

SUR LA CONVERGENCE DE CERTAINES SUITES DE FONCTIONS

par

ELENA POPOVICIU-MOLDOVAN

à Cluj

1. Dans ce travail nous étudierons quelques propriétés qui résultent de la monotonie d'une suite de fonctions, la monotonie qui intervient ici étant une relation de semi-ordre par rapport à un cône, tel que nous la définirons plus loin.

Nous envisagerons quelques cônes particuliers qui interviennent dans la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur.

Un ensemble K de l'espace linéaire et normé E est dit un cône [3] si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) K est fermé (par rapport à la norme de E).
- (b) On a $u, v \in K \Rightarrow \alpha u + \beta v \in K$, quels que soient les nombres réels non-négatifs α, β .
- (c) Si $u \neq \theta$ (élément nul de E), alors l'un au moins des éléments $u, -u$ de E n'appartiennent pas à K .

Si les conditions (a), (b) sont vérifiées, mais non pas nécessairement la condition (c), K s'appelle un *clin*. Par exemple, l'ensemble des fonctions non-décroissantes de l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues sur l'intervalle fini et fermé $[a, b]$ est un clin. Dans le même espace, l'ensemble des fonctions non-négatives et non-décroissantes est un cône. La norme dans $C[a, b]$ est la norme uniforme, donc la norme $\|f\|$ de $f \in C[a, b]$ est définie par l'égalité $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$.

2. Nous désignerons par $K_{(l_1, l_2, \dots, l_m)}^+$ ($m \geq 1$) l'ensemble de $C[a, b]$ formé par les fonctions qui sont non-concaves de chacun des ordres $l_1, l_2, \dots, l_m$. Dans cette notation on peut toujours supposer $-1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_m$. Ainsi $K_{(-1)}^+$ est le cône des fonctions non-négatives de $C[a, b]$,

$K_{(-1, n)}^+$ le cône des fonctions continues non-négatives et non-concaves d'ordre n de $C[a, b]$, $K_{(n)}^+$ où $n \geq 0$ le clin des fonctions continues non-concaves d'ordre n définies sur $[a, b]$, etc. En général $K_{(l_1, l_2, \dots, l_m)}^+$ est un cône si $l_1 = -1$, mais seulement un clin si $l_1 \geq 0$. On peut définir, de la même manière, l'ensemble $K_{(l_1, l_2, \dots, l_m)}^-$ des fonctions de $C[a, b]$ qui sont non-convexes de chacun des ordres $l_1, l_2, \dots, l_m$. C'est encore un cône si $l_1 = -1$ et seulement un clin si $l_1 \geq 0$.

Dans la terminologie et la notation précédentes la non-concavité (non-convexité) d'ordre $n \geq -1$ d'une fonction $f \in C[a, b]$ signifie la propriété que la différence divisée $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$ de cette fonction est non-négative (non-positive) sur tout groupe de $n+2$ noeuds distincts $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ de $[a, b]$.

Pour la relation de semi-ordre par rapport au cône $K \subseteq E$ nous employons le signe $\leq^K$ et cette relation est définie de la manière suivante :

si $u, v \in E$, on a $u \leq^K v$ si et seulement si $v - u = w \in K$.

Au lieu de $u \leq^K v$ on peut écrire $v \geq^K u$.

Les mêmes définitions et notations s'appliquent [1] à un clin. Dans ce cas la relation n'est pas antisymétrique.

Par exemple, $f(x) \leq^{K_{(-1, n)}^+} g(x)$ signifie que la différence $h(x) = g(x) - f(x)$ appartient au cône $K_{(-1, n)}^+$ et cette propriété est équivalente à la non-négativité de $h(x)$ et au fait que

$$(1) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; h] = [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; g - f] \geq 0$$

sur tout groupe de $n+2$ points distincts $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ de $[a, b]$.

Dans (1) le signe $\geq$ remplace le signe $\geq^{R^+}$ où R^+ est le cône des nombres réels non-négatifs. La même notation simplifiée sera employée dans le cas du cône $K_{(-1)}^+$ des fonctions non-négatives de $C[a, b]$, à moins que cela ne se prête pas à des confusions.

3. De l'inégalité (1) résulte une propriété d'intersection qui a lieu si $g(x) - f(x) = h(x) \in K_{(n)}^+$.

L e m m e 1. Si $f(x) \leq^{K_{(n)}^+} g(x)$, la différence $h(x) = g(x) - f(x)$ s'annule, en changeant de signe, sur au plus $n+2$ points de (a, b) .

La démonstration est immédiate si nous remarquons que $h(x)$ étant une fonction non-concave d'ordre n sur (a, b) , la différence divisée du

premier membre de (1) ne peut devenir négative. Mais si $h(x)$ s'annule en changeant de signe sur $n+3$ points de (a, b) , alors on peut trouver $n+2$ points distincts de (a, b) sur lesquels la différence divisée de $h(x)$ soit négative.

De (1) il résulte, compte tenant de la linéarité de la différence divisée,

que si $f(x) \leq^{K_{(n)}^+} g(x)$, alors nous avons aussi

$$(2) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; g] \geq [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$$

sur tout groupe de $n+2$ points distincts $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ de $[a, b]$.

On en déduit que si $f(x) \leq^{K_{(-1, 0, 1, \dots, n)}^+} g(x)$, on a

$$(3) \quad [x_1, x_2, \dots, x_k; f] \leq [x_1, x_2, \dots, x_k; g]$$

pour tout groupe de k points distincts $x_1, x_2, \dots, x_k$ de $[a, b]$ et ceci pour $k = 1, 2, \dots, n+2$.

4. Nous dirons que la suite de fonctions $(f_m(x))_{m=1}^\infty$ est monotone relativement au semi-ordre par rapport au clin (ou cône) K , ou bien plus simplement par rapport au clin (ou cône) K si $f_m(x) \leq^K f_{m+1}(x)$, $m = 1, 2, \dots$

Pour donner un exemple, soit $f \in C[a, b]$ et $(c_m)_{m=1}^\infty$ une suite croissante de nombres positifs. La suite de fonctions $(f(x) + c_m)_{m=1}^\infty$ (ici c_m est la constante qui prend la valeur c_m) est monotone par rapport à tout cône $K_{(-1, 0, 1, \dots, n)}^+$ où n est un entier donné quelconque ≥ -1 .

La suite de fonctions $(m \cos x)_{m=1}^\infty$ n'est pas monotone par rapport au cône $K_{(-1)}^+$, ou $K_{(-1)}^-$ de $C[0, \pi]$, mais est monotone par rapport au clin $K_{(0)}^-$, puisque

$$[x_1, x_2; (m+1) \cos x] \leq [x_1, x_2; m \cos x], \quad m = 1, 2, \dots$$

quels que soient les points distincts x_1, x_2 de $[0, \pi]$. La même propriété est valable si au lieu de $\cos x$ nous prenons une fonction quelconque $f \in C[a, b]$ non-croissante (ou s'il s'agit du clin $K_{(0)}^+$, une fonction quelconque non-décroissante) et si au lieu de $[0, \pi]$ nous prenons un intervalle quelconque $[a, b]$.

5. Nous pouvons nous poser des problèmes de la convergence d'une suite monotone par rapport à un cône (ou un clin) K lorsque cette suite est bornée. La propriété d'être bornée peut s'entendre ou bien dans le sens de la norme (les termes de la suite sont également bornés en norme) ou bien dans le sens du semi-ordre par rapport au cône (ou au clin) considéré.

La suite $(f_m(x))_{m=1}^{\infty}$ est bornée dans ce sens si l'existe un $f \in C[a, b]$ pour lequel $f_m(x) \leq_K f(x)$ pour tout m . Par exemple la suite $(x^{m-1})_{m=1}^{\infty}$ de $C[0, 1]$ est monotone par rapport au cône $K_{(-1)}^-$ et est bornée dans le sens du semi-ordre par rapport à ce cône, puisque dans ce cas $f_m(x) \leq_{K_{(-1)}^-} 0$, $m = 1, 2, \dots$. La suite considérée n'est pas convergente au sens de la norme de $C[0, 1]$.

6. La monotonie par rapport au cône $K_{(-1,0)}^+ \subseteq C[a, b]$ est une propriété plus forte que la monotonie par rapport au cône $K_{(-1)}^+ \subseteq C[a, b]$. Dans le cas du cône $K_{(-1,0)}^+$ nous avons le

THÉOREME. Si la suite $(f_m(x))_{m=1}^{\infty}$ de $C[a, b]$ est monotone par rapport au cône $K_{(-1,0)}^+$ et si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1° il existe un $f \in C[a, b]$ tel que $f_m(x) \leq_{K_{(-1,0)}^+} f(x)$, $m = 1, 2, \dots$
 - 2° la suite $(\Delta_1[f])_{m=1}^{\infty}$ est bornée,
- alors la suite $(f_m(x))_{m=1}^{\infty}$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.

Dans l'énoncé nous avons

$$\Delta_1[g] = \sup | [x_1, x_2; g] |,$$

le supremum étant relatif à tout groupe de deux points distincts x_1, x_2 de $[a, b]$. Lorsque $\Delta_1[g]$ est fini on dit que la fonction g est à différence divisée d'ordre 1 bornée.

Pour la démonstration nous utilisons les deux propriétés suivantes : la limite d'une suite de fonctions à différence divisée d'ordre 1 également bornée sur $[a, b]$ et convergente sur chaque point de $[a, b]$ est une fonction à différence divisée d'ordre 1 bornée.

Toute fonction à différence divisée d'ordre 1 bornée sur $[a, b]$ est continue sur cet intervalle.

Remarquons que de la condition 1° il résulte que

$$(4) \quad f_m(x) \leq f(x), \quad x \in [a, b], \quad m = 1, 2, \dots$$

De la monotonie par rapport à $K_{(-1,0)}^+$ il résulte que

$$(5) \quad f_m(x) \leq f_{m+1}(x), \quad x \in [a, b], \quad m = 1, 2, \dots$$

et

$$(6) \quad [x_1, x_2; f_m] \leq [x_1, x_2; f_{m+1}], \quad m = 1, 2, \dots$$

sur tout groupe de 2 points distincts x_1, x_2 de $[a, b]$.

De (4) et (5) il résulte que la suite $(f_m(x))_{m=1}^{\infty}$ est bornée supérieurement et étant non-décroissante est convergente sur tout point de $[a, b]$. Désignons par g la fonction limite. De (6) et de la condition 2° il résulte que la suite $([x_1, x_2; f_m])_{m=1}^{\infty}$ converge sur tout groupe de deux points distincts x_1, x_2 de $[a, b]$. La limite est d'ailleurs égale à $[x_1, x_2; g]$. Il en résulte que la fonction g est continue sur $[a, b]$. D'après un théorème de Dini [2] la suite $(f_m(x))_{m=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $g(x)$ sur $[a, b]$.

Comme une conséquence on déduit une propriété analogue pour le cône $K_{(-1,n)}^+$ pour un n donné (≥ 0) quelconque. L'énoncé de cette propriété résulte du théorème démontré plus haut, en remplaçant $K_{(-1,0)}^+$ par $K_{(-1,n)}^+$ et dans la condition 2° la suite $(\Delta_1[f_m])_{m=1}^{\infty}$ par $(\Delta_n[f_m])_{m=1}^{\infty}$ où $\Delta_n(g) = \sup |[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; g]|$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Day M. M., *Normed linear spaces* (traduction en langue russe, Moscou, 1961).
- [2] Hobson E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable*, 1907.
- [3] Krasnoselski M. A., *Polozitelnie reshenia operatornih uravnenia*, Moskva, 1962

Reçu le 30. IV. 1965.