

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

EXTRAS

8

TOMUL 17
1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

ASUPRA PROBLEMEI BILOCALE PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE

DE

DUMITRU RIPIANU
(Cluj)

Se studiază ecuația diferențială

$$(1) \quad y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

pentru care se determină un interval deschis de lungime maximă $(0, \lambda)$, în care derivata de ordinul p a soluției ecuației (1), $y = \varphi_{a,L}(x)$, care satisface la condițiile $\varphi_{a,L}^{(i)}(0) = l_i$, unde $i = 0, 1, \dots, n-1$, iar L este vectorul de componente $(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ să fie diferită de zero pentru toate funcțiile-vector $a(x)$ de componente $(a_1(x), \dots, a_n(x))$ dintr-o anumită clasă $\mathcal{A}$. Metoda întrebuintată este principiul maximului al lui Pontriaghin.

1. Această notă tratează următoarea problemă:
Se consideră ecuația diferențială liniară de ordinul n

$$(1) \quad y^n(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x)y^{(n-i)}(x) = 0$$

în ipoteza următoare:

- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Coeficienții } a_i(x) \text{ sînt funcții continue și cu derivate de or-} \\ \text{dinul 1 mărginite în valoare absolută de un număr fix în intervalul} \\ [0, \infty) \text{ și atunci cînd } x \text{ descrie acest interval, punctul } M \text{ de coordonate} \\ \beta_i = a_i(x) \text{ (} i = \overline{1, n} \text{) descrie un anumit domeniu mărginit și închis } D \\ \text{din spațiul euclidian cu } n \text{ dimensiuni raportat la axele } O \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n. \end{array} \right.$

Se va presupune că frontiera S a domeniului D are în fiecare punct al ei un plan tangent unic, adică $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \beta_i} \right)^2 > 0$ în orice punct de pe S ,

unde $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$ ¹⁾ este ecuația frontierei. Domeniul D fiind închis, își cuprinde frontiera.

Se va însemna pentru comoditate cu $a(x)$ funcția-vector de componente $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$, cu E_a ecuația (1) și cu $R[f(x)]$ sau $R[f]$ cea mai mică rădăcină pozitivă a funcției $f(x)$, presupusă definită și continuă în intervalul $[0, \infty)$; dacă $f(x) \neq 0$ pentru orice $x > 0$, se va scrie prin convenție $R[f] = \infty$.

Se va spune că funcția-vector $a(x)$ are proprietatea (2) dacă funcțiile $a_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) au această proprietate, și se va însemna cu $\mathcal{A}$ mulțimea funcțiilor $a(x)$ care au această proprietate.

(3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se va însemna cu } L \text{ o grupă de } n \text{ numere date } l_i (i = \overline{0, n-1}) \\ \text{și cu } \varphi_{a,L}(x) \text{ integrala ecuației } E_a \text{ pentru care} \\ \varphi_{a,L}^{(i)}(0) = l_i (i = \overline{0, n-1}). \end{array} \right.$

Se va fixa un număr p din șirul $0, 1, \dots, n-2$ și se va însemna cu $(0, \lambda_{p,D,L})$ intervalul de lungime maximă în care $\varphi_{a,L}^{(p)}(x) \neq 0$, oricare ar fi funcția-vector $a(x)$ din mulțimea $\mathcal{A}$.

Problema constă în determinarea numărului $\lambda_{p,D,L} > 0$ (care se va însemna pentru comoditate câte o dată cu λ sau λ_p).

În paragraful 2 al acestei note se stabilește un sistem de ecuații diferențiale (în general neliniare) și n condiții inițiale pe care le verifică funcția-vector minimizantă (teorema 1). Se înțelege prin acest termen o funcție-vector $\alpha^{(p)}(x) \in \mathcal{A}$ care verifică condițiile (2) și pentru care $R[\varphi_{\alpha^{(p)},L}^{(p)}(x)] = \lambda_{p,D,L}$. Această funcție există. Dacă se cunoaște integrala — respectiv integralele — sistemului amintit, care satisface — respectiv satisfac — condițiile inițiale amintite, atunci avem imediat funcția $\varphi_{\alpha^{(p)},L}(x)$, respectiv această funcție se află printre anumite expresii, obținute imediat cu ajutorul acelor integrale. Nu putem preciza care dintre aceste expresii este funcția $\varphi_{\alpha^{(p)},L}(x)$, însă dacă numărul integralelor amintite este finit și aceste integrale se cunosc, putem avea o delimitare inferioară a numărului λ (observațiile 1–4). În paragraful 3 se dă un exemplu simplu de determinare a numărului într-un caz particular (teorema 2). În ultimul paragraf al notei se stabilește o anumită proprietate de care se bucură funcția $\alpha^{(p)}(x)$.

Ne vom servi, în tratarea problemei, de un rezultat stabilit de Lasota și Opial [1], care au determinat, între altele, funcția $\varphi_{\alpha^{(p)},L}(x)$ în cazul când în (3) $L = (0, 0, \dots, 0, 1)$, $p = 0$ și domeniul D este definit de relațiile $|\beta_i| \leq A_i$ ($i = \overline{1, n}$), unde A_i sînt numere date, iar coeficienții ecuației (1) nu sînt neapărat funcții continue, ci funcții măsurabile și mărginite. Rezultatul citat se obține cu ajutorul principiului maximului al lui Pontriaghin ([2], teorema 3, pag. 59).

¹⁾ și că $F_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ sînt funcții continue în raport cu ansamblul variabilelor $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ pe S ($i = \overline{1, n}$).

2. Se va însemna prin $H(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)}$ expresia obținută înlocuind în funcția $H(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ variabilele β_s prin funcțiile $\alpha_s^{(p)}(x)$ ($s = \overline{1, n}$) și se va prezenta.

TEOREMA 1. Fie $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$ ecuația frontierei S a domeniului D . Funcția-vector minimizantă $\alpha^{(p)}(x) = (\alpha_1^{(p)}(x), \alpha_2^{(p)}(x), \dots, \alpha_n^{(p)}(x))$ verifică pentru orice $x \in [0, \lambda]$ următorul sistem de ecuații diferențiale, care nu depind de numărul p :

$$\begin{aligned} & F(\alpha_1^{(p)}(x), \alpha_2^{(p)}(x), \dots, \alpha_n^{(p)}(x)) = 0 \quad (a) \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} \right) + \\ + \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F_{\beta_n}^2(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} + \\ + \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(p)}(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} = 0 \quad (b) \\ \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} = \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} \right] + \\ + \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F_{\beta_n}^2(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} \quad (i = \overline{2, n-1}) \quad (c) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4)$$

și condițiile inițiale

$$\begin{aligned} (5) \quad & \frac{l_{n-1}}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(0)}} = \frac{l_{n-2}}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(0)}} = \\ & = \dots = \frac{l_{n-i}}{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(0)}} = \dots = \frac{l_0}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(0)}} \end{aligned}$$

Demonstrație. Se va scrie pentru comoditate $\alpha(x)$ în loc de $\alpha^{(p)}(x)$. Lasota și Opial au demonstrat în [1] că în cazul $p = 0$, $L_1(0, 0, \dots, 0, 1)$ în (3) și dacă $a_i(x)$ sînt funcții măsurabile și mărginite în intervalul $[0, \infty)$ iar D este dat de $|\beta_i| \leq A_i$ ($i = \overline{1, n}$), există o funcție-vector $\alpha^{(0)}(x)$ pentru care $R[\varphi_{\alpha^{(0)},L}(x)] = \lambda_{0,D,L}$. Demonstrația este imediată în cazul coeficienților $a_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$), cu proprietatea (2), ai unei valori oarecare din șirul $0, n-2$ al lui p din (3), al unui domeniu D finit oarecare și al unei grupe oarecare de numere L din (3); demonstrația nu va mai fi deci prezentată. Așadar există o funcție $\alpha^{(p)}(x)$ din clasa $C[0, \infty)$ pentru care $R[\varphi_{\alpha^{(p)},L}(x)] = \lambda_{p,D,L}$. Se vede imediat că punctul de coordonate $\alpha_i^{(p)}(x), \alpha_2^{(p)}(x), \dots, \alpha_n^{(p)}(x)$ este în D sau pe (S) pentru orice $x \geq 0$.

Se va însemna

$$(6) \quad z_i = z_i(x) = \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Se va înțelege prin notația $F(z_1, z_2, \dots, z_n)|_\lambda$ expresia obținută prin înlocuirea variabilelor z_i din funcția $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ cu $z_i(\lambda)$ ($i = \overline{1, n}$) din (6). Se va mai însemna cu $F_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ ($i = \overline{1, n-r_1}$) ecuațiile varietății r_1 -dimensionale situată în spațiul cu n dimensiuni raportat la axele $Oz_1, Oz_2, \dots, Oz_n$ pe care este transportat punctul de coordonate $z_1, z_2, \dots, z_n$ ([2], teorema 3, pag. 59).

În aceste condiții, Lasota și Opial au arătat în [1] că există n funcții $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$), neidentice nule toate și continue în intervalul $[0, \infty)$, care se bucură de următoarele proprietăți:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Funcția liniară de variabilele independente } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n: \\ L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = -\varphi_1(x) \sum_{i=1}^n z_i(x) \beta_i + \sum_{i=2}^n z_{i-1}(x) \varphi_i(x) \quad (a) \\ \text{își atinge maximum în domeniul } D \text{ pentru } \beta_i = \alpha_i(x) \quad (i = \overline{1, n}). \\ \text{Această proprietate are loc pentru orice } x \in [0, \lambda] \text{ ca de altfel și} \\ \text{celelalte trei proprietăți următoare:} \\ 2. \varphi'_i(x) = \varphi_1(x) \alpha_i(x) - \varphi_{i+1}(x) \quad (i = \overline{1, n}; \varphi_{n+1}(x) \equiv 0) \quad (b) \\ 3. \frac{1}{\varphi_1(\lambda)} \frac{\partial F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_1} \Big|_\lambda = \frac{1}{\varphi_2(\lambda)} \frac{\partial F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_2} \Big|_\lambda = \\ = \dots = \frac{1}{\varphi_n(\lambda)} \frac{\partial F_i(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_n} \Big|_\lambda \quad (i = \overline{1, n-r_1}) \quad (c) \\ 4. \text{ Expresia } L(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)) \text{ nu depinde de } x \text{ cînd} \\ x \in [0, \lambda] \text{ și are o valoare nenegativă.} \end{array} \right.$$

Dacă $\varphi_1(x) \neq 0$, hiperplanul Δ_x de ecuație $\sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) (\beta_i - \alpha_i(x)) = 0$

din spațiul cu n dimensiuni raportat la axele $O\beta_1, O\beta_2, \dots, O\beta_n$ coincide cu planul tangent în punctul de coordonate $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x))$ la hipersuprafața S de ecuație $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$ — frontiera domeniului D , pentru că în caz contrar hiperplanul pătrunde neapărat în interiorul domeniului D în care determină o regiune unde

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) \beta_i < \sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) \alpha_i(x) \text{ și alta unde } \sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) \beta_i > \sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) \alpha_i(x)$$

ceea ce înseamnă că funcția $L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ din (7) (a) nu-și atinge maximum în D pentru $\beta_i = \alpha_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$), și contrazice proprietatea 1 din (7). Dat fiind că funcția liniară din (7) (a) își atinge maximum în D pentru $\beta_i = \alpha_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$), rezultă că punctul de coordonate $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ se află pe frontiera S , pentru orice $x \in [0, \lambda]$.

Hiperplanul Δ_x coincidînd cu planul tangent la S în punctul $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$, avem

$$(8) \quad \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-2)}(x)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}} = \dots = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}} = \dots = \frac{\varphi'_{\alpha, L}(x)}{F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}} = \frac{\varphi_{\alpha, L}(x)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}}$$

de unde, ținînd seamă de identitatea

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} \right) = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n+1-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} - \frac{\varphi'_{\alpha, L}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} \quad (i = \overline{2, n-1}),$$

rezultă

$$(9) \quad \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}} = \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}} \right] + \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{F_{\beta_n}^2(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \quad (i = \overline{2, n-1}),$$

adică relația (4) (c).

Însă $\varphi_{\alpha, L}(x)$ este o integrală a ecuației E_α , adică

$$\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} = 0$$

ceea ce se scrie cu ajutorul lui (9) (cu $i = 1$) și al lui (8):

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}} \right] + \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{F_{\beta_n}^2(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}} = 0$$

adică relația (4) (b). Punctul $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ este pe S , deci $F(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)) = 0$ adică relația (4) (a).

Relațiile (8) au fost stabilite în ipoteza că $\varphi_1(x) \neq 0$ însă ele au loc și cînd $\varphi_1(x) = 0$, observînd că, după cum se va dovedi la punctul 4 (după relația (26)), $\varphi_1(x)$ are în intervalul $[0, \lambda]$ rădăcina $x = \lambda$ și dacă mai are și altele, acestea sînt în număr finit. Se va însemna $H_i(x) = \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} - \varphi_{\alpha, L}(x) F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}$ ($i = \overline{1, n-1}$). Funcțiile $H_i(x)$ sînt funcții continue în intervalul $[0, \lambda]$ și (8)

spune că ele se anulează în tot acest interval, cu excepția eventuală a punctelor în care $\varphi_1(x) = 0$, pentru că dacă de exemplu $F'_{\beta_i}(\beta_1, \dots, \beta_n) |_{\beta_s = \alpha_s(x)} = 0$, atunci $\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) = 0$, ca urmare a faptului că normalele la planul tangent în $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ la (S) și la Δ_α au aceiași cosinusi directori. Aceste puncte fiind în număr finit, urmează că $H_i(x)$ se anulează și în aceste puncte, adică relațiile (8) au loc în tot intervalul $[0, \lambda]$. Cu aceasta, teorema este demonstrată.

Observații. 1. Din teorema 1 rezultă că sistemul (5) de n ecuații în n necunoscute $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$:

$$(10) \quad \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} = \frac{l_{n-i}}{l_0} \quad (i = \overline{1, n-1}); F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$$

are printre soluțiile sale soluția $\beta_i = \alpha_i^{(0)}(0) \quad (i = \overline{1, n})$, iar sistemul (4) de n ecuații diferențiale în n funcții necunoscute $\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)) = 0 \\ & \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))} \right] + \\ & + \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))} + \\ & + \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \dots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \dots, \beta_n(x))} = 0 \end{aligned} \right. \quad (a) \quad (b)$$

$$\frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))} = \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))} \right] +$$

$$+ \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))} \quad (i =$$

$$= 2, n-1) \quad (c)$$

are printre integralele sale integrala $\beta_i(x) = \alpha_i^{(0)}(x) \quad (i = \overline{1, n})^2$.

2. Dacă se cunoaște funcția-vector minimizantă $\alpha^{(0)}(x)$, atunci (8) (cu $i = n-1$) dă

$$(12) \quad \varphi_{\alpha^{(0)}, L}(x) = \text{const.} \exp. H(x) = \int_0^x \frac{F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(\sigma)} d\sigma.$$

3. Dacă toate integralele sistemului (11) sînt cuprinse în formulele $\beta_i(x) = f_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (i = \overline{1, n})$, unde $C_i \quad (i = \overline{1, n})$ sînt constante

²⁾ Pentru orice $p \in (0, 1, \dots, n-2)$.

arbitrare, atunci valorile $C_i = \Gamma_i \quad (i = \overline{1, n})$ care dau integrala $\beta_i(x) = \alpha_i^{(0)}(x) \quad (i = \overline{1, n})$ se află printre soluțiile sistemului de n ecuații în n necunoscute $C_1, C_2, \dots, C_n$: $f_i(0, C_1, C_2, \dots, C_n) = \beta_i \quad (i = \overline{1, n})$, unde $\beta_i \quad (i = \overline{1, n})$ este una din soluțiile sistemului (10).

4. Dacă există un număr finit l de integrale ale sistemului (11) care să satisfacă condițiile (10), integrale care se vor însemna cu $\beta_i^{(k)}(x) = f_i^{(k)}(x) \quad (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, l})$, atunci $\lambda_{p, D, L} \geq \min_{k=1, 2, \dots, l} R \{ [\exp. H^{(k)}(x)]^{(p)} \}$.

3. Se va prezenta, cu titlu de exemplu, următoarea aplicație simplă a teoremei 1.

TEOREMA 2. Se consideră ecuația $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$, unde $a_1(x), a_2(x)$ sînt funcții continue, cu derivate de ordinul 1 mărginite în valoare absolută de un număr fix în intervalul $[0, \infty)$ și verifică în acest interval relația $a_1^2(x) + a_2^2(x) \leq R^2$, cu $R > 0$ dat. În aceste condiții, și oricare ar fi funcțiile $a_1(x), a_2(x)$ care verifică condițiile de mai sus, cea mai mică rădăcină pozitivă a integralei $\varphi_{a, L}(x)$ a ecuației considerate care verifică condițiile $\varphi_{a, L}(0) = l_0, \varphi'_{a, L}(0) \equiv l_1$, cu l_0 și l_1 date, este cel puțin egală cu numărul λ definit în felul următor:

$$\text{Dacă } q = -\frac{l_1}{l_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2} \leq A = \frac{1}{2} (R + \sqrt{4 + R^2} + \sqrt{2R(R + \sqrt{4 + R^2})}),$$

atunci

$$\lambda = \bar{\lambda} = \bar{\Lambda}(q, R) = \sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \lg \frac{A(A + q)}{1 + Aq} +$$

$$+ \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \left(\pi - 2 \arctg \frac{q - \frac{1}{2}(-R + \sqrt{4 + R^2})}{\sqrt{\frac{R}{2}(-R + \sqrt{4 + R^2})}} \right)^{3)}.$$

Dacă $q > A$, atunci sau $\lambda = \bar{\lambda}$ sau

$$\lambda = \bar{\lambda} = \bar{\Lambda}(q, R) = \sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \lg \frac{Aq - 1}{A(q - A)} +$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \arctg \frac{\sqrt{2R(R + \sqrt{4 + R^2})}}{2 + q(R + \sqrt{4 + R^2})}.$$

Demonstrație. În cazul nostru, în teorema 1, $n = 2$, deci $p = 0$ și domeniul D este mărginit de cercul de ecuație $F(\beta_1, \beta_2) = \beta_1^2 + \beta_2^2 - R^2 = 0$.

³⁾ Pentru $\arctg$ se ia determinarea principală, cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$.

Se va lua deci, conform lui (4) (a), $\alpha_1(x) = R \cos \Delta(x)$, $\alpha_2(x) = R \sin \Delta(x)$, iar relația (4)(b) se scrie

$$(13) \quad \frac{d\delta}{dx} = \cos^2 \delta + R \sin \delta \quad (\delta = \Delta(x))$$

pe cînd relația (12) dă $H(x) = \mathcal{H}(\delta) = \int_0^x \frac{\cos \Delta(\sigma)}{\sin \Delta(\sigma)} d\sigma$ (dat fiind că (13) dă

$$x = X(\delta)). \text{ Se deduce de aici și din (13) } H'(x) = \frac{\cos \Delta(x)}{\sin \Delta(x)} = \mathcal{H}'(\delta) \cdot (\cos^2 \delta + R \sin \delta)|_{\delta=\Delta(x)}, \text{ adică}$$

$$(14) \quad H(x) = \mathcal{H}(\delta) = \int \frac{\cotg \delta}{R \sin \delta + \cos^2 \delta} d\delta = \text{const.} + \lg \left[\sin \delta \left(-\sin \delta + \frac{-R + \sqrt{4+R^2}}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{-R + \sqrt{4+R^2}}{2} \right]^{-\frac{R + \sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \left(-\sin \delta + \frac{R + \sqrt{4+R^2}}{2} \right)^{-\frac{-R + \sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}}$$

în care caz (12) spune că

$$(15) \quad \varphi_{\alpha, L}(x) = \text{const.} \sin \delta \left(-\sin \delta + \frac{-R + \sqrt{4+R^2}}{2} \right)^{-\frac{R + \sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \cdot \left(-\sin \delta + \frac{R + \sqrt{4+R^2}}{2} \right)^{-\frac{-R + \sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}}$$

nu se anulează decît cînd $\delta = k\pi$ (k întreg). De altfel, această afirmație rezultă și din (8), care se scrie

$$(16) \quad \frac{\varphi'_{\alpha, L}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{\cos \Delta(x)}{\sin \Delta(x)}$$

însă am crezut că prezintă interes forma funcției $\varphi_{\alpha, L}(x)$ din (15).

Or, (13) dă

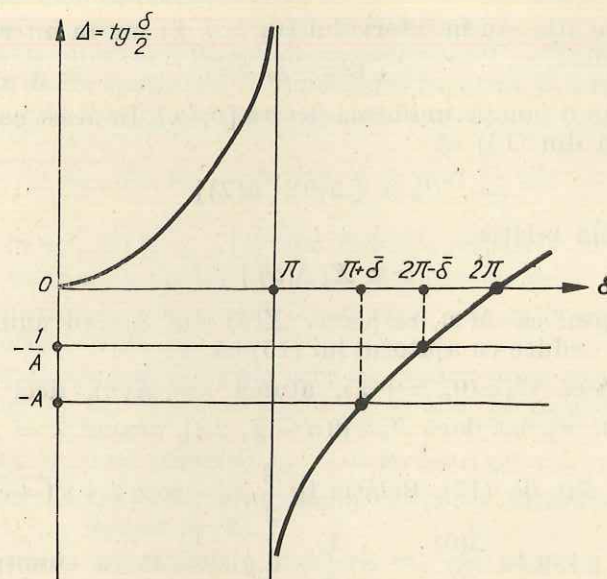
$$(17) \quad x = X(\delta) = C + \sqrt{\frac{R + \sqrt{4+R^2}}{2R(4+R^2)}} \lg \left| \frac{\frac{1}{A} + \tg \frac{\delta}{2}}{A + \tg \frac{\delta}{2}} \right| + \\ + 2 \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4+R^2}}{2R(4+R^2)}} \text{arctg} \frac{\tg \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}(-R + \sqrt{4+R^2})}{\sqrt{\frac{R}{2}(-R + \sqrt{4+R^2})}}$$

cu A definit în enunțul teoremei. Întrucît, cum se va vedea în (22), inter-

valul de variație al lui δ nu cuprinde pe π ca punct interior, luînd pentru arctg din (17) determinarea principală, $X(\delta)$ este continuă în punctul $\delta = \pi$.

În figură $\bar{\delta}$ este definit de relația

$$\sin \bar{\delta} = \frac{1}{2}(-R + \sqrt{4+R^2}), 0 < \bar{\delta} < \frac{\pi}{2}.$$



Figură

$$(18) \quad \begin{cases} \text{Se deduce deci pe figură că în (17) se va lua} \\ \lg \frac{\frac{1}{A} + \tg \frac{\delta}{2}}{A + \tg \frac{\delta}{2}} \text{ pentru } \delta \in [0, \pi + \bar{\delta}) \text{ (sau } \delta \in (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi]) \text{ și } \lg \left(-\frac{\frac{1}{A} + \tg \frac{\delta}{2}}{A + \tg \frac{\delta}{2}} \right) \\ \text{pentru } \delta \in (\pi + \bar{\delta}, 2\pi - \bar{\delta}). \end{cases}$$

Întrucît funcțiile $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ sînt, cum s-a mai amintit în § 2, continue, iar $\delta = \Delta(x) \in [0, 2\pi]$, rezultă că $\Delta(x)$ este o funcție continuă în intervalul $[0, \lambda]$, așa că și funcția inversă $X(\delta)$ este continuă în intervalul J_δ parcurs de $\Delta(x)$ cînd x parcurge intervalul $[0, \lambda]$ și deci finită. Or, $X(\delta)$ din (17) devine infinit pentru $\delta = \pi + \bar{\delta}$ sau $\delta = 2\pi - \bar{\delta}$, așa

Tabelul 1

δ	0	$\pi + \bar{\delta}$	$2\pi - \bar{\delta}$	2π
$X'(\delta)$		+	-	+
$X(\delta)$	$X(0)$	$\nearrow +\infty$	$\searrow -\infty$	$\nearrow X(2\pi)$

că intervalul J_δ nu cuprinde valorile $\pi + \bar{\delta}$ sau $2\pi - \bar{\delta}$. Acest interval cuprinde neapărat una din valorile $0, \pi$ sau 2π , deoarece în caz contrar (15) dă $\varphi_{\alpha, L}(x) \neq 0$ pentru orice $x > 0$, deci conform convenției de la punctul 1, $\lambda_{0, p, L} = \infty$, rezultat contrazis, de exemplu, de ecuația $y'' + Ry = 0$, a cărei funcție-vector $a(x) = (0, R)$ verifică evident condițiile (2). Rezultă de aici că:

$$(19) \quad \begin{cases} J_\delta \text{ se află sau în intervalul } [0, \pi + \bar{\delta}) \text{ sau în intervalul} \\ (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi] \end{cases}$$

Așa că $\Delta(x)$ este o funcție uniformă de $x \in [0, \lambda]$. În acest caz se deduce din tabelul 1 și din (13) că

$$(20) \quad J_\delta = [\Delta(0), \Delta(\lambda)]$$

iar de aici și din relația

$$(21) \quad x \equiv X(\Delta(x))$$

(dedusă din faptul că $\Delta(x)$, respectiv $X(\delta)$ sînt funcții uniforme de x , respectiv δ), se deduce cu ajutorul lui (15) că

$$(22) \quad \begin{cases} \text{dacă } J_\delta \in (0, \pi + \bar{\delta}), \text{ atunci } \lambda = X(\pi), \text{ deci} \\ J_\delta \in (0, \pi], \text{ iar dacă } J_\delta \in (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi], \text{ atunci } \lambda = X(2\pi) \end{cases}$$

unde $X(\delta)$ este dat de (17). Relația $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = -\cotg \delta \pm \sqrt{1 + \cotg^2 \delta}$ și (16)

$$\text{dau } \operatorname{tg} \frac{\Delta(0)}{2} = q \text{ sau } \operatorname{tg} \frac{\Delta(0)}{2} = -\frac{1}{q}, \text{ cu } q \text{ definit în enunțul teoremei.}$$

Or, se deduce pe figură, că nu putem avea $\operatorname{tg} \frac{\Delta(0)}{2} \leq -\frac{1}{A}$, pentru că ar rezulta $\Delta(0) \in [\pi, 2\pi - \bar{\delta}]$, adică conform lui (20) și (22) se contrazice relația (19). Așadar dacă $q \leq A$, nu se poate lua decît $\operatorname{tg} \frac{\Delta(0)}{2} = q$, deci

$\Delta(0) \in (0, \pi)$, $J_\delta \subset (0, \pi]$, în care caz (22) și relația $X(\delta) = F_1(\delta) - F_1(\Delta(0))$ (dedusă din (21) și (17)) dau pentru λ valoarea λ din enunțul teoremei. Spre a obține pe $X(\pi)$ se ține seama că întrucît $\delta \in (0, \pi]$, avem $\lim_{\delta \rightarrow \pi} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = +\infty$. Dacă $q > A$, atunci putem avea fie $\Delta(0) \in (0, \pi)$, deci aceeași valoare $\bar{\lambda}$ pentru λ , fie $\Delta(0) \in (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi)$, în care caz $J_\delta \subset (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi]$ și (22) și (23) dau $\lambda = \bar{\lambda}$, cu $\bar{\lambda}$ din enunțul teoremei, care este astfel demonstrată.

Observații. 1. Dacă $l_0 = 0$ (deci $l_1 \neq 0$), atunci $q = 0$ și teorema dă

$$\lambda = \bar{\Lambda}(0, R) = 2 \sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \lg A + \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R}} \right).$$

2. Dacă $\frac{l_1}{l_0} \geq 0$, avem $0 \leq q \leq 1 < A$, deci iarăși $\lambda = \bar{\Lambda}(q, R)$.

3. Se va prezenta în încheiere o proprietate a funcției minimizante $\alpha^{(q)}(x)$. Spre a evita scrierea unor relații destul de lungi în enunțul teoremei, prezentate mai jos, ne vom referi prin numerotație la aceste relații, prezentate în cursul demonstrației.

Se va spune că o funcție-vector $a(x) = a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ definită în intervalul $[0, \infty)$ are proprietatea $P_{\lambda, D}$ (unde $\lambda > 0$) într-un domeniu D din spațiul cu n dimensiuni raportat la axele $O\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$, dacă funcția liniară de variabile independente

$$(24) \quad L_{a, x}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = -\varphi_{a, 1}(x) \sum_{i=1}^n \varphi_{a, L}^{(n-i)}(x) \beta_i$$

— în care $\varphi_{a, 1}(x)$ și $\varphi_{a, L}(x)$ sînt definite respectiv în (36) (unde se înlocuiește funcția-vector $\alpha^{(q)}(x)$ cu funcția-vector $a(x)$) și (3) — își atinge maximum în domeniul D pentru $\beta_i = a_i(x)$ ($i = 1, n$) și aceasta pentru orice $x \in [0, \lambda]$.

Evident că această definiție cere ca pentru orice $x \in [0, \lambda]$ punctul de coordonate $(a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$ să se afle pe frontiera S a domeniului D .

TEOREMA 3. Dacă rădăcina $\lambda_{p, D, L}$ a derivatei $\varphi_x^{(q) \otimes, L}(x)$ este o rădăcină simplă, atunci funcția-vector minimizantă $\alpha^{(q)}(x)$ se bucură de proprietatea $P_{\lambda_{p, D, L}, D}$, cu $\lambda_{p, D, L}$ definit în (3).

Demonstrație. Primele două relații (7) (a) asigură existența lui $\varphi_1^{(2)}(x)$ și $\varphi_2^{(2)}(x)$; aceasta și a treia relație (7) (a) asigură existența lui $\varphi_1^{(3)}(x)$ și $\varphi_2^{(3)}(x)$. În general, primele h relații (7) (a) asigură existența lui $\varphi_1^{(h)}(x)$ și $\varphi_2^{(h-1)}(x)$; deci, cele n relații (7) (a) asigură existența lui $\varphi_1^{(n)}(x)$ în intervalul $[0, \lambda]$. Avem⁴⁾

$$(25) \quad \varphi_1^{(q)}(x) = (-1)^q \varphi_{q+1}(x) = \sum_{i=0}^{q-1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q-i} (-1)^s C_{q-s}^i \alpha_s^{(q-i-s)}(x), (q = \overline{2, n})$$

cu condiția de a înlocui cazul $i = 0, s = q$, expresia C_0^0 cu 1. Această relație se dovedește imediat, dacă se presupune că are loc pentru $q = q_1$; în acest caz, se deduce din (7) (b) în care se face

$$\begin{aligned} j = q_1 + 1 : -\varphi_1^{(q+1)}(x) &= \sum_{i=1}^{q_1-1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q_1-i} (-1)^s C_{q_1+1-s}^i \alpha_s^{(q_1+1-i-s)}(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^{q_1-1} \varphi_1^{(i)}(x) (-1)^{q_1+1-i} \alpha_{q_1+1-i}(x) - \varphi_1^{(q_1)}(x) \alpha_1(x) + \varphi_1(x) \sum_{s=1}^{q_1} (-1)^s \alpha_s^{(q_1+1-s)}(x) + \\ &+ (-1)^{q_1+1} (\varphi_1(x) \alpha_{q_1+1}(x) - \varphi_{q_1+2}(x)) = (-1)^{q_1+2} \varphi_{q_1+2}(x) + \\ &+ \sum_{i=0}^{q_1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q_1+1-i} (-1)^s C_{q_1+1-s}^i \alpha_s^{(q_1+1-i-s)}(x), \end{aligned}$$

⁴⁾ Se scrie și aici, pentru comoditate, $\alpha(x)$ în loc de $\alpha^{(q)}(x)$.

adică relația (25) cu $q=q_1+1$. Or, dacă se derivează termenii relației (7) (b) în care se ia $i=1$, se obține relația (25) în care $q=2$, așa că această relație este dovedită. Dacă se face $q=n$, se deduce că $\varphi_1(x)$ verifică ecuația diferențială

$$(26) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} b_{\alpha, n, i}(x) y^{(i)}(x) + y^{(n)}(x) = 0, \\ b_{\alpha, q, i}(x) = \sum_{s=1}^{q-i} (-1)^s C_{q-s}^i \alpha_s^{(q-i-s)}(x), \quad 1 \leq q \leq n; \quad 0 \leq i \leq q-1. \end{cases}$$

De aici rezultă, de altfel, că $\varphi_i(x)$ are în $[0, \lambda]$ cel mult un număr finit de zerouri, pentru că în caz contrar ar exista cel puțin un punct de îngrămădire al acestora. Dacă r este unul din aceste puncte, datorit teoremei lui Rolle, el este un punct de îngrămădire și pentru zerourile lui $\varphi_1^{(s)}(x)$ ($s=1, n-1$). Cum $\varphi_1^{(s)}(x)$ sînt funcții continue și definite în punctul $x=r$, ar urma $\varphi_1^{(s)}(r) = 0$ ($s=0, n-1$), adică $\varphi_1(x) \equiv 0$, în care caz (7) (b) dă $\varphi_s(x) \equiv 0$ ($s=1, n$) în $[0, \lambda]$, împotriva faptului că $\varphi(x) \not\equiv 0$. Să stabilim condițiile „inițiale” pe care le satisface integrala $\varphi_1(x)$ a ecuației (26). În cazul problemei noastre, relațiile $F_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ ($i=1, n-n_s$), amintite după relația (6) se reduc la relația $z_{n-p}(\lambda_p, p, L) = 0$, în care caz (7) (c) dă

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi_i(\lambda_p) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-p-1, n-p+1, n-p+2, \dots, n) \quad (p \geq 1) \\ \varphi_i(\lambda_0) = 0 \quad (i=1, n-1) \quad (p=0). \end{cases}$$

Se va observa că întrucît $p \leq n-2$, în (27) relația $\varphi_1(\lambda_p) = 0$ figurează neapărat. Or, (25) se scrie

$$(28) \quad \varphi_1^{(q)}(x) = (-1)^q \varphi_{q+1}(x) - \sum_{i=0}^{q-1} b_{\alpha, q, i}(x) \varphi_1^{(i)}(x)$$

cu $b_{\alpha, q, i}(x)$ date de (26), ceea ce împreună cu (27) dă

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(i)}(\lambda_p) &= 0 \quad (i=0, n-2-p); \quad \varphi_1^{(n-p-1)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1} \varphi_{n-p}(\lambda_p) \\ \varphi_1^{(n-p)}(\lambda_p) &= (-1)^{n-p} b_{\alpha, n-p, n-p-1}(\lambda_p) \varphi_{n-p}(\lambda_p); \end{aligned}$$

spre a scrie restul condițiilor inițiale, se va însemna

$$\begin{aligned} G_{\alpha, s, \sigma}(x) &= \sum_{(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-1})_{\sigma}} b_{\alpha, n-p+\sigma, n-p+\rho_{s-1}}(x) b_{\alpha, n-p+\rho_{s-1}, n-p+\rho_{s-2}}(x) \dots \\ &\quad \dots b_{\alpha, n-p+\rho_2, n-p+\rho_1}(x) b_{\alpha, n-p+\rho_1, n-p-1}(x), \end{aligned}$$

unde $b_{\alpha, q, i}$ sînt definite în (26), iar notația $\sum_{(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-1})_{\sigma}}$ înseamnă o sumă definită în felul următor: se înțelege prin notația $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-1})_{\sigma}$ că

grupa de indici $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-1})$ parcurge toate grupele distincte de numere de forma $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{s-1})$, în care $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{s-1}$, sînt numere din șirul $0, 1, \dots, \sigma-1$ care au proprietățile următoare:

1. $0 \leq \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_{s-1} \leq \sigma-1$.
2. Se poate scrie șirul de grupe de câte două numere

$$(32) \quad (\sigma, \delta_{s-1}), (\delta_{s-1}, \delta_{s-2}), \dots, (\delta_2, \delta_1), (\delta_1, -1).$$

Cu ajutorul notației (31), restul de condiții inițiale la care satisface integrala $\varphi_1(x)$ se pot scrie sub forma

$$(33) \quad \begin{aligned} \varphi_1^{(n-p+\sigma)}(\lambda_p) &= (-1)^{n-p-1} \varphi_{n-p}(\lambda_p) [-b_{\alpha, n-p+\sigma, n-p-2}(\lambda_p) + \\ &\quad + \sum_{s=2}^{\sigma+1} (-1)^s G_{\alpha, s, \sigma}(\lambda_p)]; \end{aligned}$$

în cazul $p=0$ condițiile inițiale se reduc bineînțeles la condițiile (29), iar în cazul $p=1$ la condițiile (29) și (30). Relația (33) se dovedește imediat, dacă se presupune că are loc pentru $\sigma=1, \sigma_1$. În acest caz, dacă se înseamnă pentru comoditate

$$a_{k, l} = b_{\alpha, n-p+k, n-p+l}(\lambda_p),$$

se deduce din (27), (28), (29) și (30)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1^{(n-p+\sigma_1+1)}(\lambda_p)}{(-1)^{n-p-1} \varphi_{n-p}(\lambda_p)} &= - \sum_{i=1}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1, i} \varphi_1^{(n-p+i)}(\lambda_p) = \\ &= -a_{\sigma_1+1, -1} + a_{\sigma_1+1, 0} a_{0, -1} + \sum_{i=1}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1, i} \left[a_{i, -1} - \sum_{s=2}^{i+1} (-1)^s G_{\alpha, s, i}(\lambda_p) \right]. \end{aligned}$$

Ținînd seama de aceasta, relația (33) în care $\sigma = \sigma_1 + 1$ se scrie

$$(34) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1, i} a_{i, -1} + \sum_{s=3}^{\sigma_1+2} \sum_{i=s-2}^{\sigma_1} (-1)^s a_{\sigma_1+1, i} G_{\alpha, s, s-1, i}(\lambda_p) = \\ = G_{\alpha, 2, \sigma_1+1}(\lambda_p) + \sum_{s=3}^{\sigma_1+2} (-1)^s G_{\alpha, s, \sigma_1+1}(\lambda_p). \end{aligned}$$

Or, (31) dă $G_{\alpha, 2, \sigma_1+1}(\lambda_p) = \sum_{\rho_1=0}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1, \rho_1} a_{\rho_1, -1}$. Ținînd seamă de aceasta, relația (34) are loc dacă $G_{\alpha, s, \sigma_1+1}(\lambda_p) = \sum_{i=s-2}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1, i} G_{\alpha, s, s-1, i}(\lambda_p)$ ($s=3, \sigma_1+2$), adică, cu ajutorul lui (31),

$$(35) \quad \begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ S_1 &= \sum_{(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-1})_{\sigma_1+1}} a_{\sigma_1+1, \rho_{s-1}} a_{\rho_{s-1}, \rho_{s-2}} \dots a_{\rho_2, \rho_1} a_{\rho_1, -1}; \\ S_2 &= \sum_{i=s-2}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1, i} \sum_{(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-2})_i} a_{i, \rho_{s-2}} a_{\rho_{s-2}, \rho_{s-3}} \dots a_{\rho_2, \rho_1} a_{\rho_1, -1}. \end{aligned}$$

Dacă se alege deci în S_i un termen oarecare $a_{\sigma_1+1, \bar{\rho}_{s-1}} a_{\bar{\rho}_{s-1}, \bar{\rho}_{s-2}} \dots a_{\bar{\rho}_2, \bar{\rho}_1} a_{\bar{\rho}_1, -1}$, același termen se obține dacă se ia, în S_2 , $i = \bar{\rho}_{s-1}$ și $\rho_k = \bar{\rho}_k$ ($k=1, s-2$). Or, din (32) se deduce că grupul $(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_{s-2})$ aparține mulțimei $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-2})_{\bar{\rho}_{s-1}}$.

Așadar $S_1 \subset S_2$. Invers, dacă se alege în S un termen oarecare $a_{\sigma_1+1, i} a_{i, \bar{\rho}_{s-2}} a_{\bar{\rho}_{s-2}, \bar{\rho}_{s-3}} \dots a_{\bar{\rho}_2, \bar{\rho}_1} a_{\bar{\rho}_1, -1}$, același termen se obține dacă se ia în S_1 $\rho_{s-1} = i$, $\rho_k = \bar{\rho}_k$ ($k=1, s-2$). Din (32) se deduce iarăși că grupul $(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_{s-2}, i)$, aparține mulțimii $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{s-1})_{\sigma_1+1}$, așa că $S_2 \subset S_1$, de unde rezultă $S_1 = S_2$, adică relația (35) și prin urmare relația (34). Așadar, dacă relația (33) are loc pentru $\sigma=1$, σ_1 , atunci va avea loc și pentru $\sigma = \sigma_1 + 1$. Or, se deduce din (28) cu $q = n-p-1$, din (29), (30) și (27) că $\varphi_1^{(n-p+1)}(\lambda_p)$ ia valoarea dată de (33) în care se face $\sigma=1$. Cu aceasta, relația (33) este dovedită. Se va considera acum o altă integrală a ecuației (26), care pe de o parte să verifice condiții inițiale independente de cantitatea necunoscută $\varphi_{n-p}(\lambda_p)$ care figurează în (29), (30) și (33) iar pe de altă parte să verifice condițiile (7) (a). În acest scop se va însemna cu $\varphi_{\alpha \oplus, 1}(x)$ integrala ecuației (26) care satisface condițiile inițiale următoare:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \varphi_{\alpha \oplus, 1}^{(i)}(\lambda_p) = 0 \quad (i = \overline{0, n-p-2}); \\ (b) \quad & \varphi_{\alpha \oplus, 1}^{(n-p-1)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1} \varphi_{\alpha \oplus, L}^{(p+1)}(\lambda_p); \\ (36) \quad (c) \quad & \varphi_{\alpha \oplus, 1}^{(n-p)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p} b_{\alpha \oplus, n-p, n-p-1}(\lambda_p) \varphi_{\alpha \oplus, L}^{(p+1)}(\lambda_p); \\ (d) \quad & \varphi_{\alpha \oplus, 1}^{(n-p+\sigma)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1} \varphi_{\alpha \oplus, L}^{(p+1)}(\lambda_p) \left[-b_{\alpha \oplus, n-p+\sigma, n-p-1}(\lambda_p) + \right. \\ & \left. + \sum_{s=2}^{\sigma+1} G_{\alpha \oplus, s, \sigma}(\lambda_p) \right] (\sigma = \overline{1, p-1}; 1 \leq p \leq n-2), \end{aligned}$$

unde $b_{\alpha, \alpha, i}(x)$ este definit în (26), cu $\varphi_{\alpha \oplus, L}$ definită în (3). În cazul $p=0$, respectiv $p=1$, condițiile (36) se reduc, ca și condițiile (29), (30), (33), la condițiile (a) și (b), respectiv (a), (b), (c) din (36). Se deduce deci din (29), (30), (33), (36), ținând seamă că prin ipoteza teoremei $\varphi_{\alpha \oplus, L}^{(p+1)}(\lambda_p) \neq 0$

$$(37) \quad \varphi_{n-p}(\lambda_p) \varphi_{\alpha \oplus, 1}(x) = \varphi_{\alpha \oplus, L}^{(p+1)}(\lambda_p) \varphi_1(x).$$

Dacă se face în (7) (d) $x = \lambda_p$, se obține cu ajutorul lui (27) (în care relația $\varphi_1(\lambda_p) = 0$ figurează neapărat, așa cum s-a observat după acea formulă) și al lui (7) (a)

$$(38) \quad \varphi_{n-p}(\lambda_p) \varphi_{\alpha \oplus, L}^{(p+1)}(\lambda_p) \geq 0.$$

Se deduce deci din (7a), (37) și (38) că funcția liniară de variabilele

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n: L_{\alpha \oplus, x}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = -\varphi_{\alpha \oplus}(x) \sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha \oplus, L}^{(n-i)}(x) \beta_i,$$

în care $\varphi_{\alpha \oplus, 1}(x)$ și $\varphi_{\alpha \oplus, L}(x)$ sînt definite în (36), respectiv în (3), își atinge maximum în domeniul D pentru $\beta_i = \alpha_i^{\oplus}(x)$ ($i = \overline{1, n}$) și aceasta pentru orice $x \in [0, \lambda_p]$, ceea ce demonstrează teorema.

Primită la redacție la 5 martie 1965

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. A. LASOTA și Z. OPÍAL, *L'application du principe de Pontriagin à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites*, Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences, Série des sciences math., astr. et phys., **XI**, 2, 41–46 (1963).
2. Л. ПОНТЯГИН, В. БОЛТЯНСКИЙ, Р. ГАМКРЕЛИДЗЕ и Е. МИЩЕНКО, *Математическая теория оптимальных процессов*, Москва, 1961.