

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

EXTRAS

9

TOMUL 17
1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

ASUPRA PROBLEMEI BILOCALE PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE (II)

DE

DUMITRU RIPIANU
(Cluj)

În această Notă se determină intervalul de lungime maximă de forma $(0, \lambda)$, în care derivatele de un ordin dat ale integralelor ecuațiilor diferențiale de forma (1) determinate de aceleași condiții Cauchy fixate, nu se anulează, oricare ar fi ecuația diferențială (1) dintr-o clasă de astfel de ecuații, determinată de anumite condiții — precizate în propoziția (2) din text, și în enunțurile teoremelor 1—3.

§ 1. Această Notă se referă la următoarea problemă, abordată și în [1]:

Se consideră ecuația diferențială liniară de ordinul n :

$$(1) \quad y^{(n)}(x) + \sum_{i=L}^n a_i(x) y^{(n-i)}(x) = 0$$

în ipotezele următoare:

- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Coeficienții } a_i(x) \text{ sînt funcții continue în intervalul } (0, \infty) \\ \text{și au derivate de ordinul 1 mărginite în valoare absolută de un} \\ \text{număr fix, iar atunci cînd } x \text{ descrie acest interval, punctul } M \text{ de} \\ \text{coordonate } \beta_i = a_i(x) (i = 1, n) \text{ descrie un anumit domeniu } D \text{ mărginit} \\ \text{și închis din spațiul euclidian cu } n \text{ dimensiuni, raportat la} \\ \text{axele } O \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n. \end{array} \right.$

Se presupune că frontiera S a domeniului D , de ecuație $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$, are în fiecare punct al ei un plan tangent unic. Se înseamnă cu $a(x)$ funcția — vector — de componente $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$, cu $\mathcal{A}_D$ mulțimea funcțiilor-vectori $a(x)$ care au proprietatea (2), cu L o grupă de n numere date, nu toate nule, $(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$, cu $\varphi_{a,L}(x)$ integrala ecuației (1) pentru care $\varphi_{a,L}^{(i)}(0) = l_i (i = 0, n-1)$, cu $R[f(x)]$

cea mai mică rădăcină pozitivă a funcției $f(x)$, presupusă definită în intervalul $[0, \infty)$ — dacă $f(x) \neq 0$ pentru orice $x > 0$, se va scrie, prin convenție, $R[f(x)] = \infty$ — se înseamnă mai departe cu p un număr fixat din șirul $0, 1, \dots, n-1$ și, în sfârșit, cu $(0, \lambda_{p,D,L})$ intervalul cu originea în O de lungime maximă în care $\varphi_{\alpha,L}^{(p)}(x) \neq 0$, oricare ar fi funcția-vector $\alpha(x)$ din mulțimea $\mathcal{A}_D$.

Problema constă în determinarea numărului $\lambda_{p,D,L}^1$.

După cum s-a observat în [1], există o funcție-vector minimizantă $\alpha^{(p)}(x) = (\alpha_1^{(p)}(x), \alpha_2^{(p)}(x), \dots, \alpha_n^{(p)}(x))$ care aparține mulțimii $\mathcal{A}_D$, adică pentru care $R[\varphi_{\alpha^{(p)},L}^{(p)}(x)] = \lambda_{p,D,L}$. În teorema 1 din [1] s-a stabilit un sistem de ecuații diferențiale pe care îl verifică funcțiile $\alpha_i^{(p)}(x)$ ($i = \overline{1, n}$), cu ajutorul cărora s-a determinat numărul λ în cazul când $n = 2$, $p = 0$ și S este un cerc de centru originea axelor și rază dată.

În prezenta Notă se indică un procedeu de determinare a numărului $\lambda_{p,D,L}$, în cazul când frontiera S este o hipersferă de centru originea axelor și rază dată. Determinarea se va face pînă la integrarea anumitor ecuații, diferențiale, care nu mi s-a părut posibilă în termeni finiți, așa că nu pot da expresia explicită a numărului λ .

Ne vom servi în acest scop de teorema amintită din [1], conform căreia funcția-vector minimizantă $\alpha^{(p)}(x)$ verifică pentru orice $x \in [0, \lambda]$ următorul sistem de ecuații diferențiale, care de altfel nu depinde de numărul p :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & F(\alpha_1^{(p)}(x), \alpha_2^{(p)}(x), \dots, \alpha_n^{(p)}(x)) = 0 \\ & \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} + \\ & + \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F_{\beta_n}^{12}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} + \\ & + \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(p)}(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} = 0 \\ & \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} = \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} + \\ & + \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F_{\beta_n}^{12}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} \quad (i = \overline{2, n-1}) \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} & (a) \\ & (b) \\ & (c) \end{aligned}$$

¹⁾ Pentru comoditate, se va scrie și λ în loc de $\lambda_{p,D,L}$.

și condițiile inițiale

$$(4) \frac{l_{n-1}}{F'_{\beta_1}|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)}} = \frac{l_{n-2}}{F'_{\beta_2}|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)}} = \dots = \frac{l_{n-i}}{F'_{\beta_i}|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)}} = \dots = \frac{l_0}{F'_{\beta_n}|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)}}.$$

De asemenea, ne vom servi de relațiile

$$(5) \frac{\varphi_{\alpha^{(p)},L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha^{(p)},L}^{(p)}(x)} = \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)} \quad (i = \overline{1, n-1})$$

din [1], în care notația $H(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s^{(p)}(x)}$ înseamnă expresia obținută prin înlocuirea variabilelor β_s ($s = \overline{1, n}$) din funcția $H(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ respectiv cu funcțiile $\alpha_s^{(p)}(x)$ ($s = \overline{1, n}$).

§ 2. Se va considera cazul când domeniul D din (2) este mărginit de sfera de centru originea axelor și rază R dată, cu alte cuvinte când în (3) $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \beta_\sigma^2 - R^2$. Abordarea acestui caz constituie generalizarea teoremei 2 din [1] la un spațiu cu n dimensiuni. Ne vom referi în enunțul teoremelor la notațiile prezentate în § 1, dat fiind că repetarea explicației lor ar lungi în mod inutil aceste enunțuri.

TEOREMA 1. Dacă $n \geq 3$, $p = 0$ și S este sfera de ecuație $\sum_{\sigma=1}^n \beta_\sigma^2 = R^2$,

atunci numărul $\lambda_{0,D,L}$ este egal cu $\lim_{h \rightarrow -\infty} \int_{l_0}^h \frac{ds}{L_2(s) - s^2}$, unde $L_2(s)$ este o integrală a ecuației diferențiale de ordinul $n-2$ în funcția necunoscută $L_2(s)$:

$$(6) \quad L_n^2(s) = R^2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} L_\sigma^2(s)$$

în care expresiile $L_\sigma(s)$ ($\sigma = \overline{0, n}$) sînt determinate de relațiile

$$(7) \quad L_0(s) = 1, L_1(s) = s, L_\sigma(s) = s L_{\sigma-1}(s) + L'_{\sigma-1}(s) (L_2(s) - s^2) \quad (\sigma = \overline{2, n})$$

Dacă $l_0, l_2 \neq l_1^2$, atunci condițiile „inițiale” satisfăcute de integrala $L_2(s)$ a ecuației (6) se deduc prin înlocuirea în relațiile (7) a lui s cu $\frac{l_1}{l_0}$ și a lui $L_\sigma\left(\frac{l_1}{l_0}\right)$ cu $\frac{l_\sigma}{l_0}$ ($\sigma = \overline{2, n-1}$). Se obțin astfel valorile lui $L_2^{(s)}\left(\frac{l_1}{l_0}\right)$ ($\sigma = \overline{0, n-3}$).

Demonstrație. În cazul teoremei, relațiile (3) (c) se scriu

$$\frac{\alpha_{i-1}(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{d}{dx} \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_n(x)} + \frac{\alpha_i(x) \alpha_{n-1}(x)}{\alpha_n^2(x)} \quad (i = \overline{2, n-1})$$

(s-a scris $\alpha_i(x)$ în loc de $\alpha_i^{(0)}(x)$). Se va însemna în (5)

$$(8) \quad h_{n-i}(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)} \quad (i = \overline{1, n-1})$$

în care caz relațiile de mai sus se scriu

$$(9) \quad h_{n+1-i}(x) = h'_{n-i}(x) + h_1(x) h_{n-i}(x) \quad (i = \overline{2, n-1}).$$

(8) dă cu $i = n-1$

$$(10) \quad h_1 = h_1(x) = \frac{\varphi'_{\alpha, L}(x)}{\varphi_{\alpha, L}(x)}.$$

De aici se poate determina $x = x(h_1)$ ca o funcție continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$, cu excepția eventuală a unui număr finit de puncte, unde $x(h_1)$ prezintă discontinuități de specia întâi.

Această afirmație se justifică imediat, dacă se ține seama că dacă în (10) $\varphi_{\alpha, L}(x) = (x - \lambda)^p A(x)$ cu $A(\lambda) \neq 0$, atunci $h_1(x) = \frac{p}{x - \lambda} + A'(x)A(x)$, așa că $\lim_{x \rightarrow \lambda} h_1(x) = -\infty$. Din punctul nostru de vedere, curba (C) de ecuație $h_1 = h_1(x)$ poate avea în intervalul $[0, \lambda]$ de variație a lui x numai una din următoarele 3 forme:

a) $h_1(x)$ scade de la $\frac{l_1}{l_0}$ la $-\infty$ când x crește de la 0 la λ (fig. 1).

b) Punctul de extrem de abscisă maximă, care se va însemna cu M_0 , de coordonate (ρ_0, σ_0) și este neapărat un punct de maxim, are ordonata $\sigma_0 \geq \frac{l_1}{l_0}$ (fig. 2).

În aceste cazuri, evident că curba (C) determină funcția $x(h_1)$ continuu derivabilă în intervalul (deschis) $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$.

c) În notația de la punctul b), $\sigma_0 < \frac{l_1}{l_0}$ (fig. 3). În acest caz o paralelă dusă prin punctul M_0 la Ox întâlnește neapărat cel puțin un arc (C_1) al lui (C) , care merge de la un punct de minim spre un punct de maxim al lui (C) , atunci când se face o mișcare de-a lungul axei Ox în sensul în care x descrește. Se va însemna cu P_1 punctul de întâlnire al paralelei în chestiune cu arcul (C_1) și cu (ρ_1, σ_1) coordonatele punctului M_1 de maxim în chestiune (evident că $\rho_1 \geq 0$). Dacă $\sigma_1 \geq \frac{l_1}{l_0}$, dreapta de ecuație $y = \frac{l_1}{l_0}$ întâlnește neapărat arcul (C_1) într-un punct care se va însemna cu Q . Este atunci evident că arcul (C_0) de pe (C) , alcătuit din

punctele de pe (C) de abscise $\geq \rho_0$ (și $< \lambda$), împreună cu arcul $\widehat{P_1 Q}$ de pe (C) determină funcția $x(h_1)$, continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$, cu excepția punctului corespunzând valorii σ_0 a variabilei independente h_1 , în care funcția $x(h_1)$ prezintă o discontinuitate de specia întâi. Dacă $\sigma_1 < \frac{l_1}{l_0}$, paralela dusă prin punctul M_1 la Ox întâlnește neapărat cel puțin un arc (C_2) de pe (C) , care merge de la un punct de minim la un punct de maxim M_2 al lui (C) . Se va însemna cu P_2 punctul respectiv de întâlnire și cu (ρ_2, σ_2) coordonatele lui M_2 . Dacă $\sigma_2 \geq \frac{l_1}{l_0}$, atunci dreapta de ecuație $y = \frac{l_1}{l_0}$ întâlnește neapărat arcul (C_2) într-un punct Q . În acest caz, este evident că arcele (C_0) , $\widehat{P_1 M_1}$ și $\widehat{P_2 Q}$ ale lui (C) determină funcția $x(h_1)$ continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$ al variabilei h_1 , cu excepția punctelor în care $h_1 = \sigma_0$ și $h_1 = \sigma_1$, în care $x(h_1)$ prezintă discontinuități de specia întâi. Dacă $\sigma_2 < \frac{l_1}{l_0}$, se duce o paralelă la axa Ox prin M_2 și se continuă procedeul. După un număr finit de astfel de operații se ajunge neapărat la un punct de maxim M_q — extremitatea din stînga a unui arc (C_q) de pe (C) — cu ordonata $\sigma_q \geq \frac{l_1}{l_0}$. Arcele (C_0) , $\widehat{P_1 M_1}$, $\widehat{P_2 M_2}$, ..., $\widehat{P_{q-1} M_{q-1}}$, $\widehat{P_q Q}$ — unde punctul Q este punctul de întâlnire al dreptei de ecuație $y = \frac{l_1}{l_0}$ cu arcul (C_q) — determină funcția $x(h_1)$ continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$, cu excepția punctelor în care $h_1 = \sigma_i$ ($i = \overline{0, q-1}$), în care $x(h_1)$ prezintă discontinuități de specia întâi.

Așadar, (10) dă

$$(11) \quad x = x(h_1), \quad x\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = 0$$

unde $x(h_1)$ este uniformă și continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_1}{l_0}\right)$ de variație al lui h_1 , cu excepția eventuală a unui număr finit de puncte din acest interval.

Se deduce deci din (8) și (11)

$$(12) \quad h_{n-i}(x) = L_{n-i}(h_1) \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (h_\sigma(x) = L_\sigma(h_1) \quad \sigma = \overline{1, n-1})$$

în care caz (9) se scrie cu ajutorul relației

$$(13) \quad h_1'(x) = h_2(x) - h_1^2(x)$$

dată tot de (9) cu $i = n-1$, și al schimbării de indice $\sigma = n+1-i$:

$$(14) \quad L_\sigma(h_1) = h_1 L_{\sigma-1}(h_1) + L'_{\sigma-1}(h_1) (L_2(h_1) - h_1^2) \quad (\sigma = \overline{3, n-1}).$$

Însă (3) (a) și (8) dau, dacă se ia prin definiție $L_0(h_1) \equiv 1 : \alpha_n^2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} L_\sigma^2(h_1) = R^2$

iar (3) (b) se scrie $h'_{n-1}(x) + h_1(x) h_{n-1}(x) + \frac{R^2}{\alpha_n(x)} = 0$. Se deduce din aceste două relații și din (12) și (13)

$$L'_{n-1}(h_1) (L_2(h_1) - h_1^2) + h_1 L_{n-1}(h_1) \pm R \sqrt{\sum_{\sigma=0}^{n-1} L_\sigma^2(h_1)} = 0.$$

Se va defini expresia $L_n(h_1)$ prin relația (14) cu $\sigma = n$. În acest caz, relația scrisă mai sus, în care se face $h_1 = s$ se transformă în relația (6), iar relația (14) în relațiile (7). Spre a deduce condițiile „inițiale” satisfăcute de integrala $L_2(s)$ a ecuației (6), este suficient să se observe că (7) dă

$$(15) \quad L_\sigma(s) = L_2^{(\sigma-2)}(s) (L_2(s) - s^2)^{\sigma-2} + P_\sigma(s), L_2(s), L_2'(s), \dots, \dots, L_2^{(\sigma-3)}(s) \quad (\sigma = \overline{3, n}),$$

unde $P_\sigma(s, s_0, s_1, \dots, s_{\sigma-3})$ este un polinom în aceste variabile. Or, (8) și (12) dau $L_\sigma(h_1) = h_\sigma(x(h_1))$, deci $L_\sigma\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \frac{l_\sigma}{l_0}$ ($\sigma = \overline{1, n-1}$) așa că

$$L_2\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \frac{l_2}{l_0}. \text{ În acest caz, și în ipoteza teoremei anume } l_0 l_2 \neq l_1^2,$$

(15) dă valorile lui $L_2^{(\sigma)}\left(\frac{l_1}{l_0}\right)$ ($\sigma = \overline{1, n-3}$). În sfârșit, (12) și (13) dau

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{L_2(s) - s^2}, \text{ de unde, cu ajutorul lui (11), } x(h_1) = \int_{l_1}^{h_1} \frac{ds}{L_2(s) - s^2}.$$

Însă, din (11), se deduce pe fig. 1-3, $\lambda = \lim_{h_1 \rightarrow -\infty} x(h_1)$, deci $\lambda =$

$$= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{l_1}^h \frac{ds}{L_2(s) - s^2}, \text{ ceea ce demonstrează teorema.}$$

§ 3. Se va prezenta un rezultat analog celui din teorema 1 în cazul $p > 0$, în

TEOREMA 2. Dacă S este sfera de ecuație $\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = R^2$, $n \geq 3$ și

$1 \leq p \leq n-2$, atunci numărul $\lambda_{p,D,L}$ este egal cu $\lim_{h \rightarrow -\infty} \int_{l_{p+1}}^h \frac{ds}{L_{p+2}(s) - s^2}$

în care $L_{p+2}(s)$ este o integrală a ecuației integro-diferențiale

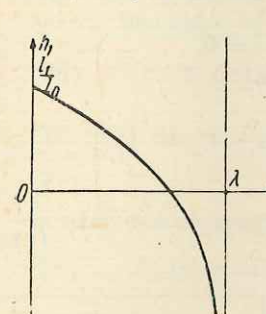


Fig. 1

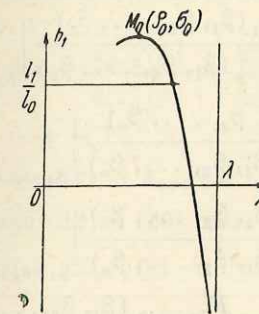


Fig. 2

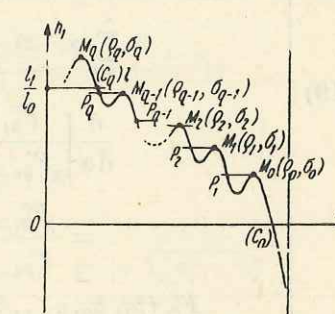


Fig. 3

$$(16) \quad L_n^2(s) = R^2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} L_\sigma^2(s).$$

în care expresiile $L_\sigma(s)$ ($\sigma = \overline{1, n}$) sînt determinate de relațiile

$$(17) \quad L_\sigma(s) = e^{-\int_c^s \frac{\varphi}{L_{p+2}(\varphi) - \varphi^2} d\varphi} \left[\frac{l_\sigma}{l_p} \exp \int_c^{\frac{l_{p+1}}{l_p}} \frac{\varphi}{L_{p+2}(\varphi) - \varphi^2} d\varphi + \int_{\frac{l_{p+1}}{l_p}}^s \frac{L_{\sigma+1}(\theta)}{L_{p+2}(\theta) - \theta^2} e^{\int_c^\theta \frac{\varphi}{L_{p+2}(\varphi) - \varphi^2} d\varphi} d\theta \right]; \quad \frac{L_{p+1}(s)}{l_p} = s$$

$$(\sigma = p-1, p-2, \dots, 0)$$

$$(18) \quad L_\sigma(s) = s L_{\sigma-1}(s) + L'_{\sigma-1}(s) (L_{p+2}(s) - s^2) \quad (\sigma = \overline{p+3, n}).$$

Condițiile „inițiale” la care satisface integrala $L_{p+2}(s)$ a ecuației (16) se deduc, în ipoteza că $l_p l_{p+2} \neq l_{p+1}^2$, înlocuind în (18) pe s cu $\frac{l_{p+1}}{l_p}$ și

pe $L_\sigma\left(\frac{l_{p+1}}{l_p}\right)$ cu $\frac{l_{p+\sigma}}{l_p}$ ($\sigma = \overline{p+3, n-1}$). Se obțin astfel valorile lui

$L_{p+2}^{(\sigma)}\left(\frac{l_{p+1}}{l_p}\right)$ ($\sigma = \overline{1, n-p-3}$). (Se poate observa că expresia lui $L_\sigma(s)$ din (17) nu depinde de constanta arbitrară c).

Demonstrație. Ne vom servi de o formă puțin diferită a relațiilor (3), și anume

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s(x)} + \\ & + \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) F'_{\beta_{n-p-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F_{\beta_{n-p}}^{12}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} + \\ & + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} = 0 \\ & \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s(x)} = \\ & = \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} - \\ & - \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \cdot \frac{F'_{\beta_{n-p-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} \quad (i = \overline{2, n}) \end{aligned} \right. \quad (b) \quad (c)$$

care se deduc la fel ca formele (3) (b) și (c) din [1]. Pentru simplificarea scrierii s-a pus, și aici, $\alpha_i(x)$ în loc de $\alpha_i^{(p)}(x)$. În cazul nostru $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 - R^2$ așa că (5) dă

$$(20) \quad h_{n-i} = h_{n-i}(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_{n-p}(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Se deduce de aici și din (3) (a)

$$(21) \quad \alpha_{n-p}^2 \sum_{i=0}^{n-1} h_i^2(x) = R^2.$$

Cu ajutorul lui (20) și (21), relațiile (19) (c) și (b) se scriu

$$(22) \quad h'_{n-i}(x) = h_{n+1-i}(x) - h_{n-i}(x) h_{p+1}(x) \quad (i = \overline{2, n})$$

$$(23) \quad h'_{n-1}(x) + h_{n-1}(x) h_{p+1}(x) \pm R \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} h_i^2(x)} = 0.$$

Dacă se înseamnă

$$(24) \quad s = h_{p+1} = h_{p+1}(x) = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(p+1)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)}$$

se deduce de aici, ca în demonstrația teoremei 1 (formula (11)),

$$(25) \quad x = x(s), \quad x \left(\frac{l_{p+1}}{l_p} \right) = 0,$$

unde $x(s)$ este o funcție uniformă și continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_{p+1}}{l_p} \right)$, cu excepția eventuală a unui număr finit de puncte în care $x(s)$ prezintă discontinuități de specia întâi. Ținând seamă de (25), se va însemna în (20)

$$(26) \quad h_{\sigma}(x) = L_{\sigma}(s) = \frac{\alpha_{n-\sigma}(x)}{\alpha_{n-p}(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(\sigma)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} \quad (\sigma = \overline{0, n-1}).$$

Or, (22) dă cu $i = n - p - 1$

$$(27) \quad h'_{p+1}(x) = h_{p+2}(x) - h_{p+1}^2(x)$$

în care caz aceleași relații (22) și (26) dau

$$(28) \quad L_{\sigma}(s) = s L_{\sigma-1}(s) + (L_{p+2}(s) - s^2) L'_{\sigma-1}(s) \quad (\sigma = \overline{1, n-1})$$

adică relațiile (18), iar (23) se scrie $L_n(s) \pm R \sqrt{\sum_{\sigma=0}^{n-1} L_{\sigma}^2(s)} = 0$, cu $L_n(s)$

dat de (28) cu $\sigma = n$, adică relația (16).

Dacă se integrează ecuațiile (28) cu $\sigma = p, p-1, \dots, 1$, în funcțiile necunoscute $L_{\sigma-1}(s)$, și se ține seamă că (26) și (25) dau

$$(29) \quad L_{\sigma} \left(\frac{l_{p+1}}{l_p} \right) = \frac{l_{\sigma}}{l_p} \quad (\sigma = \overline{0, n-1})$$

se obțin relațiile (17). Tot (26) dă $L_p(s) = 1$, iar (24) $L_{p+1}(s) = s$. Spre a deduce condițiile „inițiale” pe care le satisface integrala $L_{p+2}(s)$ a ecuației (16), este suficient să se observe că (18) dă

$$(30) \quad L_{p+\sigma}(s) = L_{p+2}^{(\sigma-2)}(s) (L_{p+2}(s) - s^2)^{\sigma-2} + P_{p+\sigma}(s, L_{p+2}(s), L'_{p+2}(s), \dots, L_{p+2}^{(\sigma-3)}(s)),$$

unde $P_{p+\sigma}(s, s_0, s_1, \dots, s_{\sigma-3})$ este un polinom în aceste variabile. În ipoteza teoremei, și anume $l_p l_{p+2} \neq l_{p+1}^2$, (29) și (30) dau valorile

$$L_{p+2}^{(\sigma)} \left(\frac{l_{p+1}}{l_p} \right) \quad (\sigma = \overline{0, n-p-3}). \quad \text{În sfârșit, (24), (26) și (27) dau } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{L_{p+2}(s) - s^2}, \text{ de unde, cu ajutorul lui (25), } x(h_{p+1}) = \int_{\frac{l_{p+1}}{l_p}}^{h_{p+1}} \frac{ds}{L_{p+2}(s) - s^2},$$

asa că pe baza figurilor 1-3, construite pentru funcția $h_{p+1}(x)$ se deduce

$$\lambda_{p, D, L} = \lim_{h \rightarrow -\infty} \int_{\frac{l_{p+1}}{l_p}}^h \frac{ds}{L_{p+2}(s) - s^2}.$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observații. 1. Dacă funcțiile $x(s)$ din (11) (cu $s = h_1$) sau (25) (cu $s = h_{p+1}$) prezintă eventual punctele de discontinuitate σ_i ($i = 0, q$) ($\frac{l_1}{l_0}$ sau $\frac{l_{p+1}}{l_p} > \sigma_q > \sigma_{q-1} > \dots > \sigma_0$) menționate la pag. 5, atunci relațiile $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{L_2(s) - s^2}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{L_{p+2}(s) - s^2}$ au loc în intervalele (deschise și orientate în sensul descrescătorii lui s)

$$\left(\frac{l_1}{l_0} \text{ sau } \frac{l_{p+1}}{l_p}, \sigma_q \right), (\sigma_q, \sigma_{q-1}), (\sigma_{q-1}, \sigma_{q-2}), \dots, (\sigma_1, \sigma_0), (\sigma_0, -\infty).$$

În acest caz, integralele

$$x(h_1) = \int_{l_0}^{h_1} \frac{ds}{L_2(s) - s^2}, \quad x(h_{p+1}) = \int_{l_{p+1}}^{h_{p+1}} \frac{ds}{L_{p+2}(s) - s^2} \text{ înseamnă}$$

$$\int_{l_0}^{l_1 \text{ sau } l_{p+1}} \frac{ds}{L_2(s) - s^2} + \int_{\sigma_q}^{\sigma_{q-1}} + \int_{\sigma_{q-1}}^{\sigma_{q-2}} + \dots + \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} + \int_{\sigma_0}^{h_1 \text{ sau } h_{p+1}}$$

(întrucât $h_1, h_{p+1} \rightarrow -\infty$, s-a presupus $h_1, h_{p+1} < \sigma_0$).

2. Teorema 2 nu are loc sub forma prezentată în cazul $p = n - 1$, pentru că relația (19) (b) se deduce înlocuind în relația $\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} +$

$$+ \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} = 0 \text{ pe } \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} \text{ cu expresia sa obținută din relația}$$

$$\frac{d \varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}{dx \varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} - \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(p+1)}(x) \varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}{(\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x))^2}$$

servindu-ne de (5), ceea ce nu se poate face când $p = n - 1$. De altfel, în (19) (b) figurează expresia $F'_{\beta_{n-p-1}}$, care nu are sens pentru $p = n - 1$.

Nu se pot folosi nici relațiile (5) spre a afla pe $\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}}(x)$ (în care caz s-ar

avea tot cu (5) și pe $\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}$, pentru că aceasta cere folosirea ecuației

(1) adică

$$(31) \quad \varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x) = 0$$

cu $y(x) = \varphi_{\alpha, L}(x)$ și $\alpha_i(x) = \alpha_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$). Or, această ecuație se folosește și la stabilirea relației (19) (b), așa că dacă $p = n - 1$, relația (19) (b) se reduce la identitatea

$$-\sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_{n-p}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} = 0.$$

În acest caz, ne vom servi de identitatea

$$\frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-2)}(x)} \left[1 - \frac{d \varphi_{\alpha, L}^{(n-2)}(x)}{dx \varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)} \right]$$

care dă cu ajutorul lui (5)

$$(32) \quad \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)} = \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} \left\{ 1 - \frac{d \left[\frac{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{dx} \right\}$$

De asemenea relațiile (19) (c) se deduc din identitatea

$$(33) \quad \frac{d \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{dx \varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n+1-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x)} - \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(p+1)}(x) \varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(p)}(x) \varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)} \quad (i = \overline{2, n})$$

cu ajutorul lui (5), ceea ce iarăși nu se poate face când $p = n - 1$, pentru că în (5) nu figurează $\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)$. În acest caz, se poate deduce din (5) și (31)

$$(34) \quad \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)} = - \frac{1}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \sum_{i=1}^n \beta_i F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}$$

ceea ce dă împreună cu (32)

$$(35) \quad \frac{d \left[\frac{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{dx} = 1 + \frac{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \sum_{i=1}^n \beta_i F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)}$$

(33) (cu $p = n - 1$) și (34) dau

$$(36) \quad \frac{d \left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{dx} = \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} +$$

$$+ \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \sum_{\sigma=1}^n \beta_{\sigma} F'_{\beta_{\sigma}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} \quad (i = \overline{3, n})$$

sau relația echivalentă (ținând seama de (35))

$$(37) \quad \frac{d \left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{dx} = \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} -$$

$$- \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} + \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \Big|_{\beta_s = \alpha_s(x)} \frac{d \left[\frac{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \right]_{\beta_s = \alpha_s(x)}}{dx} \quad (i = \overline{3, n}).$$

S-a dovedit astfel.

LEMA 1. Funcția minimizantă $\alpha^{(n-1)}(x) = \alpha_1^{(n-1)}(x), \alpha_2^{(n-1)}(x), \dots, \alpha_n^{(n-1)}(x)$ verifică sistemul de n ecuații diferențiale alcătuit din relațiile (3) (a) (cu $p = n - 1$), (35) și (36). Relațiile (36) se pot înlocui cu (37).

§ 4. Se va prezenta teorema 2 în cazul $p = n - 1$ în :

TEOREMA 3. Dacă în notațiile din §. 1, S este sfera de ecuație $\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = R^2$, atunci numărul $\lambda_{n-1, D, L}$ este egal sau cu $\lambda_{n-2, D, L}$ sau cu

$$(38) \quad \lim_{h \rightarrow -\infty} \int_{\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}}^h H(s) ds, \text{ sau cu } \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}}^h H(s) ds,$$

unde expresiile $L_\sigma(s)$ $H(s)$ sînt determinate de relațiile

$$(39) \quad \begin{cases} L_{n-1}(s) \equiv 1, (L_{\sigma+1}(s) - L'_\sigma(s))^2 = R^2 (L_\sigma(s) - s L'_\sigma(s))^2 \sum_{i=0}^{n-1} L_i^2(s) \\ (1 - H(s))^2 = R^2 s^2 H^2(s) \sum_{\sigma=0}^{n-1} L_\sigma^2(s). \end{cases}$$

Demonstrație. Se va deduce din (5)

$$(40) \quad h_{n-i}(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_1(x)} = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-i)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)} \quad (i = \overline{1, n})$$

așa că (3) (a) dă $\alpha_1^2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} h_\sigma^2(x) = R^2$, în care caz (35) (care are loc ca și

(36) sau (37) conform lemei), se scrie

$$(41) \quad (1 - h'_{n-2}(x))^2 = R^2 h_{n-2}^2(x) \sum_{\sigma=0}^{n-1} h_\sigma^2(x)$$

iar (37)

$$(42) \quad h'_{n-i}(x) = h_{n+1-i}(x) - \frac{h_{n-i}(x)}{h_{n-2}(x)} (1 - h'_{n-2}(x)) \quad (i = \overline{3, n}).$$

Se va presupune $\lambda_{n-1, D, L} \neq \lambda_{n-2, D, L}$. În acest caz, dacă se înseamnă $s = h_{n-2}(x) = \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-2)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}$, se deduce că $\lim_{\substack{x \rightarrow \lambda \\ x < \lambda}} s = \pm \infty$ și prin același raționament ca în demonstrația teoremei 1, că relația de mai sus definește o funcție $x(s)$ continuu derivabilă în intervalul $\left(-\infty, \frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}\right)$ sau $\left(\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}, \infty\right)$ (după cum $\lim_{\substack{x \rightarrow \lambda \\ x < \lambda}} s = -\infty$ sau $\lim_{\substack{x \rightarrow \lambda \\ x < \lambda}} s = \infty$), cu excepția eventuală a unui număr finit de puncte în care $x(s)$ prezintă discontinuități de specia întâi. Menționăm că în cazul nostru, adică $p = n - 1$, nu se mai poate preciza

semnul lui $\lim_{\substack{x \rightarrow \lambda \\ x < \lambda}} \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-2)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}$, fiindcă se știe că $\lim_{\substack{x \rightarrow \lambda_{n-2, D, L} \\ x < \lambda_{n-2, D, L}}} \frac{\varphi_{\alpha, L}^{(n-1)}(x)}{\varphi_{\alpha, L}^{(n-2)}(x)} = -\infty$ dar aici x tinde spre $\lambda_{n-1, D, L}$ și nu spre $\lambda_{n-2, D, L}$.

Se poate deci însemna în (40) $h_\sigma(x) = L_\sigma(s)$ ($\sigma = \overline{0, n-1}$), în care caz (42) se scrie cu ajutorul lui (41) sub forma (39), iar (41) dă pentru $H(s) = \frac{dx}{ds}$ a doua relație (39), de unde cu ajutorul curbei de ecuație $s = h_{n-2} = h_{n-2}(x)$ se deduce, ca în demonstrația teoremei 1, relația (38) (valabilă bineînțeles cu observația 1, din acest paragraf), ceea ce demonstrează teorema.

Primită la redacție la 20 mai 1965

Institutul de calcul al Academiei Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. D. RIPIANU, *Asupra problemei bilocale pentru ecuații diferențiale liniare (I)*. St. cerc. mat. 17, 8, (1965).