcal{F}$, nous avons* $\mathcal{E}(f; \mathcal{F}) < \mathcal{E}(f; \mathcal{H})$.

Les démonstrations des théorèmes 4 et 5 résultent de la propriété que si $\mathcal{F}$ est du type $I_n[a, b]$, la convexité et la concavité par rapport à $\mathcal{F}$ sur $[a, b]$, impliquent que le nombre des points d'alternance au sens de Tchebycheff soit exactement égal à $n+1$. D-autre part, les fonctions de $\mathcal{H}$ sont toutes $\mathcal{F}$-convexes et les fonctions de $\mathcal{G}$ sont toutes $\mathcal{F}$-concaves sur $[a, b]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Moldovan Elena, *Asupra unei generalizări a noţiunii de convexitate*, Studii şi Cercetări Ştiinţifice, Cluj, **6**, *3 – 4*, 65 – 73 (1955).

[2] — *Asupra unor teoreme de medie*, Comunicările Academiei R.P.R., **VI**, *1*, 7 – 12 (1956).

[3] — *Asupra noţiunii de funcţie convexă faţă de o mulţime de funcţii interpolatoare*, Studii şi Cercetări de matematică, **IX**, *1–4*, 161–224 (1958).

[4] — *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica, **1(24)**, *1*, 49–80 (1950).

[5] Popoviciu Tiberiu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (I), ibid., **12**, 81–92 (1936).

[6] Tornheim L., *On n-parameter families of functions*, Trans. Amer. Mat. Soc., **69**, 457–467 (1950).

Reçu le 5. II. 1963