

SUR LA NOTION DE CONVEXITÉ DANS LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS*

par

Elena POPOVICIU-MOLDOVAN

à Cluj.

1. Dans cet article nous allons étendre la notion de convexité et certaines propriétés des fonctions convexes d'ordre supérieur, aux distributions (fonctions généralisées). Dans la suite nous partons de la définition des distributions donnée par I. MIKUSINSKI et R. SIKORSKI [1] et nous considérons uniquement des distributions d'ordre fini dans le sens de ces auteurs.

2. Nous allons d'abord rappeler, toujours d'après I. MIKUSINSKI et R. SIKORSKI [1] la notion de suite fondamentale, sur laquelle est basée la définition de la distribution :

(a). La suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions continues sur l'intervalle (A, B) est dite fondamentale, s'il existe un entier $k \geq 0$ et une suite $\{F_n(x)\}$ de fonctions continues sur (A, B) tels que

$$(1) \quad F_n^{(k)}(x) = f_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

et la suite $\{F_n(x)\}$ converge presque uniformément sur (A, B) .

Dans cette définition on suppose que $-\infty \leq A < B \leq \infty$ et dans le premier membre de (1) figurent les dérivées d'ordre k des fonctions $F_n(x)$ (la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle même). La convergence presque uniforme de la suite $\{F_n(x)\}$ sur (A, B) signifie que cette suite converge uniformément sur tout sous-intervalle compact de (A, B) . Si $F(x)$ est la limite de la suite $\{F_n(x)\}$ presque uniformément convergente, nous écrivons $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$ et si les suites $\{F_n(x)\}$, $\{G_n(x)\}$ convergent presque uniformément vers la même limite nous écrivons $F_n(x) \rightrightarrows F(x) \leftarrow G_n(x)$, ou bien aussi $F_n(x) \rightrightarrows \leftarrow G_n(x)$, lorsqu'il est inutile de mettre en évidence la fonction limite commune $F(x)$.

*) ce travail a été présenté au colloque d'Analyse fonctionnelle de Bucarest en septembre 1962.

Dans la suite nous ne considérons que des fonctions définies sur l'intervalle (A, B) . L'indice n des suites considérées parcourt la suite des nombres naturels $1, 2, \dots$

(b). Deux suites fondamentales $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ sont dites équivalentes si et seulement s'il existe un entier $k \geq 0$ et deux suites $\{F_n(x)\}, \{G_n(x)\}$ tels que

$$(2) \quad F_n^{(k)}(x) = f_n(x), \quad G_n^{(k)}(x) = g_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

et

$$(3) \quad F_n(x) \Rightarrow \Leftarrow G_n(x).$$

On emploie le signe $\sim$ pour l'équivalence ainsi définie des suites. Donc si les suites $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ sont équivalentes nous écrivons $\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\}$.

(c). Toute classe de suites fondamentales équivalentes est une distribution (fonction généralisée). Un élément de la classe est dit une représentante de la distribution respective.

Lorsqu'il n'y a pas danger de confusion, on peut désigner une distribution par une seule lettre.

3. Dans [1] on a démontré que toute distribution d a une représentante $\{P_n(x)\}$ dont les termes $P_n(x)$ sont des polynômes. On peut obtenir une telle représentante en utilisant les polynômes de Bernstein. En effet, soit $\{f_n(x)\}$ une représentante de la distribution d et soient k l'entier et $\{F_n(x)\}$ la suite qui figurent dans la définition (a). Soit $F(x)$ la limite de la suite $\{F_n(x)\}$. C'est une fonction continue sur (A, B) . Le polynôme

$B_n[F; x; [a, b]] = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{\alpha=0}^n \binom{n}{\alpha} F\left(a + \alpha \frac{b-a}{n}\right) (x-a)^\alpha (b-x)^{n-\alpha}$ est le polynôme de Bernstein de degré n de la fonction $F(x)$ et correspondant à l'intervalle (fermé) $[a, b]$ ($a < b$). Considérons la suite décroissante $\{a_n\}$ et la suite croissante $\{b_n\}$ de nombres tels que $a_n < b_n$, $n = 1, 2, \dots$, $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$ pour $n \rightarrow \infty$. De la convergence uniforme de la suite $\{B_n[F; x; [a, b]]\}$ sur $[a, b]$ vers $F(x)$, il résulte qu'on peut trouver une suite d'indices $\{j_n\}$, croissante et tendant vers ∞ de manière que la suite $\{B_{j_n}[F; x; [a_n, b_n]]\}$ converge presque uniformément vers $F(x)$ sur (A, B) .

De la définition (b) de l'équivalence des suites il résulte que la suite $\{B_{j_n}^{(k)}[F; x; [a_n, b_n]]\}$ est une représentante de la distribution d . Nous dirons qu'une telle représentante est une représentante polynomiale du type (B).

4. Si la fonction $F(x)$ est convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe respectivement concave d'un certain ordre sur (A, B) , alors sur tout sous-intervalle $[a_n, b_n]$ le polynôme $B_{j_n}[F; x; [a_n, b_n]]$ jouit, pour j_n suffisamment grand, de la même propriété de convexité [5]. Une fonction $f(x)$ est convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe respectivement concave d'ordre l (≥ -1), suivant que la différence divisée (d'ordre $l+1$)

de $f(x)$ reste $>, \geq, =, \leq$ respectivement < 0 sur tout groupe de $l+2$ points (distincts) de l'intervalle de définition de la fonction $f(x)$ [4]. La limite d'une suite convergente de fonctions non-concaves (non-convexes) d'ordre l sur un intervalle est une fonction non-concave (non-convexe) d'ordre l sur cet intervalle.

Nous utiliserons les propriétés, bien connues, des fonctions convexes d'ordre supérieur et de leurs dérivées de divers ordres.

En particulier, la dérivée d'ordre $l+1$ (supposée existente) d'une fonction non-concave (non-convexe) d'ordre l est non-négative (non-positive). Si une fonction a une dérivée d'ordre $l+1$ positive (négative), elle est convexe (concave) d'ordre l .

5. Sur l'entier $k \geq 0$ qui figure dans les définitions, (a), (b) on peut faire quelques remarques. Soit $k_0 = k_0(\{f_n(x)\})$ la plus petite valeur de k dans la définition (a), pour une suite fondamentale donnée $\{f_n(x)\}$. Il existe alors une suite $\{F_{0,n}(x)\}$ de fonctions continues sur (A, B) telles que $F_{0,n}^{(k_0)}(x) = f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ et $F_{0,n}(x) \Rightarrow F_0(x)$. La fonction limite $F_0(x)$ est bien déterminée, à un polynôme additif de degré $k_0 - 1$ près. De même, si $\{f_n(x)\} \sim \{g_n(x)\}$ le nombre k de la définition (b) a un minimum ≥ 0 égal à $k_{0,0} = k_{0,0}(\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\})$. Le nombre $k_{0,0}$ jouit d'une propriété analogue à celle de k_0 .

6. Considérons la distribution qui a comme une représentante la suite $\{c\}$ avec tous ses termes égaux à la constante c . Nous la désignerons par $[c]$ et nous dirons que c'est une distribution constante.

L e m m e 1. Si $c > 0$, la distribution constante $[c]$ n'a aucune représentante $\{g_n(x)\}$, dont les termes soient tous négatifs.

Supposons le contraire, donc que $\{g_n(x)\}$ soit une représentante de $[c]$ avec $g_n(x) < 0$, $x \in (A, B)$ $n = 1, 2, \dots$. Il existe alors l'entier $k \geq 0$ et les suites $\{G_n(x)\}, \{e_n(x)\}$ de manière que

$$(4) \quad G_n^{(k)}(x) = g_n(x) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(5) \quad e_n^{(k)}(x) = c, \quad n = 1, 2, \dots$$

et

$$G_n(x) \Rightarrow F(x) \Leftarrow e_n(x).$$

De (5) il résulte que $e_n(x)$ sont des polynômes de degré k dont le plus haut coefficient est égal à $\frac{c}{k!}$. La fonction limite $F(x)$ est donc un polynôme de la même forme. De l'hypothèse $g_n(x) < 0$, $x \in (A, B)$, $n = 1, 2, \dots$ et de (4) il résulte que les fonctions $G_n(x)$ sont concaves d'ordre $k-1$. Leur limite $F(x)$ est donc non-convexe d'ordre $k-1$. Mais la différence

divisée d'ordre k de $F(x)$ (polynome de degré k) est constamment égale à $\frac{c}{k!}$ qui doit donc être ≤ 0 , ce qui contredit l'hypothèse $c > 0$.

Le raisonnement est valable aussi pour $k = 0$. Dans ce cas la suite $\{g_n(x)\}$ converge presque uniformément sur (A, B) vers la constante positive c . Nous ne pouvons donc avoir $g_n(x) < 0$, $x \in (A, B)$, $n = 1, 2, \dots$

Parmi les représentantes de la distribution constante $[0]$ il existe des suites ayant tous leurs termes positifs et aussi des suites ayant tous leurs termes négatifs.

7. **L e m m e 2.** Si la distribution d , différente de la distribution $[0]$, a une représentante $\{f_n(x)\}$ dans laquelle tous les termes sont positifs, alors elle n'a aucune représentante avec des termes tous négatifs.

Supposons le contraire et soit alors $\{g_n(x)\}$ une représentante de d ayant tous ses termes négatifs sur (A, B) . Il existe un entier $k \geq 0$ et les suites de fonctions $\{F_n(x)\}$, $\{G_n(x)\}$ tels que

$$(7) \quad F_n^{(k)}(x) = f_n(x) > 0, \quad x \in (A, B), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(8) \quad G_n^{(k)}(x) = g_n(x) < 0, \quad x \in (A, B), \quad n = 1, 2, \dots$$

et

$$(9) \quad F_n(x) \rightrightarrows F(x) \leftrightsquigarrow G_n(x).$$

De (7) et (9) il résulte que la fonction limite $F(x)$ est non-concave d'ordre $k - 1$ et de (8) et (9) que cette fonction est non-convexe d'ordre $k - 1$. Il en résulte que $F(x)$ est un polynome de degré $k - 1$ sur (A, B) . Mais si $F(x)$ est un polynome de degré $k - 1$ sur (A, B) , la suite fondamentale $\{F_n(x)\}$ est équivalente avec la suite fondamentale $\{F(x)\}$ avec tous les termes égaux à $F(x)$ donc $\{F_n(x)\} \sim \{F(x)\}$. Il en résulterait que $\{F_n^{(k)}(x)\} \sim \{F^{(k)}(x)\}$, donc $\{f_n(x)\} \sim \{F^{(k)}(x)\}$, ce qui est impossible puisque $F^{(k)}(x) = 0$ et, par hypothèse, $d \neq [0]$.

Remarquons que le cas $k = 0$ n'est pas exclu, un polynome de degré -1 étant un polynome identiquement nul.

Le lemme 2 est donc démontré.

8. **Définition 1.** La distribution d est dite **non-négative** respectivement **non-positive** si elle a une représentante $\{f_n(x)\}$, s'il existe la suite décroissante $\{\alpha_n\}$ et la suite croissante $\{\beta_n\}$ de nombres, telles que $\alpha_n < \beta_n$, $n = 1, 2, \dots$ et $\alpha_n \rightarrow A$, $\beta_n \rightarrow B$, pour $n \rightarrow \infty$ et si $f_n(x) \geq 0$, $x \in [\alpha_n, \beta_n]$, $n = 1, 2, \dots$, respectivement $f_n(x) \leq 0$, $x \in [\alpha_n, \beta_n]$, $n = 1, 2, \dots$. Il en résulte qu'une distribution qui a une représentante $\{f_n(x)\}$ avec $f_n(x) > 0$, $x \in (A, B)$, $n = 1, 2, \dots$, est non-négative.

On peut remarquer que la propriété exprimée par le lemme 2 peut être étendue aux distributions non-négatives. Nous avons notamment le

L e m m e 3. Si d est une distribution non-négative, différente de la distribution constante $[0]$, elle n'a aucune représentante $\{g_n(x)\}$ telle que $g_n(x) \leq 0$, $x \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, où $[a_n, b_n] \subset (A, B)$, la suite de nombres $\{a_n\}$ étant décroissante et la suite de nombres $\{b_n\}$ croissante et $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$, pour $n \rightarrow \infty$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.

On montre d'abord que d ne peut avoir une représentante avec tous les termes négatifs sur (A, B) .

Considérons maintenant une représentante $\{f_n(x)\}$ de d ayant tous les termes non-négatifs sur les intervalles respectifs $[\alpha_n, \beta_n]$ et supposons que, contrairement à ce qu'on veuille démontrer, d ait aussi une représentante $\{g_n(x)\}$ dont les termes soient non-positifs sur les intervalles $[a_n, b_n]$ respectifs. On suppose que les extrémités des intervalles $[\alpha_n, \beta_n]$, $[a_n, b_n]$ vérifient les conditions de la définition 1 et du lemme 3. Remarquons qu'à tout n il correspond un indice j_n tel que $[\alpha_n, \beta_n] \subset [a_{j_n}, b_{j_n}]$. Pour montrer l'inexistence de la suite $\{g_n(x)\}$, nous pouvons appliquer aux suites fondamentales $\{f_n(x)\}$ et $\{g_n(x)\}$, le raisonnement utilisé à la démonstration du lemme 2.

On peut démontrer une propriété analogue pour les distributions non-positives. D'ailleurs, si d est une distribution non-négative, son opposée $-d$ est une distribution non-positive et réciproquement et la propriété en résulte.

9. Du lemme 3 il résulte qu'une distribution ne peut être en même temps non-négative et non-positive, sans se réduire à la distribution constante $[0]$.

De la définition 1 il résulte aussi que la mise en évidence des distributions non-négatives et non-positives revient à la considération des distributions qui ont des représentantes $\{f_n(x)\}$ dont les termes $f_n(x)$ sont de signe invariable (sont tous non-négatifs ou tous non-positifs) sur les intervalles $[\alpha_n, \beta_n]$ correspondants de la forme spécifiée dans la définition. Le lemme 3 nous montre que si une telle distribution est différente de la distribution constante $[0]$, elle a parmi les représentants avec des termes de signe invariable seulement $[0]$, elle a parmi les représentants avec des termes non-négatifs sur $[\alpha_n, \beta_n]$ des représentantes $\{f_n(x)\}$ avec des $f_n(x)$ tous non-négatifs sur $[\alpha_n, \beta_n]$ ou bien seulement des représentantes $\{f_n(x)\}$ avec des $f_n(x)$ tous non-positifs sur $[\alpha_n, \beta_n]$. La suite des intervalles $[\alpha_n, \beta_n]$ dépend, en général, de la représentante $\{f_n(x)\}$ considérée.

Une distribution de signe invariable (donc non-négative ou non-positive) peut avoir aussi des représentantes $\{f_n(x)\}$ dans lesquelles les termes $f_n(x)$ ne sont pas tous de signe constant. De même une distribution qui a une représentante $\{f_n(x)\}$ avec les $f_n(x)$ (tous) positifs (tous négatifs) sur (A, B) pour $n = 1, 2, \dots$, peut aussi avoir des représentantes vérifiant les propriétés des distributions non-négatives (non-positives) de la définition, ayant les termes non-négatifs (non-positifs) pouvant aussi s'annuler sur certains points de l'intervalle (A, B) .

10. Les définitions et les propriétés exposées jusqu'ici étaient relatives au comportement de la classe des suites fondamentales qui définissent une distribution, par rapport au cône K_+ des fonctions non-négatives de l'espace $C_{(A,B)}$ des fonctions continues sur (A, B) . Ce point de vue est susceptible d'être étendu en prenant au lieu de K_+ un autre cône convenable.

11. Lemme 4. Si une distribution d , qui ne se réduit pas à un polynôme de degré l , a une représentante $\{f_n(x)\}$ dont les termes $f_n(x)$ sont tous convexes du même ordre $l \geq -1$ sur (A, B) alors cette distribution d n'a aucune représentante $\{g_n(x)\}$ dont les termes $g_n(x)$ soient tous concaves d'ordre l sur (A, B) .

La démonstration est basée sur la propriété des suites convergentes de fonctions convexes d'un même ordre d'avoir une limite non-concave du même ordre.

Supposons le contraire, donc qu'une représentante $\{g_n(x)\}$ de la forme indiquée dans le lemme existe. Il existerait alors un entier $k \geq 0$ et les suites de fonctions continues $\{F_n(x)\}$, $\{G_n(x)\}$ tels que

$$(10) \quad F_n^{(k)}(x) = f_n(x), \quad G_n^{(k)}(x) = g_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

et

$$(11) \quad F_n(x) \rightrightarrows H(x) \leftarrow G_n(x).$$

Il résulte, des hypothèses faites sur les fonctions $f_n(x)$, $g_n(x)$, que $H(x)$ est en même temps non-concave d'ordre $k+l$ et non-convexe d'ordre $k+l$, donc est un polynôme de degré $k+l$. La suite fondamentale $\{H^{(k)}(x)\}$ dont les termes sont tous égaux au polynôme $H^{(k)}(x)$ de degré l est équivalente à la suite $\{f_n(x)\}$ et la distribution d se réduit à un polynôme de degré l , ce qui est par hypothèse impossible.

Une propriété analogue subsiste pour les distributions ayant une représentante avec des termes tous concaves du même ordre $l \geq -1$.

Pour $l = -1$ on retrouve le lemme 2.

12. Définition 2. Une distribution qui ne se réduit pas à un polynôme de degré $l \geq -1$ est dite **non-concave** respectivement **non-convexe** d'ordre $l \geq -1$ si elle a une représentante $\{f_n(x)\}$ dont les termes $f_n(x)$ sont tous non-concaves respectivement non-convexes d'ordre l sur l'intervalle $[\alpha_n, \beta_n] \subset (A, B)$, $n = 1, 2, \dots$, les suites de nombres $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ayant la même structure que dans la définition 1.

On a aussi le

Lemme 5. Si d est une distribution non-concave d'ordre l ($l \geq -1$), différente d'un polynôme de degré l , elle n'a aucune représentante $\{g_n(x)\}$ telle que $g_n(x)$ soit non-convexe d'ordre l sur $[\alpha_n, \beta_n]$, les suites $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ayant la même structure que dans le lemme 3.

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.

Une propriété analogue a lieu pour les distributions non-convexes d'ordre l .

Une distribution qui ne se réduit pas à un polynôme de degré l ne peut être en même temps non-concave d'ordre l et non-convexe d'ordre l .

Les remarques qui suivent le lemme 3 peuvent être étendues au lemme 5.

Pour $l = -1$ nous retrouvons les propriétés relatives aux distributions non-négatives et non-positives, donc aux distributions de signe invariable.

Une distribution non-concave d'ordre 0 respectivement non-convexe d'ordre 0 peut être appelée une distribution non-décroissante respectivement non-croissante. Le cas $l = 0$ est donc celui des distributions qu'on peut appeler monotones.

13. Dans le travail cité de I. MIKUSINSKI et R. SIKORSKI [1], on a défini les dérivées de divers ordres d'une distribution. Nous pouvons alors étudier le comportement des dérivées des distributions jouissant d'une propriété de convexité d'un certain ordre donné.

Si $\{P_n(x)\}$ est une représentante à termes polynomiaux de la distribution d , la suite $\{P_n^{(l)}(x)\}$ est une suite fondamentale et est la représentante de la dérivée d'ordre l , $d^{(l)}$ de la distribution d . Si $\{f_n(x)\}$ est une représentante de la distribution d , $k_0 = k_0(\{f_n(x)\})$ et si $\{F_n(x)\}$ est une suite de fonctions telles que $F_n^{(k_0)}(x) = f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$, alors de la non-concavité d'ordre l des fonctions $f_n(x)$ sur l'intervalle $[\alpha_n, \beta_n]$, $n = 1, 2, \dots$, il résulte que la représentante $\{B_{j_n}^{(k_0)}[F; x; [\alpha_n, \beta_n]]\}$ a ses termes non-concaves d'ordre l et les polynômes $B_{j_n}^{(k_0)}[F; x; [\alpha_n, \beta_n]]$ ont leurs dérivées d'ordre $l+1$ non-négatives sur $[\alpha_n, \beta_n]$.

Une propriété analogue a lieu pour les distributions non-convexes d'un certain ordre donné l .

14. Nous pouvons donc énoncer les

THÉOREME 1. Si la distribution d est non-concave (non-convexe) d'ordre l ($l \geq -1$), alors la distribution $d^{(l+1)}$ (dérivée d'ordre $l+1$ de d) est non-négative (non-positive).

THÉOREME 2. Si la fonction continue $f(x)$ a une dérivée d'ordre $l+1$ (dans le sens généralisé) non-négative (non-positive), alors $f(x)$ est non-concave (non-convexe) d'ordre l .

THÉOREME 3. Si la fonction continue $f(x)$ est non-concave (non-convexe) d'ordre l (dans le sens habituel), alors la distribution avec laquelle elle coïncide est une distribution non-concave (non-convexe) d'ordre l .

THÉOREME 4. Si d est une distribution non-concave (non-convexe) d'ordre l , qui se réduit à la fonction continue $f(x)$, alors $f(x)$ est une fonction non-concave (non-convexe) d'ordre l .

Pour la démonstration soit $\{f_n(x)\}$ une représentante de d avec des termes $f_n(x)$ non-concaves (non-convexes) d'ordre l sur les intervalles correspondants $[\alpha_n, \beta_n]$. Si la suite $\{f_n(x)\}$ est presque uniformément convergente sur (A, B) , sa limite est la fonction $f(x)$, qui est donc non-concave (non-convexe) d'ordre l . Si $\{f_n(x)\}$ n'est pas presque uniformément convergente, nous utiliserons la propriété que de la non-concavité (non-convexité) d'ordre l de d il résulte la non-négativité (non-positivité) de sa dérivée généralisée $d^{(l+1)}$ d'ordre $l+1$. Il en résulte que la représentante du type (B) de la distribution d a des termes non-concaves (non-convexes) d'ordre l et converge presque uniformément vers $f(x)$, donc que $f(x)$ est non-concave (non-convexe) d'ordre l .

THÉOREME 5. Si $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$ est une suite convergente de distributions toutes non-concaves (non-convexes) d'ordre l , la distribution limite est aussi non-concave (non-convexe) d'ordre l .

La convergence est celle définie dans [1]. Si $\{f_{m,n}(x)\}$ sont des représentantes des distributions d_m , la suite considérée des distributions a la limite d s'il existe un entier $k \geq 0$ une fonction continue $F(x)$ et une suite $\{F_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ de fonctions continues tels que la suite fondamentale ayant tous ses termes égaux à $F_m^{(k)}(x)$ soit équivalente à la suite fondamentale $\{f_{m,n}(x)\}$ et ceci pour $m = 1, 2, \dots$, la suite $\{F_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ converge presque uniformément vers $F(x)$ et la dérivée généralisée $F^{(k)}(x)$ de $F(x)$ soit égale à la distribution d .

15. Dans le travail cité [1] on donne des exemples de distributions par des représentantes correspondantes. Ainsi la distribution pour laquelle

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-nx}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

est non-décroissante.

La distribution $\delta(x)$ de Dirac, avec la représentante

$$f_n(x) = \frac{n^2}{2} \left[\left| x + \frac{1}{n} \right| + \left| x - \frac{1}{n} \right| - 2|x| \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

est non-négative.

Dans les deux exemples $A = -\infty$, $B = \infty$.

16. L'idée de ce travail, de classer les distributions d'après l'allure de convexité de leurs représentantes, peut être étendue, en remplaçant

les hypothèses de convexité par d'autres hypothèses analogues, plus générales, exprimées par l'allure de certaines fonctionnelles différentes des différences divisées. Une telle généralisation peut être obtenue en considérant la convexité d'une fonction par rapport à un ensemble interpolatoire donné [2,3].

Les résultats de ce travail peuvent être étendus aux distributions d'ordre infini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Mikusinski I., Sikorski R., *Théorie élémentaire des fonctions généralisées*. I. (en russe), 1959.
- [2] Moldovan Elena, *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate*. Studii și Cerc. Științifice, Cluj, 6, 3-4, 65-73 (1955).
- [3] — *Sur une généralisation des fonctions convexes*. Mathematica, 1(24) 49-80, (1959).
- [4] Popoviciu T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Mathematica, 8, 1-85 (1934).
- [5] — *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica, 10, 49-54 (1934).

Reçu le 5. V. 1961.