

CONSTRUIREA UNOR FORMULE PRACTICE DE CVADRATURĂ

DE

D. V. IONESCU

Într-o lucrare recentă [2], am determinat resturile în câteva formule practice de cvadratură pe care le-am numit formulele lui *G. Coulmy* [1] și *Durand* [3]. În această lucrare, vom arăta o metodă pentru a construi aceste formule și altele similare.

1. Să considerăm o formulă de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = A_0 [f(x_0) + f(x_n)] + A_1 [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \dots \\ + A_p [f(x_p) + f(x_{n-p})] + h [f(x_{p+1}) + \dots + f(x_{n-p-1})] + R \quad (1)$$

care depinde de parametrii $A_0, A_1, \dots, A_p$ și care este considerată pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ în progresie aritmetică cu rația h . Se pot determina relațiile dintre acești parametri, astfel ca gradul de exactitate al formulei (1) să fie q . În acest caz presupunând că funcția $f(x)$ este de clasa C^{q+1} pe intervalul $[x_0, x_n]$, restul R , al formulei (1), se poate pune sub forma

$$R = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f^{(q+1)}(x) dx. \quad (2)$$

Este evident că și funcția $\varphi(x)$ depinde de parametrii $A_0, A_1, \dots, A_p$. Deoarece formula (1) și restul ei sînt determinate de funcția $\varphi(x)$, parametrii $A_0, A_1, \dots, A_p$ pot fi toți determinați dacă în afară de relațiile dintre parametrii, care fac ca gradul de exactitate să fie q , se mai adaugă noi condiții pe care să le îndeplinească funcția $\varphi(x)$. Condițiile care se vor adăuga pentru funcția $\varphi(x)$, vor fi totdeauna legate de o evaluare cît mai convenabilă a restului R , dat de formula (2). Felul de condiții noi pe care le vom impune, va fi văzut din exemplele pe care le vom

trata. Ne vom mărgini în această lucrare la formule cu gradul de exactitate 1, urmînd ca în alte lucrări să tratăm despre formule cu gradul de exactitate mai mare ca 1.

2. Să presupunem mai întîi că în formula (1) avem un singur parametru A_0 și că gradul de exactitate al formulei este 1. În acest caz avem

$A_0 = \frac{h}{2}$ și formula este

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + h [f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x) dx. \quad (3)$$

Aceasta este formula care se deduce de obicei din formula trapezului. Funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots$ cu polinoamele $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ unde

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} (x - x_0)(x - x_1), \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2} (x - x_1)(x - x_2), \dots \quad (4)$$

Pentru restul formulei (3) avem evaluarea

$$|R| \leq \frac{n}{12} M_2 h^3, \quad (5)$$

unde

$$M_2 = \sup_{[x_0, x_n]} |f''(x)|. \quad (6)$$

3. Să presupunem că în formula (1) avem doi parametri A_0, A_1 și că gradul de exactitate al formulei este 1. În acest caz parametrii A_0, A_1 nu sînt determinați, ci sînt legați prin relația

$$A_0 + A_1 = \frac{3h}{2}. \quad (7)$$

Restul R este dat de formula (2) în care $q = 1$ și funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots$ cu polinoamele $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$. Fără greutate se găsește că

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)}{2} - A_0(x - x_0), \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x - x_1) + \left(\frac{h^2}{2} - A_0 h\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Din condițiile la limită care determină polinoamele $\varphi_k(x)$ și anume

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_{k-1}) - \varphi_{k-1}(x_{k+1}) &= 0 \\ \varphi'_{k-1}(x_{k-1}) - \varphi'_k(x_{k-1}) &= h \end{aligned} \quad (k = 3, 4, \dots)$$

se deduce că

$$\begin{aligned}\varphi_k(x_{k-1}) &= \varphi_{k-1}(x_{k-1}), \\ \varphi'_k(x_{k-1}) &= \varphi'_{k-1}(x_{k-1}) - h.\end{aligned}\quad (9)$$

Pentru $k = 3$, se deduce, ținând seamă de ecuațiile (8), că

$$\begin{aligned}\varphi_3(x_2) &= 2h^2 - 2A_0h - A_1h, \\ \varphi'_3(x_2) &= h - A_0 - A_1,\end{aligned}\quad (10_1)$$

și din cauza ecuației (7), vom avea

$$\varphi_3(x_2) = \frac{h^2}{2} - A_0h. \quad (10_2)$$

Rezultă astfel că

$$\varphi_3(x) = \frac{(x - x_2)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x - x_2) + \left(\frac{h^2}{2} - A_0h\right) \quad (10_3)$$

și refăcând aceleași calcule pentru $k = 4$, se găsește

$$\varphi_4(x) = \frac{(x - x_3)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x - x_3) + \left(\frac{h^2}{2} - A_0h\right) \quad (10_4)$$

și așa mai departe.

Pentru determinarea parametrilor A_0, A_1 mai introducem: *condiția* (α), prin formula

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x) dx = 0 \quad (11)$$

și din cauza formulelor (10₃), (10₄), vom avea de asemenea

$$\int_{x_2}^{x_3} \varphi_3(x) dx = 0, \int_{x_3}^{x_4} \varphi_4(x) dx = 0, \dots$$

Condiția (11) conduce la ecuația

$$3A_0 + A_1 = \frac{7h}{2} \quad (12)$$

și rezolvînd sistemul format de ecuațiile (7) și (12) se deduce că

$$A_0 = \frac{5h}{12}, \quad A_1 = \frac{13h}{12}.$$

Formula de cvadratură (3) devine

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{5h}{12} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{13h}{12} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \\ &+ h [f(x_2) + \dots + f(x_{n-2})] + R.\end{aligned}\quad (13)$$

Aceasta este formula lui Durand, caracterizată deci de gradul de exactitate al ei egal cu 1 și de condiția (α) exprimată prin formula (11). Pentru această formulă avem

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2} - \frac{5h}{12}(x-x_0) \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_1) + \frac{h^2}{12} \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_2) + \frac{h^2}{12}\end{aligned}\quad (14)$$

.

și sîntem conduși la evaluarea

$$|R| \leq K_D M_2 h^3,$$

unde

$$K_D = \int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)| dx = \frac{71 - 12\sqrt{3}}{648} + \frac{n\sqrt{3}}{54} = 0,07749 \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54}. \quad (15)$$

4. Să presupunem că în formula (1) avem trei parametri A_0, A_1, A_2 . Scriind că formula are gradul de exactitate 1, avem

$$A_0 + A_1 + A_2 = \frac{5h}{2}. \quad (16)$$

Din primele condiții la limită pentru determinarea funcției $\varphi(x)$, se deduce că

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_0(x-x_0) \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} + (h-A_0-A_1)(x-x_1) + \left(\frac{h^2}{2} - hA_0\right) \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} + (2h-A_0-A_1-A_2)(x-x_2) + \\ &\quad + [2h^2 - h(2A_0 + A_1)].\end{aligned}\quad (17)$$

Din condițiile la limită următoare, care sînt date tot de formulele (9), se deduce, pentru $k=4$, că avem

$$\varphi_4(x_3) = \varphi_3(x_3) = \frac{h^2}{2} + (2h-A_0-A_1-A_2)h + [2h^2 - h(2A_0 + A_1)]$$

$$\varphi'_4(x_3) = \varphi'_3(x_3) - h = 2h - A_0 - A_1 - A_2.$$

Însă din cauza ecuației (16), prima din aceste formule se reduce la

$$\varphi_4(x_3) = 2h^2 - h(2A_0 + A_1)$$

astfel că vom avea

$$\begin{aligned} \varphi_4(x) = \frac{(x - x_3)^2}{2} + (2h - A_0 - A_1 - A_2)(x - x_3) + \\ + [2h^2 - h(2A_0 + A_1)] \end{aligned} \quad (18)$$

iar $\varphi_5(x)$ se deduce din $\varphi_4(x)$ înlocuind pe x_3 cu $x_4, \dots$, și așa mai departe. Să introducem condiția (α) pentru funcția φ , exprimată prin

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_3(x) dx = 0. \quad (19)$$

Aceasta conduce la următoarea ecuație

$$5A_0 + 3A_1 + A_2 = \frac{19h}{3}. \quad (20)$$

Gradul de exactitate 1 al formulei (1) și condiția (α) determină polinoamele $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\dots$. Într-adevăr, ținând seamă de ecuația (16), coeficientul lui $x - x_2$ din $\varphi_3(x)$ este $-\frac{h}{2}$, iar identitatea

$$2A_0 + A_1 = \frac{(5A_0 + 3A_1 + A_2) - (A_0 + A_1 + A_2)}{2}$$

arată că termenul liber din $\varphi_3(x)$ este

$$2h^2 - h \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{19h}{3} - \frac{5h}{2} \right] = 2h^2 - \frac{23h^2}{12} = \frac{h^2}{12}.$$

Prin urmare, avem

$$\varphi_3(x) = \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{h}{2}(x - x_2) + \frac{h^2}{12}$$

iar $\varphi_4(x)$ se deduce din $\varphi_3(x)$, înlocuind pe x_2 cu $x_3, \dots$ și așa mai departe.

Rămîne să determinăm pe $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ care mai depind de un singur parametru.

1°. Dacă se impune condiția ca

$$\varphi_2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 0 \quad (21)$$

ceea ce se întâmplă în cazul formulei lui *G. Coulmy*, sîntem conduși la ecuația

$$3A_0 + A_1 = \frac{9h}{4}. \quad (22)$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (16), (20), (22), avem

$$A_0 = \frac{h}{3}, \quad A_1 = \frac{5h}{4}, \quad A_2 = \frac{11h}{12}$$

și aceasta conduce la formula de cvadratură

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f dx &= \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{5h}{4} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \\ &+ \frac{11h}{12} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + h [f(x_3) + \dots + f(x_{n-3})] + R. \end{aligned} \quad (23)$$

Se arată că pentru formula (23) avem

$$|R| \leq K \cdot M_2 h^3, \quad (24)$$

unde

$$K = 0,0553 \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54} \quad (25)$$

și acest număr este cu puțin mai mare decît numărul corespunzător K , din formula lui *G. Coulmy*, care este

$$K_c = 0,0521 \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54}. \quad (26)$$

2°. Însă dacă se supune condiția

$$\varphi_2(x_1) = \frac{7h^2}{48}, \quad (27)$$

atunci A_0, A_1, A_2 sînt dați de ecuațiile (16), (20) și ecuația

$$\frac{h^2}{2} - hA_0 = \frac{7h^2}{48}$$

de unde se deduce că

$$A_0 = \frac{17h}{48}, \quad A_1 = \frac{58h}{48}, \quad A_2 = \frac{45h}{48}.$$

Formula de cvadratură corespunzătoare este

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{17h}{48} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{58h}{48} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \\ + \frac{45h}{48} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + h [f(x_3) + \dots + f(x_{n-3})] + R, \quad (28)$$

unde pentru R avem evaluarea (24) cu coeficientul K dat de formula

$$K = 0,0421 \dots + \frac{n^{1/3}}{54} \quad (29)$$

și acesta este mai avantajos decât coeficientul corespunzător din formula lui *G. Coulmy*.

5. Să presupunem acum că în formula (1) avem patru parametri A_0, A_1, A_2, A_3 . Scriind că formula (1) are gradul de exactitate 1, avem ecuația

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \frac{7h}{2} \quad (30)$$

și din condițiile la limită relative la punctele x_0, x_1, x_2, x_3 rezultă că

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} - A_0(x - x_0) \\ \varphi_2(x) = \frac{(x - x_1)^2}{2} + (h - A_0 - A_1)(x - x_1) + \left(\frac{h^2}{2} - h A_0\right) \\ \varphi_3(x) = \frac{(x - x_2)^2}{2} + (2h - A_0 - A_1 - A_2)(x - x_2) + \\ + [2h^2 - h(2A_0 + A_1)] \quad (31) \\ \varphi_4(x) = \frac{(x - x_3)^2}{2} + (3h - A_0 - A_1 - A_2 - A_3)(x - x_3) + \\ + \left[\frac{9h^2}{2} - h(3A_0 + 2A_1 + A_2)\right],$$

Ținând seamă de condițiile la limită din nodul x_4 , care sînt date de ecuațiile (9), pentru $k = 5$, se deduce că

$$\varphi_5(x) = \frac{(x - x_4)^2}{2} + (3h - A_0 - A_1 - A_2 - A_3)(x - x_4) + \\ + [8h^2 - h(4A_0 + 3A_1 + 2A_2 + A_3)] \quad (32)$$

și conform ecuației (30), ultimul termen se reduce la ultimul termen din $\varphi_4(x)$. Prin urmare avem

$$\begin{aligned}\varphi_4(x) &= \frac{(x-x_3)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_3) + \left[\frac{9h^2}{2} - h(3A_0 + 2A_1 + A_2) \right] \\ \varphi_5(x) &= \frac{(x-x_4)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_4) + \left[\frac{9h^2}{2} - h(3A_0 + 2A_1 + A_1) \right]\end{aligned}$$

și așa mai departe.

Introducând condiția (α) prin ecuația

$$\int_{x_2}^{x_4} \varphi_4(x) dx = 0, \quad (33)$$

obținem ecuația

$$7A_0 + 5A_1 + 3A_2 + A_3 = \frac{37}{3}h \quad (34)$$

și din identitatea

$$\begin{aligned}3A_0 + 2A_1 + A_2 &= \frac{1}{2} [(7A_0 + 5A_1 + 3A_2 + A_3) - \\ &\quad - (A_0 + A_1 + A_2 + A_3)]\end{aligned}$$

deducem în baza ecuațiilor (30) și (34) că

$$\frac{9h^2}{2} - h(3A_0 + 2A_1 + A_2) = \frac{9h^2}{2} - \frac{h}{2} \cdot \frac{37}{3}h + \frac{h}{2} \frac{7h}{2} = \frac{h^2}{12}$$

astfel că ecuațiile (32) se reduc la

$$\begin{aligned}\varphi_4(x) &= \frac{(x-x_3)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_3) + \frac{h^2}{12} \\ \varphi_5(x) &= \frac{(x-x_4)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_4) + \frac{h^2}{12}\end{aligned} \quad (35)$$

... și așa mai departe,

Prin urmare, *gradul de exactitate 1 al formulei (2) și condiția (α) determină polinoamele $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, ...*

Rămân astfel doi parametri nedeterminați și prin noi condiții vom determina și polinoamele φ_1 , φ_2 , φ_3 .

1°. Dacă se impune însă condiția

$$\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) = \varphi_2(x_2) - \varphi_3(x_3) \quad (36)$$

și ca

$$\int_{x_2}^{x_1} \varphi_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_3} \varphi_3(x) dx = 0 \quad (37)$$

se obțin ecuațiile

$$A_2 = h, 6A_0 + 3A_1 + A_2 = \frac{20}{3} h. \quad (38)$$

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (30), (34), (38) se găsește

$$A_0 = \frac{13h}{36}, A_1 = \frac{7h}{6}, A_2 = h, A_3 = \frac{35}{36} h.$$

S-a obținut astfel formula de cvadratură a lui *G. Coulmy* :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f dx = & \frac{13h}{36} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{7h}{6} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + h [f(x_2) + \\ & + f(x_{n-2})] + \frac{35h}{36} [f(x_3) + f(x_{n-3})] + h [f(x_4) + \dots + f(x_{n-4})] + R. \end{aligned} \quad (39)$$

care este caracterizată prin urmare de gradul de exactitate 1, de condiția (α) exprimată prin formula (33) și de condițiile (36), (37).

2°. Dacă însă pe lângă ecuațiile (30), (34) se adaugă condițiile

$$\varphi_2(x_1) = \frac{11h^2}{72}, \varphi_3(x_2) = \frac{7h^3}{72} \quad (40)$$

se obține formula de cvadratură de tipul formulei lui *G. Coulmy* :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f dx = & \frac{25h}{72} [f(x_0) + f(x_n)] + \frac{29h}{24} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \\ & + \frac{23h}{24} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + \frac{71h}{72} [f(x_3) + f(x_{n-3})] + \\ & + h [f(x_4) + \dots + f(x_{n-4})] + R, \end{aligned} \quad (41)$$

pentru care avem evaluarea (24) a restului cu coeficientul K , dat de formula

$$K = 0,05197 \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54} \quad (42)$$

cu puțin mai mic decât coeficientul din formula lui *G. Coulmy*.

Ne oprim aici cu aceste considerații care au avut scopul de a arăta cum se construiesc formulele de cvadratură (39) și (13) ale lui *G. Coulmy* și *Durand*, precum și altele similare. Este remarcabil că s-a putut impune condiții convenabile asupra funcției $\varphi(x)$ din expresia restului, care caracterizează formulele de cvadratură (13) și (39) ale lui *Durand* și *G. Coulmy*. Este de asemenea remarcabil că s-au putut alege aceste condiții, astfel încât coeficientul K , din evaluarea lui $|R|$, să fie mai mic.

Astfel numărul K , corespunzător formulei (28), este mai mic decât numărul K corespunzător formulei lui *G. Coulmy*.

6. Pentru a încheia vom prezenta câteva formule de tipul celor studiate în această lucrare, în care lipsesc în membrul al doilea valorile funcției $f(x)$ pe nodurile x_0 și x_n .

1° Avem formula

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + h [f(x_2) + \dots + f(x_{n-2})] + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x) dx \quad (43)$$

în care funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... cu următoarele polinoame

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{h}{2} (x - x_1) + \frac{h^2}{12} \end{aligned} \quad (44)$$

Funcția $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_0, x_n) și avem

$$|R| \leq \frac{5n-6}{n^3} M_2 \frac{(b-a)^3}{12}. \quad (45)$$

2° Avem formula de cvadratură

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{23h}{12} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \frac{7h}{12} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + \\ &+ h [f(x_3) + \dots + f(x_{n-3})] + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x) dx \end{aligned} \quad (46)$$

analoagă formulei lui *Durand*, în care funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ... cu polinoamele

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{11h}{12} (x - x_1) + \frac{h^2}{2} \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{h}{2} (x - x_2) + \frac{h^2}{12} \end{aligned} \quad (47)$$

Avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)| dx = \left(\frac{81 - 8\sqrt{3}}{108} + \frac{n\sqrt{3}}{54} \right) h^3.$$

Rezultă că pentru restul R din formula (46), avem

$$|R| \leq k M_2 h^3, \quad k = \frac{81 - 8\sqrt{3}}{108} + \frac{n\sqrt{3}}{54} = 0,6216 \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54}. \quad (48)$$

3°. Avem formula de cvadratură

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{11h}{6} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \frac{3h}{4} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + \\ &+ \frac{11h}{12} [f(x_3) + f(x_{n-3})] + h [f(x_4) + \dots + f(x_{n-4})] + \\ &+ \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x) dx \end{aligned} \quad (49)$$

analoagă formulei (23), unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, cu polinoamele

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{5h}{6} (x - x_1) + \frac{h^2}{2} \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{7h}{12} (x - x_2) + \frac{h^2}{6} \\ \varphi_4(x) &= \frac{(x - x_3)^2}{2} - \frac{h}{2} (x - x_3) + \frac{h^2}{12} \end{aligned} \quad (50)$$

Avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)| dx = \left(\frac{595 - 72\sqrt{3}}{648} + \frac{n\sqrt{3}}{54} \right) h^3$$

și prin urmare pentru restul R , al formulei (49), avem evaluarea

$$|R| \leq k M_2 h^3, \quad k = \frac{595 - 72\sqrt{3}}{648} + \frac{n\sqrt{3}}{54} = 0,7257 \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54}. \quad (51)$$

4°. Avem formula de cvadratură

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{25h}{12} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \frac{h}{4} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + \\ &+ \frac{7h}{6} [f(x_3) + f(x_{n-3})] + h [f(x_4) + \dots + f(x_{n-4})] + \\ &+ \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x) dx, \end{aligned} \quad (52)$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, ... cu polinoamele

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{13h}{12} (x - x_1) + \frac{h^2}{2} \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{h}{3} (x - x_2) - \frac{h^2}{12} \\ \varphi_4(x) &= \frac{(x - x_3)^2}{2} - \frac{h}{2} (x - x_3) + \frac{h^2}{12} \end{aligned} \quad (53)$$

Avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)| dx = \left(\frac{209 + 20\sqrt{10} - 36\sqrt{3}}{324} + \frac{n\sqrt{3}}{54} \right) h^3.$$

Vom avea deci pentru restul R ,

$$|R| \leq k M_2 h^3, k = \frac{209 + 20\sqrt{10} - 36\sqrt{3}}{324} + \frac{n\sqrt{3}}{54} = 0,6478 \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54} \quad (54)$$

5°. Formula de cvadratură

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \frac{79h}{36} [f(x_1) + f(x_{n-1})] + \frac{h}{6} [f(x_2) + f(x_{n-2})] + \\ &+ h [f(x_3) + f(x_{n-3})] + \frac{41h}{36} [f(x_4) + f(x_{n-4})] + \\ &+ h [f(x_5) + \dots + f(x_{n-5})] + \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x) f''(x) dx \end{aligned} \quad (55)$$

corespunde la formula lui G. Coulmy. Funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$, $[x_4, x_5]$, ... cu polinoamele

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{2} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{43h}{36}(x-x_1) + \frac{h^2}{2} \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x-x_2)^2}{2} - \frac{13h}{36}(x-x_2) - \frac{7h^2}{36} \\ \varphi_4(x) &= \frac{(x-x_3)^2}{2} - \frac{13h}{36}(x-x_3) - \frac{h^2}{18} \\ \varphi_5(x) &= \frac{(x-x_4)^2}{2} - \frac{h}{2}(x-x_4) + \frac{h^2}{12} \\ &\dots\end{aligned}\quad (56)$$

Avem

$$\int_{x_0}^{x_n} |\varphi(x)| dx = \left(\frac{553\sqrt{553} + 313\sqrt{313} + 25614 - 5184\sqrt{3}}{34992} + \frac{n\sqrt{3}}{54} \right) h^3$$

și de aici rezultă pentru rest evaluarea

$$|R| \leq k M_2 h^3,$$

unde

$$k = \frac{553\sqrt{553} + 313\sqrt{313} + 25614 - 5184\sqrt{3}}{34992} + \frac{n\sqrt{3}}{54}$$

adică

$$k = 1,00528 \dots + \frac{n\sqrt{3}}{54}.$$

Primită la redacție la 6 aprilie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. G. COULMY, *Opérations sur les courbes expérimentales*. C.R. des Séances de l'Ac. des Sciences, Paris, 246, 1 799–1 800 (1958).
2. D. V. IONESCU, *Cîteva formule practice de cvadratură*. Comunicările Academiei R.P.R.
3. H. MINEUR, *Téchniques de calcul numérique*. Librairie Polytechnique Ch. — Béranger, 1952, p. 244.