MATHEMATICA VOL. 6 (29), 2, 1964, pp. 217—232

L'INTÉGRATION NUMÉRIQE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

par

D. V. IONESCU

à Cluj

C. STÖRMER [5] a donné une formule d'intégration numérique pour l'équation différentielle

$$y'' = f(x, y).$$

On sait que si les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_6$ sont en progression arithmétique dont la raison est égale à h et sont situés dans l'intervalle d'existence de la solution $y(x)$ de cette équation, on peut calculer $y(x_6)$, si $y(x)$ a été calculée au préalable sur les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_5$, par la formule de Störmer

$$y(x_6)=2y(x_5)-y(x_4)+h^2\left[g(x_5)+\frac{\Delta_2 g(x_5)}{12}+\frac{\Delta_3 g(x_5)}{12}+19\frac{\Delta_4 g(x_5)}{240}+9\frac{\Delta_5 g(x_5)}{120}\right]+R$$

où $g(x) = f[x, y(x)]$.

Nous avons donné dans un récent travail [2] l'expression du reste de cette formule sous la forme d'une intégrale définie et nous avons montré qu'il est de l'ordre de h^6.

Dans ce travail nous traitons un problème sur l'intégration numérique de l'équation différentielle

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1}$$

Nous désignons par $y(x)$ la solution de cette équation qui satisfait aux conditions

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{2}$$

et nous considérons les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_6$ en progression arithmétiqe dont la raison est $h = x_1 - x_0$ et qui sont situés dans l'intervalle d'existenc de la solution $y(x)$. Nous allons donner des formules pour le calcul de la solution $y(x)$ et de sa dérivée sur les noeuds $x_1, x_2, \ldots x_6$ en supposant que la solution $y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$ ont été calculées au préalable sur l'un des noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_6$.

Ce problème est lié au polynome d'interpolation de *Lagrange-Hermite* avec les noeuds ξ_0, ξ_1 triples et à sa dérivée. En prenant les valeurs de ce polynome et de sa dérivée au point ξ_2, nous avons *des formules de dérivation numérique* de la forme

$$(K)\qquad \begin{aligned} f(\xi_2) &= A_0 f(\xi_0) + A_1 f'(\xi_0) + A_2 f''(\xi_0) + \\ &+ B_0 f(\xi_1) + B_1 f'(\xi_1) + B_2 f''(\xi_1) + R \end{aligned}$$

$$(L)\qquad \begin{aligned} f'(\xi_2) &= C_0 f(\xi_0) + C_1 f'(\xi_0) + C_2 f''(\xi_0) + \\ &+ D_0 f(\xi_1) + D_1 f'(\xi_1) + D_2 f''(\xi_1) + R' \end{aligned}$$

Nous étudierons les restes R et R' de ces formules sous la forme d'une intégrale définie en supposant que la fonction $f(x)$ soit de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle sur lequel on a pris les noeuds ξ_0, ξ_1, ξ_2. Nous insisterons surtout sur le reste R', dans le cas où $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$.

Des formules diverses de dérivation numérique sont établies dans tous les livres sur l'analyse numérique. Nous citons notamment le livre de I. S BEREZIN et N. P. JIDKOV [1] et le livre de S. E. MIKELADZE [3]. L'académicien T. POPOVICIU a publié à ce propos un très important mémoire [4].

Evidemment ce problème peut-être étendu de diverses manières et nous comptons revenir sur ce sujet dans d'autres travaux.

§ 1.

La formule (K) de dérivation numérique

1. Considérons une fonction $f(x)$ de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_2]$ et désignons par ξ_1, un noeud compris entre ξ_0 et ξ_2 Pour le calcul de $f(\xi_2)$ nous avons la formule (K), dans laquelle les coefficients $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ sont donnés par les formules

$$(3)\qquad \begin{aligned} A_0 &= -\frac{(\xi_2-\xi_1)^3}{(\xi_1-\xi_0)^5}[(\xi_1-\xi_0)^2 + 3(\xi_1-\xi_0)(\xi_2-\xi_0) + 6(\xi_2-\xi_0)^2] \\ A_1 &= -\frac{(\xi_2-\xi_1)^3}{(\xi_1-\xi_0)^4}(\xi_2-\xi_0)[3(\xi_2-\xi_0) + (\xi_1-\xi_0)] \\ A_2 &= -\frac{(\xi_2-\xi_1)^3(\xi_2-\xi_0)^2}{2(\xi_1-\xi_0)^3} \end{aligned}$$

et

$$(4)\qquad \begin{aligned} B_0 &= \frac{(\xi_2-\xi_0)^3}{(\xi_1-\xi_0)^5}[6(\xi_2-\xi_0)^2 - 15(\xi_1-\xi_0)(\xi_2-\xi_0) + 10(\xi_1-\xi_0)^2] \\ B_1 &= \frac{(\xi_2-\xi_0)^3}{(\xi_1-\xi_0)^4}(\xi_2-\xi_1)[4(\xi_1-\xi_0) - 3(\xi_2-\xi_0)] \\ B_2 &= \frac{(\xi_2-\xi_0)^3(\xi_2-\xi_1)^2}{2(\xi_1-\xi_0)^3}. \end{aligned}$$

Le reste de la formule (K) est donné par la formule

$$(5)\qquad R = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \varphi(x) f^{(6)}(x)\,dx.$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$ avec les polynomes

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(x) &= -A_0\frac{(x-\xi_0)^5}{5!} + A_1\frac{(x-\xi_0)^4}{4!} - A_2\frac{(x-\xi_0)^3}{3!} \\ \varphi_2(x) &= -\frac{(x-\xi_2)^5}{5!} \end{aligned}$$

On démontre que *la fonction $\varphi(x)$ est positive sur l'intervalle* (ξ_0, ξ_2). En posant

$$(7)\qquad M_6 = \sup_{[\xi_0, \xi_2]} |f^{(6)}(a)|.$$

on a pour R, l'évaluation

$$(8)\qquad |R| \leqslant \frac{(\xi_2-\xi_0)^3(\xi_2-\xi_1)^3}{6!} M_6$$

2. Lorsque $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$ et la fonction $f(x)$ est de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ on a pour la calcul de $f(\xi_2)$ la même formule (K) avec les coefficients (3) et (4), mais pour laquelle le reste que nous désignons par R_1, est donné par la formule

$$(9)\qquad R_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi(x) f^{(6)}(x)\,dx$$

où la fonction $\psi(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_1]$ avec es polynomes

$$(10)\qquad \begin{aligned} \psi_1(x) &= -A_0\frac{(x-\xi_0)^5}{5!} + A_1\frac{(x-\xi_0)^4}{4!} - A_2\frac{(x-\xi_0)^3}{3!} \\ \psi_2(x) &= B_0\frac{(x-\xi_1)^5}{5!} - B_1\frac{(x-\xi_1)^4}{4!} + B_2\frac{(x-\xi_1)^3}{3!} \end{aligned}$$

On démontre que *la fonction $\psi(x)$ est négative sur l'intervalle* (ξ_0, ξ_1). En posant

$$(11)\qquad M_6' = \sup_{[\xi_0, \xi_1]} |f^{(6)}(x)|.$$

nous avons l'évaluation

$$(12) \qquad |R_1| \leqslant \frac{(\xi_2-\xi_0)^3(\xi_1-\xi_2)^3}{6!} M'_6$$

§ 2.

La formule (*L*) de dérivation numérique

3. Si la fonction $f(x)$ est de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_2]$ et si ξ_1, est un noeud compris entre ξ_0 et ξ_2, nous avons la formule (*L*) pour le calcul de $f(\xi_2)$, dans laquelle les coefficients $C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, D_2$ sont donnés par les formules

$$C_0 = -30\frac{(\xi_2-\xi_1)^2(\xi_2-\xi_0)^2}{(\xi_1-\xi_0)^5}$$

$$(13) \qquad C_1 = -\frac{(\xi_2-\xi_1)^2}{(\xi_1-\xi_0)^4}[3(\xi_2-\xi_0)-(\xi_1-\xi_0)][5(\xi_2-\xi_0)+(\xi_1-\xi_0)]$$

$$C_2 = -\frac{(\xi_2-\xi_1)^2}{2(\xi_1-\xi_0)^3}(\xi_2-\xi_0)[5(\xi_2-\xi_0)-2(\xi_1-\xi_0)]$$

et

$$D_0 = 30\frac{(\xi_2-\xi_1)^2(\xi_2-\xi_0)^2}{(\xi_1-\xi_2)^5}$$

$$(14) \qquad D_1 = -\frac{(\xi_2-\xi_0)^2}{(\xi_1-\xi_0)^4}[3(\xi_2-\xi_0)-2(\xi_1-\xi_0)][5(\xi_2-\xi_0)-6(\xi_1-\xi_0)]$$

$$D_2 = \frac{(\xi_2-\xi_0)^2}{2(\xi_1-\xi_0)^3}(\xi_2-\xi_1)[5(\xi_2-\xi_0)-3(\xi_1-\xi_0)]$$

Le reste de la formule (*L*) est donné par la formule

$$(15) \qquad R' = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \theta(x) f^{(6)}(x)dx$$

où la fonction $\theta(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$. avec les polynomes

$$(16) \qquad \begin{aligned} \theta_1(x) &= -C_0\frac{(x-\xi_0)^5}{5!} + C_1\frac{(x-\xi_0)^4}{4!} - C_2\frac{(x-\xi_0)^3}{3!} \\ \theta_2(x) &= \frac{(x-\xi_2)^4}{4!} \end{aligned}$$

On démontre que *la fonction* $\theta(x)$ *est positive sur l'intervalle* (ξ_0, ξ_2) et qu'on a l'évaluation

$$(17) \qquad R' \leqslant \frac{3}{6!}(\xi_2-\xi_0)^2(\xi_2-\xi_1)^2[(\xi_2-\xi_0)+(\xi_2-\xi_1)]M_6$$

4. Lorsque le noeud ξ_2 est compris entre ξ_0 et ξ_1, et la fonction $f(x)$ est de la classe $C^{(6)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ nous avons pour le calcul de $f'(\xi_2)$ la même formule (*L*) avec les mêmes coeficients (13) et (14), mais nous avons pour le reste R'_1 la formule

$$(18) \qquad R'_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_0} \chi(x) f^{(6)}(x)dx$$

où la fonction $\chi(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_1]$ avec les polynomes

$$(19) \qquad \begin{aligned} \chi_1(x) &= -C_0\frac{(x-\xi_0)^5}{5!} + C_1\frac{(x-\xi_0)^4}{4!} - C_2\frac{(x-\xi_0)^3}{3!} \\ \chi_2(x) &= D_0\frac{(x-\xi_1)^5}{5!} - D_1\frac{(x-\xi_1)^4}{4!} + D_2\frac{(x-\xi_1)^3}{3!} \end{aligned}$$

La discussion du signe de la fonction $X(x)$ sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1) met en évidence trois points importants sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1)

$$(20) \qquad \alpha_1 = \xi_0 + \frac{2}{5}(\xi_1-\xi_0), \quad \alpha_2 = \frac{\xi_0+\xi_1}{2}, \quad \alpha_3 = \xi_0 + \frac{3}{5}(\xi_1-\xi_0)$$

Nous avons les conclusions suivantes :

1° Si $\xi_0 < \xi_2 \leqslant \alpha_1$ la fonction $\chi(x)$ est négative sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1).

2° Si $\alpha_1 < \xi_2 < \alpha_2$ la fonction $\chi(x)$ s'annule en un point ξ^* de l'intervalle (ξ_0, ξ_2) ; elle est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ^*) et négative sur l'intervalle (ξ^*, ξ_1).

3° Si $\xi_2 = \alpha_2$ la fonction $\chi(x)$ s'annule pour $x = \alpha_2$; elle est positive sur l'intervalle (ξ_0, α_2) et négative sur l'intervalle (α_2, ξ_1)

4° Si $\alpha_2 < \xi_2 < \alpha_3$ la fonction $\chi(x)$ s'annule en un point ξ'^* de l'intervalle (ξ_2, ξ_1) ; elle est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ'^*) et négative sur l'intervalle (ξ'^*, ξ_1).

5° Si $\alpha_3 \leqslant \xi_2 < \xi_1$, la fonction $\chi(x)$ est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1).

Nous avons

$$(21) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_1} \chi(x)dx = \frac{1}{5!}(\xi_2-\xi_0)^2(\xi_2-\xi_1)^2\left(\xi_2 - \frac{\xi_0+\xi_1}{2}\right)$$

et par suite le degré d'exactitude de la formule (*L*) est cinq si $\xi_2 \neq \alpha_2$ et il augmente d'une unité lorsque $\xi_2 = \alpha_2$.

On démontre que le graphique de la fonction $\chi(x)$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ a l'une des formes suivantes selon la position de ξ_2 par rapport aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

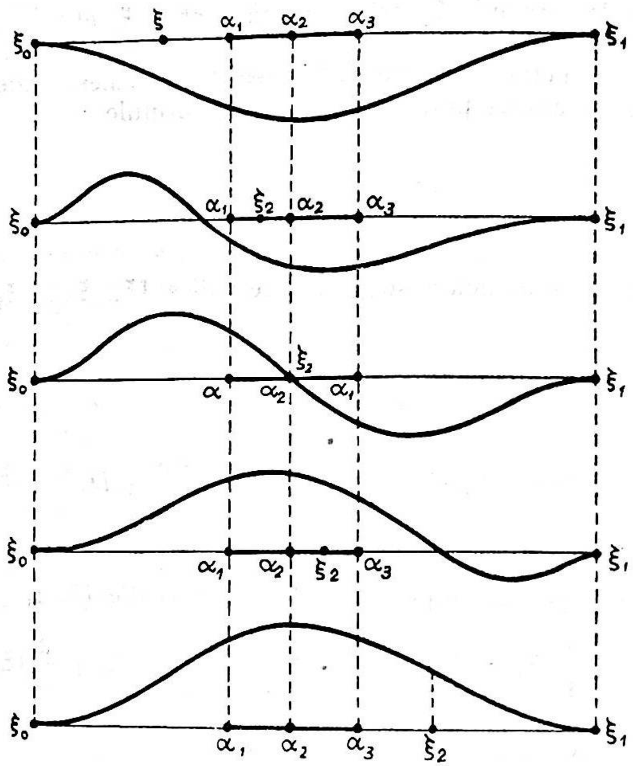

Fig. 1.

Remarque. Lorsque la fonction $f(x)$ est de la classe $C^{(7)}$ sur l'intervalle $[\xi_0, \xi_1]$ et $\xi_2 = \alpha_2$, on a la formule de dérivation numérique

$$
\begin{aligned}
(22)\qquad f'(\xi_2) = &-\frac{15}{16\lambda} f(\xi_0) - \frac{7}{16} f'(\xi_0) - \frac{\lambda}{16} f''(\xi_0) + \\
&+ \frac{15}{16\lambda} f(\xi_1) - \frac{7}{16} f'(\xi_1) + \frac{\lambda}{16} f''(\xi_1) + R_2
\end{aligned}
$$

où $\lambda = \xi_2 - \xi_0 = \xi_1 - \xi_2$. Le reste R_2 est donné par la formule

$$
(23)\qquad R_2 = -\int_{\xi_0}^{\xi_1} \omega(x) f^{(7)}(x)\,dx
$$

où la fonction $\omega(x)$ coïncide sur les intervalles $[\xi_0, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_1]$ avec les polynomes

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad \omega_1(x) &= \frac{15}{16\lambda}\,\frac{(x-\xi_0)^6}{6\,!} - \frac{7}{16}\,\frac{(x-\xi_0)^5}{5\,!} + \frac{\lambda}{16}\,\frac{(x-\xi_0)^4}{4\,!} \\
\omega_2(x) &= \frac{15}{16\lambda}\,\frac{(x-\xi_1)^6}{6\,!} + \frac{7}{16}\,\frac{(x-\xi_1)^5}{5\,!} + \frac{\lambda}{16}\,\frac{(x-\xi_1)^4}{4\,!}
\end{aligned}
$$

On démontre que la fonction $\omega(x)$ est positive sur l'intervalle (ξ_0, ξ_1) et qu'elle a le graphique donné dans la fig. 2

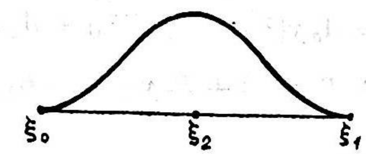

Fig. 2.

En posant

$$
M_7 = \sup_{[\xi_0, \xi_1]} |f^{(7)}(x)|
$$

on a l'évaluation

$$
(25)\qquad |R_2| \leqslant \frac{\lambda^6}{7\,!} M_6.
$$

§ 3.

L'intégration numérique de l'équation différentielle (1) avec les conditions (2)

5. Nous allons faire maintenant l'application des formules (K) et (L) a l'intégration numérique de l'équation différentielle (1), avec les conditions (2).

Supposons que la solution de l'équation (1) qui vérifie les conditions (2) existe sur l'intervalle $[x_0, x_0 + a]$ et que dans le parallélépipède (π) définie par

$$
x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \qquad |y - y_0| \leqslant b, \qquad |y' - y'_0| \leqslant c.
$$

la fonction $f(x, y, y')$ est continue et a des dérivées partielles successives, par rapport à x, y, y' jusqu'au quatrième ordre, continues. Dans ce cas, par des dérivations successives, on déduit de l'équation (1)

$$
(26)\qquad y''' = f_1(x, y, y'), \ldots, y^{(6)} = f_4(x, y, y')
$$

où les fonctions $f_1, \ldots, f_4$ sont continues dans (π).

Nous désignons par

$$
(27)\qquad F_4 = \sup_{(\pi)} |f_4(x, y, y')|
$$

Supposons que l'on ait calculé la solution $y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$ au point ξ_1. Alors pour calculer $y(x)$ et $y'(x)$ au point ξ_2 on peut appliquer les formules (K) et (L), où on va remplacer $y''(x)$ par

$$
(28)\qquad g(x) = f[x, y(x), y'(x)].
$$

Les formules d'intégration numérique que nous avons en vue sont alors

$$y(\xi_2) = A_0\, y(\xi_0) + A_1\, y'(\xi_0) + A_2\, g(\xi_0) + B_0\, y(\xi_1) + B_1\, y'(\xi_1) + B_2\, g(\xi_1) + R \tag{29}$$

où le reste a l'expression

$$R = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \varphi(x)\, f_4[x, y(x), y'(x)]\, dx \tag{30}$$

si $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$ ou

$$R_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi(x)\, f_4[x, y(x), y'(x)]\, dx \tag{30_1}$$

si $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$, et

$$y'(\xi_2) = C_0\, y(\xi_0) + C_1\, y'(\xi_0) + C_2\, g(\xi_0) + D_0\, y(\xi_1) + D_1\, y'(\xi_1) + D_2\, g(\xi_1) + R' \tag{31}$$

où le reste a l'expression

$$R' = \int_{\xi_0}^{\xi_2} \theta(x)\, f_4[x, y(x), y'(x)]\, dx. \tag{32}$$

si $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$ ou

$$R'_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \chi(x)\, f_4[x, y(x), y'(x)]\, dx. \tag{32_1}$$

si $\xi_0 < \xi_2 < \xi_1$.

Pour R, nous avons l'évaluation

$$| R | \leqslant K F_4. \tag{33}$$

où

$$K = \frac{(\xi_2 - \xi_0)^3\, (\xi_2 - \xi_1)^3}{6\,!} \tag{34}$$

et pour R_1, nous avons l'évaluation

$$| R_1 | \leqslant K_1\, F_4 \tag{35}$$

où

$$K_1 = \frac{(\xi_2 - \xi_0)^3\, (\xi_1 - \xi_2)^3}{6\,!} \tag{36}$$

Pour R' nous avons l'évaluation

$$| R' | \leqslant K'\, F_4 \tag{37}$$

où

$$K' = \frac{1}{5\,!}\,(\xi_2 - \xi_0)^2 (\xi_2 - \xi_1)^2 \left(\xi_2 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}\right) \tag{38}$$

Quant à l'évaluation de R'_1 nous distingons plusieurs cas.

1° Si $\xi_0 < \xi_2 \leqslant \xi_0 + \frac{2}{5}(\xi_1 - \xi_0)$ nous avons

$$| R'_1 | \leqslant K'_1 F_4. \tag{39}$$

où

$$K'_1 = \frac{1}{5\,!}\,(\xi_2 - \xi_0)^2 (\xi_2 - \xi_1)^2 \left| \xi_2 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right| \tag{40}$$

2° Si $\xi_0 + \frac{3}{5}(\xi_1 - \xi_0) \leqslant \xi_2 < \xi_1$ nous avons

(41) $| R'_1 | \leqslant$ [illegible] F_4.

où

$$K'_1 = \frac{1}{5\,!}\,(\xi_0 - \xi_0)^2\ (\xi_2 - \xi_1)^2 \left(\xi_2 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}\right). \tag{42}$$

3° Si $\xi_0 + \frac{2}{5}(\xi_0 - \xi_1) < \xi_2 < \xi_0 + \frac{3}{5}(\xi_1 - \xi_0)$ nous avons

$$|R'_1| \leqslant K'_1\, F_4 \tag{43}$$

où

$$K'_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} | \chi(x) |\, dx. \tag{44}$$

En particulier pour $\xi_2 = \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}$ nous avons

$$K_1' = 2\int_{\xi_0}^{\xi_2} \chi(x)\, dx. \tag{45}$$

6. Dans le cas de la suite de noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_6$ on prend $\xi_0 = x_0$ et $\xi_1 = x_i$, $(i = 1,2,\ldots,6)$. Lorsque ξ_2 est un des noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_6$ différent de x_i, il se présente les circonstances suivantes :

1° $\xi_2 > \xi_1$

2° $\xi_2 = \alpha_2$

3° $\xi_2 \in (\xi_0, \alpha_1]$ ou $\xi_2 \in [\alpha_3, \xi_1)$

Dans tous ces trois cas on peut calculer facilement le coefficient K' ou le coefficient K'_1, avec l'une des formules (38), (45), (40) ou (42).

Nous terminons ce travail en donnant des tableaux avec les coeficients A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, K ou K_1 pour construire des formules pratiques (29) pour le calcul de y (ξ_2) et aussi des tableaux avec les coefficients C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, D_2, K' ou K'_1 pour construire des formules pratiques (31) pour le calcul de y' (ξ_2).

1° $\xi_0 = x_0$, $\xi_1 = x_1$; $\xi_2 = x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou K_1h^6
x_2	-31	$-14\,h$	$-2h^2$	32	$-16h$	$4h^2$	$\frac{1}{90} < 0{,}0112$
x_3	-512	$-240h$	$-36h^2$	513	$-270h$	$54h^2$	$\frac{3}{10} = 0{,}3$
x_4	-2943	$-1404h$	$-216h^2$	2944	$-1536h$	$288h^2$	$\frac{12}{5} = 2{,}4$
x_5	-10624	$-5120h$	$-800h^2$	10625	$-5500h$	$1000h^2$	$\frac{100}{9} < 11{,}1112$
x_6	-29375	$-14250h$	$-2250h^2$	29376	$-15120h$	$2700h^2$	$\frac{75}{2} = 37{,}5$

$y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou $K'h^5$
x_2	$-\frac{120}{h}$	-55	$-8h$	$\frac{120}{h}$	-64	$14h$	$\frac{1}{20} = 0{,}05$
x_3	$-\frac{1080}{h}$	-512	$-78h$	$\frac{1080}{h}$	-567	$108h$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$
x_4	$-\frac{4320}{h}$	-2079	$-324h$	$\frac{4320}{h}$	-2240	$408h$	$\frac{21}{5} = 4{,}2$
x_5	$-\frac{12000}{h}$	-5824	$-920h$	$\frac{12000}{h}$	-6175	$1100h$	15
x_6	$-\frac{27000}{h}$	-13175	$-2100h$	$\frac{27000}{h}$	-13824	$2430h$	$\frac{165}{4} = 41{,}25$

2° $\xi_0 = x_0$, $\xi_1 = x_2$; $\xi_2 = x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$

$y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou K_1h^6
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}h$	$\frac{1}{16}h^2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5h}{16}$	$\frac{1}{16}h^2$	$\frac{1}{720} < 0{,}0014$
x_3	$-\frac{19}{8}$	$-\frac{33}{16}h$	$-\frac{9}{16}h^2$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{27}{16}h$	$\frac{27}{16}h^2$	$\frac{3}{10} = 0{,}3$
x_4	-31	$-28\,h$	$-8\,h^2$	32	$-32\,h$	$16\,h^2$	$\frac{32}{45} < 0{,}7112$
x_5	$-\frac{621}{4}$	$-\frac{2295}{16}h$	$-\frac{675}{16}h^2$	$\frac{625}{4}$	$-\frac{2625}{16}h$	$\frac{1125}{16}h^2$	$\frac{75}{16} = 4{,}6875$
x_6	-512	$-480\,h$	$-144\,h^2$	513	$-540\,h$	$216\,h^2$	$\frac{69}{5} = 19{,}2$

$y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou K'_1h^5
x_1	$-\frac{15}{16h}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{16}h$	$\frac{15}{16h}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}h$	$\frac{1}{1920} < 0{,}00053$
x_3	$-\frac{135}{16h}$	$-\frac{119}{16}$	$-\frac{33}{16}h$	$\frac{135}{16h}$	$-\frac{135}{16}$	$\frac{81}{16}h$	$\frac{3}{5} = 0{,}6$
x_4	$-\frac{60}{h}$	-55	$-16h$	$\frac{60}{h}$	-64	$28h$	$\frac{8}{5} = 1{,}6$
x_5	$-\frac{3375}{16h}$	$-\frac{3159}{16}$	$-\frac{945}{16}h$	$\frac{3375}{16h}$	$-\frac{3575}{16}$	$\frac{1425}{16}h$	$\frac{15}{2} = 7{,}5$
x_6	$-\frac{540}{h}$	-512	$-156h$	$\frac{540}{h}$	-567	$216h$	24

3° $\xi_0 = x_0,\ \xi_1 = x_3;\quad \xi_2 = x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6$

$y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou K_1h^6
x_1	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{87}h$	$\frac{4}{27}h^2$	$\frac{17}{81}$	$-\frac{2}{9}h$	$\frac{2}{27}h^2$	$\frac{1}{90} < 0{,}0112$
x_2	$\frac{17}{81}$	$\frac{2}{9}h$	$\frac{2}{27}h^2$	$\frac{64}{81}$	$-\frac{16}{27}h$	$\frac{4}{27}h^2$	$\frac{1}{90} < 0{,}0112$
x_4	$-\frac{47}{81}$	$-\frac{20}{27}h$	$-\frac{8}{27}h^2$	$\frac{128}{81}$	0	$\frac{32}{27}h^2$	$\frac{4}{45} < 0{,}0889$
x_5	$-\frac{544}{81}$	$-\frac{80}{9}h$	$-\frac{100}{27}h^2$	$\frac{625}{81}$	$-\frac{250}{27}h$	$\frac{250}{27}h^2$	$\frac{25}{18} < 1{,}3889$
x_6	-31	$-42h$	$-18h^2$	32	$-48h$	$36h^2$	$\frac{162}{20} = 8{,}1$

$y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou K'_1h^5
x_1	$-\frac{40}{81h}$	0	$\frac{6}{81}h$	$\frac{40}{81h}$	$-\frac{39}{81}$	$\frac{12}{81}h$	$\frac{1}{60} < 0{,}0167$
x_2	$-\frac{40}{81h}$	$-\frac{39}{81}$	$-\frac{12}{81}h$	$\frac{40}{81h}$	0	$\frac{6}{81}h$	$\frac{1}{60} < 0{,}0167$
x_4	$-\frac{160}{81h}$	$-\frac{207}{81}$	$-\frac{84}{81}h$	$\frac{160}{81h}$	$-\frac{192}{81}$	$\frac{264}{81}h$	$\frac{1}{3} < 0{,}3334$
x_5	$-\frac{1000}{81h}$	$-\frac{1344}{81}$	$-\frac{570}{81}h$	$\frac{1000}{81h}$	$-\frac{1575}{81}$	$\frac{1200}{81}h$	$\frac{35}{12} < 2{,}9167$
x_6	$-\frac{40}{h}$	-55	$-24h$	$\frac{40}{h}$	-64	$42h$	$\frac{243}{20} = 12{,}15$

4° $\xi_0 = x_0,\ \xi_1 = x_4;\quad \xi_2 = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5,\ x_6$

$y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou K_1h^6
x_1	$\frac{459}{512}$	$\frac{189}{512}h$	$\frac{27}{128}h^2$	$\frac{53}{512}$	$-\frac{39}{256}h$	$\frac{9}{128}h^2$	$\frac{3}{80} = 0{,}0375$
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}h$	$\frac{1}{4}h^2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}h$	$\frac{1}{4}h^2$	$\frac{4}{45} < 0{,}0889$
x_3	$\frac{53}{512}$	$\frac{39}{256}h$	$\frac{9}{128}h^2$	$\frac{459}{512}$	$-\frac{189}{256}h$	$\frac{27}{128}h^2$	$\frac{3}{80} = 0{,}0375$
x_5	$-\frac{113}{512}$	$-\frac{95}{256}h$	$-\frac{25}{128}h^2$	$\frac{625}{512}$	$-\frac{125}{256}h$	$\frac{125}{128}h^2$	$\frac{25}{144} < 0{,}1737$
x_6	$-\frac{19}{8}$	$-\frac{33}{8}h$	$-\frac{9}{4}h^2$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{27}{8}h$	$\frac{27}{4}h^2$	$\frac{12}{5} = 2{,}4$

$y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou K'_1h^5
x_1	$-\frac{135}{512h}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{128}h$	$\frac{135}{512h}$	$-\frac{95}{256}$	$\frac{21}{128}h$	$\frac{3}{40}=0{,}075$
x_2	$-\frac{15}{32h}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{8}h$	$\frac{15}{32h}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}h$	$\frac{1}{60}<0{,}0167$
x_3	$-\frac{135}{512h}$	$-\frac{95}{256}$	$-\frac{21}{128}h$	$\frac{135}{512h}$	$-\frac{81}{256}$	$-\frac{27}{128}h$	$\frac{3}{40}=0{,}075$
x_5	$-\frac{375}{512h}$	$-\frac{319}{256}$	$-\frac{85}{128}h$	$\frac{375}{512h}$	$-\frac{175}{256}$	$\frac{325}{128}h$	$\frac{5}{8}=0{,}625$
x_6	$-\frac{135}{32h}$	$-\frac{119}{16}$	$-\frac{33}{8}h$	$\frac{135}{32h}$	$-\frac{135}{16}$	$\frac{81}{8}h$	$\frac{24}{5}=4{,}8$

5° $\xi_0 = x_0$, $\xi_1 = x_5$; $\xi_2 = x_1, x_2, x_3, x_4, x_6$

$y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou K_1h^6
x_1	$\frac{2944}{3125}$	$\frac{512}{625}h$	$\frac{64}{250}h^2$	$\frac{181}{3125}$	$-\frac{68}{625}h$	$\frac{16}{250}h^2$	$\frac{4}{45}<0{,}0889$
x_2	$\frac{2133}{3125}$	$\frac{594}{625}h$	$\frac{54}{125}h^2$	$\frac{992}{3125}$	$-\frac{336}{625}h$	$\frac{36}{125}h^2$	$\frac{3}{10}=0{,}3$
x_3	$\frac{992}{3125}$	$\frac{336}{625}h$	$\frac{36}{125}h^2$	$\frac{2133}{3125}$	$-\frac{594}{625}h$	$\frac{54}{125}h^2$	$\frac{3}{10}=0{,}3$
x_4	$\frac{181}{3125}$	$\frac{68}{625}h$	$\frac{8}{125}h^2$	$\frac{2944}{3125}$	$-\frac{512}{625}h$	$\frac{32}{125}h^2$	$\frac{4}{45}<0{,}0889$
x_6	$-\frac{331}{3125}$	$-\frac{138}{625}h$	$-\frac{18}{125}h^2$	$\frac{3456}{3125}$	$\frac{432}{625}h$	$\frac{108}{125}h^2$	$\frac{3}{10}=0{,}3$

$y'(\xi_2)$

ξ_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	Kh^5 ou K'_1h^5
x_1	$-\frac{96}{625h}$	$\frac{64}{125}$	$-\frac{40}{125}h$	$\frac{96}{625h}$	$-\frac{35}{125}$	$\frac{20}{125}h$	$\frac{1}{5}=0{,}2$
x_2	$-\frac{216}{625h}$	$-\frac{27}{125}$	0	$\frac{216}{625h}$	$-\frac{64}{125}$	$\frac{30}{125}h$	$\frac{3}{20}=0{,}15$
x_3	$-\frac{216}{625h}$	$-\frac{64}{125}$	$-\frac{30}{125}h$	$\frac{216}{625h}$	$-\frac{27}{125}$	0	$\frac{3}{20}=0{,}15$
x_4	$-\frac{96}{625h}$	$-\frac{35}{125}$	$-\frac{20}{125}h$	$\frac{96}{625h}$	$\frac{64}{125}$	$-\frac{40}{125}h$	$\frac{1}{2}=0{,}2$
x_6	$-\frac{216}{625h}$	$-\frac{91}{125}$	$-\frac{60}{125}h$	$\frac{216}{625h}$	0	$\frac{270}{125}h$	$\frac{21}{20}=1{,}05$

6° $\xi_0 = x_0$, $\xi_1 = x_6$; $\xi_2 = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

$y(\xi_2)$

ξ_2	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	Kh^6 ou K_1h^6
x_1	$\frac{625}{648}$	$\frac{125}{144}h$	$\frac{125}{432}h^2$	$\frac{23}{648}$	$-\frac{35}{432}h$	$\frac{25}{432}h^2$	$\frac{25}{144}<0{,}1737$
x_2	$\frac{64}{81}$	$\frac{32}{27}h$	$\frac{16}{27}h^2$	$\frac{17}{81}$	$-\frac{12}{27}h$	$\frac{8}{27}h^2$	$\frac{32}{45}<0{,}7112$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}h$	$\frac{9}{16}h^2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{16}h$	$\frac{9}{16}h^2$	$\frac{81}{80}=1{,}0125$
x_4	$\frac{17}{81}$	$\frac{4}{9}h$	$\frac{8}{27}h^2$	$\frac{64}{81}$	$-\frac{32}{27}h$	$\frac{16}{27}h^2$	$\frac{32}{45}<0{,}7112$
x_5	$\frac{23}{648}$	$\frac{35}{432}h$	$\frac{25}{432}h^2$	$\frac{625}{648}$	$-\frac{125}{144}h$	$\frac{125}{144}h^2$	$\frac{25}{144}<0{,}1737$

$y'(\xi_2)$

ξ_0	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2	$K'h^5$ ou K'_1h^5
x_1	$-\frac{125}{1296h}$	$\frac{275}{432}$	$\frac{175}{432}h$	$\frac{125}{1296h}$	$-\frac{93}{432}$	$\frac{65}{432}h$	$\frac{5}{12} < 0{,}4167$
x_2	$-\frac{20}{81\,h}$	0	$\frac{4}{27}h$	$\frac{20}{81h}$	$-\frac{13}{27}$	$\frac{8}{27}h$	$\frac{8}{15} < 0{,}5334$
x_3	$-\frac{5}{16h}$	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{3}{16}h$	$\frac{5}{16h}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{3}{16}h$	$\frac{81}{640} < 0{,}1266$
x_4	$-\frac{20}{81h}$	$-\frac{39}{81}$	$-\frac{8}{27}h$	$\frac{20}{81h}$	0	$-\frac{4}{27}h$	$\frac{8}{15} < 0{,}5334$
x_5	$-\frac{125}{1296h}$	$\frac{93}{432}$	$-\frac{65}{432}h$	$\frac{125}{1296h}$	$+\frac{275}{432}$	$-\frac{175}{432}h$	$\frac{5}{12} < 0{,}4167$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Березин И. С. и Жидков Н. П., *Методы вычислений*. Москва. I, 3 (1959

[2] Ionescu D. V., *Restul în formula de integrare numerică a lui Störmer*. Studii şi cercetări de mat. (Cluj), XIV, 49–56 (1963).

[3] Микеладзе Ш. Е., *Численные методы математического анализа*. Москва, XII, 1953,

[4] Popoviciu T., *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. Studii şi cerc. matematice, 3, 1–2, 53–122 (1952).

[5] Störmer C., *Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires*. Congr. Intern. des Mathématiciens, Strasbourg, 243–257 (1920).

Reçu le 19. XI. 1963