

ИГРЫ ОБРАЗОВАННЫЕ С ПОМОЩЬЮ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ МАТРИЦЫ

А. Б. НЕМЕТ

Клуж

Цель настоящей заметки есть обобщение одной теоремы, доказанной одновременно Д. ГЕЙЛОМ, Х. У. КУНОМ, А. У. ТАКЕРОМ [1] С. ШЕРМАНОМ [2] М. ВУДБЕРИ, [3], касающейся редукции игровых матриц. Разложение матрицы выигрышей, использованное нами не так ограниченное как разложение использованное в цитированных работах. Дадим прямое доказательство нашей теоремы, и другое доказательство, в которой используем выше упомянутую теорему.

Пусть X евклидово пространство m -мерных векторов строки, Y евклидово пространство n -мерных векторов столбцов и пусть A матрица размерами $m \times n$. Пусть $a^1, \dots, a^r$ элементы из X , $b^1, \dots, b^s$ элементы из Y . Образует матрицу B размерами $r \times s$, элементы которой будут

$$b_{ij} = a^i A b^j, \quad i = 1, \dots, r; \quad j = 1, \dots, s.$$

Ставится вопрос: существует ли какое либо соотношение между игрой с матрицей A и игрой с матрицей B ? Цитированная теорема позволяет — в случае некоторых условий, поставленных над векторами a^i и b^j — редукцию игр с матрицей A к игре с матрицей B , т. е. решение игры с матрицей A с помощью игрой с матрицей B .

В дальнейшем дадим некоторые определения.

Определение 1. Называем разложение A_{ij} $i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s$ матрицы A в прямоугольных подматрицах невырожденным разложением, если выполняются условия:

- Матрицы A_{ij} $j = 1, \dots, s$ образованные с помощью тех же строк матрицы A ;
- Матрицы A_{ij} $i = 1, \dots, r$ образованные с помощью тех же столбцов матрицы A ;

в) Каждый элемент относится по меньшей мере одному из подматриц A_{ij} .

Если к этим условиям добавим ещё условия

г) Элементы из A могут относиться только к одному из матриц A_{ij} , разложение называется простым разложением.

Определение 2. Скажем, что x' (y') есть редукция стороного вектора x (столбцового вектора y), касающейся подматрицы A' $m \times n$ размерной матрицы A , если x' (y') состоит из компонентов вектора x (y) — в неизменном порядке — которые встречаются в матричном произведении xA (Ay) как множители элементов из A' .

ТЕОРЕМА. Если

а) векторы a^i $i=1, \dots, r$; b^j $j=1, \dots, s$ представляют стратегии для игрока I, относительно II в игре с матрицей A ;

б) редукция вектора a^i ($i=1, \dots, r$) является оптимальной стратегией для игрока I из игр с матрицами A_{ij} , $j=1, \dots, s$;

в) Редукция вектора b^j ($j=1, \dots, s$) является оптимальной стратегией для игрока II из игр с матрицами A_{ij} , $i=1, \dots, r$;

г) разложение A_{ij} $i=1, \dots, r$; $j=1, \dots, s$ матрицы A является невырожденной;

тогда цена игры с матрицей B равна цене игры с матрицей A , и если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ оптимальная стратегия для игрока I, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ оптимальная стратегия для игрока II из игры с матрицей B , тогда векторы

$$a = \alpha_1 a^1 + \dots + \alpha_r a^r$$

$$b = \beta_1 b^1 + \dots + \beta_s b^s$$

являются оптимальными стратегиями для игроков I и II из игры с матрицей A .

Замечание. Цитированная теорема получается, если условие невырожденности разбиения заменяется условием простоты разбиения.

Доказательство. 1 Пусть x и y стратегии для игроков I относительно II из игры с матрицей A . Разложим вектор x в сумму векторов

$$x = \xi^1 + \dots + \xi^r$$

следующим образом:

а) Пусть ξ^1 m -мерный вектор, поставленный из компонентов вектора x с индексами соответствующими индексам строки из A , которые принадлежат подматрицам A_{ij} , $j=1, \dots, s$, другие компоненты пусть равны нулю,

б) Пусть ξ^i m -мерный вектор, поставленный из компонентов вектора x с индексами, соответствующими индексам строки из A , которые принадлежат подматрицам A_{ij} $j=1, \dots, s$ и не принадлежат векторам ξ^l , $l < i$, другие компоненты пусть равны нулю.

Подобным же образом можно разложить вектор y в сумму векторов

$$y = \eta^1 + \dots + \eta^s.$$

Обозначим с m m -мерный вектор $m = (1, \dots, 1)$ и с n n -мерный вектор $n = (1, \dots, 1)$. Ясно, что если ξ^i имеет по меньшей мере один компонент, отличающийся от нуля, то редукция вектора

$$x^i = \frac{\xi^i}{(m, \xi^i)}$$

относительно подматрицы A_{ij} ($j=1, \dots, s$) является стратегией для игрока I в игре с этой матрицей. Если $\xi^i = 0$, положим $x^i = 0$.

Аналогичным образом можно построить векторы $y^1, \dots, y^s$ с помощью векторов $\eta^1, \dots, \eta^s$. Имеем

$$x = \sum_1^r (m, \xi^i) x^i \text{ и } y = \sum_1^s (n, \eta^j) y^j.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ оптимальная стратегия для игрока I, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ оптимальная стратегия игрока II из игры с матрицей B . Образуют векторы

$$a = \alpha_1 a^1 + \dots + \alpha_r a^r,$$

$$b = \beta_1 b^1 + \dots + \beta_s b^s,$$

где векторы a^i $i=1, \dots, r$; b^j $j=1, \dots, s$ обладают перечисленным в теореме условием. Имеем

$$xA b = \sum_1^r \sum_1^s (m, \xi^i) x^i A b^j \beta_j = \sum_1^r \sum_1^s (m, \xi^i) x^i A_{ij} b^j \beta_j.$$

Если $(m, \xi^i) \neq 0$, тогда

$$x^i A_{ij} b^j \leq a^i A_{ij} b^j,$$

1) В правой части равенства фигурируют векторы x^i и b^j , в левой части их редукция относительно к A_{ij} .

откуда следует

$$\begin{aligned} x A b &= \sum_1^r \sum_1^s (m, \xi^i) x^i A_{ij} b^j \beta_j \leq \sum_1^r \sum_1^s (m, \xi^i) a^i A_{ij} b^j \beta_j = \\ &= \sum_1^r \sum_1^s (m, \xi^i) a^i A b^j \beta_j. \end{aligned}$$

Так как $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ оптимальная стратегия для игрока II из игры с матрицей B , следует, что

$$\sum_1^r \sum_1^s (m, \xi^i) a^i A b^j \beta_j \leq v_B.$$

Предположив теперь, что x оптимальная стратегия для игрока I из игры с матрицей A , получим неравенство

$$x A b \geq v_A,$$

и в заключении

$$v_A \leq x A b \leq v_B. (*)$$

Поступая подобным образом, используя разложение вектора y и предположив, что y оптимальная стратегия для игрока II в игре с матрицей A , получим

$$v_B \leq a A y \leq v_A, (**)$$

так что $v_A = v_B$. Правое неравенство из (*) и левое неравенство из (**) вместе с равенством $v_A = v_B$ доказывают остальную часть теоремы.

Доказательство 2. Поставим в соответствие к каждой строке и к каждому столбцу матрицы A мощность, которая в случае строки i равна числу векторов a^i , для которых $a^i_j \neq 0$, в случае столбца j равна числу векторов b^j , для которых $b^j_i \neq 0$. Формируем матрицу M с помощью строк из A , взяв каждую строку столько раз, сколько раз показывают её мощность. Пусть дальше A' матрица, полученная из матрицы M , взяв каждый столбец из M столько раз, сколько раз показывает его мощность. Хорошо известно и нетрудно проверить, что значение игры с матрицей A' равно значению игры с матрицей A . Имея оптимальную стратегию для одного игрока из игры с матрицей A' , можно получить оптимальную стратегию для того же игрока из игры с матрицей A , суммируя веса соответствующих такой же строке или такому же столбцу матрицы A .

Заметим, что матрица A' позволяет простое разложение A_{ij} такое, что матрица A'_{ij} тождественна матрицей A_{ij} , так что редукция векторов a^i $i = 1, \dots, r$; b^j $j = 1, \dots, s$ является оптимальной стратегией для игроков I, соответственно II из игры с соответственными матрицами A'_{ij} . Используя теорему, доказанную в статьях [1] [2] и [3] (которая легко получается с помощью замечания), в силу только что сделанной оговорки, следует наша теорема.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gale D., W. H. Kuhn, A. W. Tucker, *Reductions of game matrices*. Contributions to the theory of games I, Princeton, 81—87 (1950).
- [2] Sherman S., *Games and sub-games* Proc. Amer. Math. Soc., 2, 2, 186—187 (1951).
- [3] Woodbury M., *On game whose matrices are the sums of the matrices of other games*. Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 56, 122, (1950).

Поступило в 19. XI. 1963