

SUR LA FORMULE DE QUADRATURE DE GAUSS

par

D. V. IONESCU

à Cluj

On sait que, dans la formule de quadrature de Gauss

$$(1) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n) + R.$$

dont le degré d'exactitude est $2n - 1$, les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines réelles, distinctes et comprises entre -1 et $+1$ du polynome de Legendre $P(x)$.

Dans ce travail nous allons donner une démonstration simple de cet important théorème.

1. D'une manière générale, considérons la formule

$$(2) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \Delta_1 [C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n)].$$

où $p(x)$ est une fonction intégrable et positive sur l'intervalle (a, b) , et où

$$(3) \quad \Delta_1 = \int_a^b p(x) dx.$$

Cherchons à déterminer les coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$ et les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ de manière que la formule (2) soit vérifiée par un polynome quelconque du $(2n - 1)$ -ème degré au plus.

Désignons par $Q_m(x)$ la suite des polynômes orthogonaux, par rapport à la fonction $p(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, où $Q_0(x) = 1$, ce qui veut dire que

$$\int_a^b p(x) Q_m(x) Q_{m'}(x) dx = 0$$

pour $m \neq m'$. En particulier nous avons

$$(4) \quad \int_a^b p(x) x^m Q_n(x) dx = 0$$

pour $m = 0, 1, \dots, n-1$.

On sait que le polynôme $Q_n(x)$ a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre a et b .

2. Cela étant rappelé, passons à la démonstration du théorème. Remarquons d'abord que dans la formule (2) toutes les constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont différentes de zéro.

En effet, supposons le contraire et d'une manière précise que C_n soit nul. En remplaçant dans la formule (2) la fonction $f(x)$ par le polynôme $(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_{n-1})^2$ du $(2n-2)$ -ème degré, la formule doit être vérifiée. Mais cela est impossible parce que le premier membre de la formule est positif, tandis que le second membre est nul. Donc nous avons

$$(5) \quad C_1 C_2 \dots C_n \neq 0$$

Il résulte du raisonnement précédent aussi que les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ doivent être tous distincts, ce qui veut dire que le déterminant de Vandermonde,

$$(6) \quad V(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$$

En écrivant que la formule (2) est vérifiée lorsque la fonction $f(x)$ est remplacée par

$$(7) \quad Q_n(x), xQ_n(x), \dots, x^{n-1}Q_n(x)$$

nous avons, en tenant compte des formules (4), les équations

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} C_1 & Q_n(x_1) & + & C_2 & Q_n(x_2) & + & \dots + C_n & Q_n(x_n) & = & 0 \\ C_1 x_1 & Q_n(x_1) & + & C_2 x_2 & Q_n(x_2) & + & \dots + C_n x_n & Q_n(x_n) & = & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots \end{array}$$

$$C_1 x_1^{n-1} Q_n(x_1) + C_2 x_2^{n-1} Q_n(x_2) + \dots + C_n x_n^{n-1} Q_n(x_n) = 0$$

que nous considérons comme un système linéaire et homogène en $Q_n(x_1), Q_n(x_2), \dots, Q_n(x_n)$. D'après les relations (5) et (6) le déterminant de ce système n'est pas nul, et par suite le système n'a que la solution banale

$$Q_n(x_1) = 0, Q_n(x_2) = 0, \dots, Q_n(x_n) = 0,$$

ce qui veut dire que les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la formule (2) sont les racines réelles, distinctes et comprises entre a et b du polynôme $Q_n(x)$.

3. Nous allons mettre maintenant en évidence une propriété des coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$ de la formule (2), liée aux valeurs des polynômes $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)$ sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$, racines du polynôme $Q_n(x)$.

Écrivons pour cela que la formule (2) est vérifiée lorsque la fonction $f(x)$ est remplacée par

$$(9) \quad Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)$$

Nous aurons le système

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccc} C_1 & + & C_2 & + & \dots & + & C_n & = & 1 \\ C_1 Q_1(x_1) & + & C_2 Q_1(x_2) & + & \dots & + & C_n Q_1(x_n) & = & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ C_1 Q_{n-1}(x_1) & + & C_2 Q_{n-1}(x_2) & + & \dots & + & C_n Q_{n-1}(x_n) & = & 0. \end{array}$$

pour déterminer les coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$.

En ajoutant aux conditions (4), la condition

$$(11) \quad \int_a^b p(x) x^n Q_n(x) dx = 1.$$

les coefficients du polynôme $Q_n(x)$ sont déterminés. On sait que le déterminant

$$(12) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \int_a^b p(x) dx & \int_a^b p(x) x dx & \dots & \int_a^b p(x) x^{n-1} dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_a^b p(x) x^{n-1} dx & \int_a^b p(x) x^n dx & \dots & \int_a^b p(x) x^{2n-2} dx \end{vmatrix}$$

est positif et il résulte que le coefficient de x^n dans $Q_n(x)$ est $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}$.

Il résulte alors que le déterminant du système (10) n'est pas nul parce que

$$(13) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ Q_1(x_1) & Q_1(x_2) & \dots & Q_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_{n-1}(x_1) & Q_{n-1}(x_2) & \dots & Q_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_n} V(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Nous déduisons que les coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont égaux aux compléments algébriques des éléments de la première ligne du déterminant (13) divisés par la valeur de ce déterminant.

4. Dans un autre travail nous reviendrons sur cette démonstration pour l'étendre à d'autres formules de la forme (2) en remplaçant le premier membre de la formule, par une autre fonctionnelle de f .

Reçu le 19. XI. 1963

CONTRIBUTIONS À L'ANAMORPHOSE DE LA FORMULE DU COEFFICIENT DE VITESSE C (CHÉZY) ET À LA VÉRIFICATION GRAPHOANALYTIQUE DE LA CAPACITÉ D'ÉVACUATION DES CANAUX OUVERTS EN RÉGIME UNIFORME

par

S. A. MUNTEANU et M. VIDRAȘCU

à Brașov

Les calculs des sections des canaux et le contrôle de la capacité d'évacuation de ceux-ci, s'effectuent à présent sous la forme analytique, en utilisant les formules fondamentales du mouvement uniforme, donc en admettant la constance des paramètres hydrauliques au long du courant :

$$(1) \quad v = C \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

$$(2) \quad Q = \omega \cdot v = \omega \cdot C \cdot \sqrt{R \cdot i}$$

où :

- v est la vitesse moyenne dans la section (m/s);
- C — le coefficient de vitesse (Chézy) ($m^{0.5}/s$);
- ω — la surface mouillée (m^2);
- R — le rayon hydraulique (m);
- i — la pente de la ligne d'énergie, égale ici à la pente piéométrique i_p et à la pente géodésique I ;
- Q — le débit (m^3/s).

Au point de vue énergétique, ceux-ci expriment la constance des pertes de charge linéaire par unité de longueur du courant, l'énergie spécifique de la section H restant constante dans n'importe quelle section, et