

SUR LES CLASSES D'ENSEMBLES INTERPOLATOIRES QUI SONT COMPARABLES PAR RAPPORT A LEUR n -VALENCE

par

ELENA POPOVICIU-MOLDOVAN

à Cluj

1. Dans un travail antérieur [4] nous avons donné la définition de la relation de n -valence de deux ensembles interpolatoires d'un même ordre n . Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions continues sur un intervalle fini et fermé $[a, b]$ est interpolatoire d'ordre n sur $[a, b]$, ou du type $I_n[a, b]$, si pour toute suite de n points distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $[a, b]$ et quel que soient les nombres coorespondants $y_1, y_2, \dots, y_n$, il existe un et un seul $\varphi \in \mathcal{F}$ tel que $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. La même définition s'applique, au lieu de l'intervalle $[a, b]$, à un ensemble quelconque de l'axe réel.

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite, voir [1], n -valente par rapport à un ensemble $\mathcal{F}$ du type $I_n[a, b]$ si, quel que soit $g \in \mathcal{F}$, la différence $f(x) - g(x)$ s'annule sur au plus n points de $[a, b]$. Cette notion de n -valence et les propriétés qui seront utilisées dans ce travail sont contenues dans les travaux [1, 2, 3, 5].

Nous disons [4] que l'ensemble $\mathcal{F}$ du type $I_n[a, b]$ est n -valent par rapport à l'ensemble $\mathcal{G}$ du même type si tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont n -valents par rapport à $\mathcal{G}$. Cette relation entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est symétrique et nous pouvons l'écrire sous la forme $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Dans ce travail nous appliquerons nos résultats antérieurs [4] à quelques exemples et nous étudierons, en particulier, les propriétés de l'ensemble de tous les ensembles du type $I_n[a, b]$ qui sont n -valents par rapport à un ensemble donné du type $I_n[a, b]$.

2. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble du type $I_n[a, b]$ et désignons par $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ l'ensemble de tous les ensembles du type $I_n[a, b]$ qui sont n -valents par rapport à $\mathcal{F}$, donc

$$(1) \quad \mathcal{H} \in \mathcal{V}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{F}.$$

Nous disons que $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ est un ensemble ou une classe de n -valence [4]. Pour simplifier nous désignerons par $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$ l'ensemble des fonctions qui sont éléments ou bien de $\mathcal{F}$ ou bien d'un élément de la classe $\mathcal{V}(\mathcal{F})$.

Donnons d'abord quelques exemples.

Nous désignerons par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble de tous les polynômes de degré n et par $\mathcal{P}_n(a_i = A_i, a_i = A_2, \dots, a_i = A_l)$ l'ensemble des polynômes $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ dans lesquels les coefficients $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_l}$ ont respectivement les valeurs données $A_1, A_2, \dots, A_l$, les autres coefficients prenant des valeurs réelles quelconques.

L e m m e 1. *L'ensemble $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{P}_n)\}$, ($n \geq 0$), contient tous les polynômes de degré $n + 1$.*

On voit toute de suite que $\mathcal{V}(\mathcal{P}_n)$ contient tous les ensembles $\mathcal{P}_{n+1}(a_0 = A)$, où A a une valeur donnée différente de zéro. L'ensemble $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{P}_n)\}$ contient donc tous les polynômes de degré $n + 1$. Pour $A \neq 0$ on a $\mathcal{P}_{n+1}(a_0 = A) \times \mathcal{P}_n$. Ici on peut supposer que l'ensemble sur lequel a lieu la propriété interpolatoire soit tout l'axe réel.

L e m m e 2. *L'ensemble $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{P}_n)\}$ contient aussi des fonctions qui ne sont pas des polynômes.*

En effet, si $n = 0$, il suffit de considérer l'ensemble de tous les fonctions de la forme $f(x) + c$, où $f(x)$ est une fonction strictement monotone qui ne se réduit pas à un polynôme (est, par exemple, la fonction $2\left(x - \frac{a+b}{2}\right) -$

$\left|x - \frac{a+b}{2}\right|$) et c une constante réelle quelconque. Cet ensemble est interpolatoire d'ordre 1 sur un intervalle de stricte-monotonie de f (par exemple, l'intervalle $[a, b]$) et est univalent par rapport à $\mathcal{P}_0$. On peut remplacer $[a, b]$ par un intervalle quelconque, fini ou non, fermé ou non (dans l'exemple donné on peut prendre au lieu de $\frac{1}{2}(a+b)$ un point intérieur quelconque de l'intervalle). Pour $n > 0$, il suffit d'appliquer la même idée, choisissant une fonction $f(x)$ convexe (ou concave) d'ordre n et construisant l'ensemble des fonctions $f(x) + P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme quelconque de degré n . L'ensemble ainsi construit est interpolatoire d'ordre $n + 1$ sur un intervalle de convexité (ou de concavité) d'ordre n de la fonction $f(x)$ et est $(n + 1)$ -valent par rapport à $\mathcal{P}_n$. Il est facile de voir qu'on peut choisir la fonction $f(x)$ de manière qu'elle ne se réduise pas à un polynôme sur l'intervalle considéré.

3. Pour un ensemble $\mathcal{F}$ du type $I_n[a, b]$ donné, on peut se poser le problème de trouver, pour un ensemble interpolatoire de fonctions, des critères d'appartenance ou de non-appartenance à $\mathcal{V}(\mathcal{F})$.

De même, on peut se poser le problème d'examiner si $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$ contient ou non un sous-ensemble interpolatoire d'ordre supérieur à celui de $\mathcal{F}$.

L'exemple suivant nous montrera que de tels problèmes se posent naturellement. L'ensemble $\mathcal{P}_2(a_0 = 1, a_1 = 0)$ des polynômes de la forme $x^2 + c$ est interpolatoire d'ordre 1 sur l'intervalle $[-1, 1]$ et $\mathcal{P}_0$ est aussi du type $I_1[-1, 1]$. Mais la relation $\mathcal{P}_2(a_0 = 1, a_1 = 0) \times \mathcal{P}_0$ n'est pas vérifiée. Pourtant les deux ensembles appartiennent à la même classe d'univalence $\mathcal{V}(\mathcal{P}_1(a_0 = 2))$, l'intervalle d'interpolation étant $[-1, 1]$. Une construction analogue peut être étendue à l'ensemble $\mathcal{P}_n$, avec un indice n quelconque.

Le lemme 1 nous montre qu'il existe un ensemble interpolatoire $\mathcal{F}$, tel que $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$ contient un sous-ensemble interpolatoire d'un ordre plus grand que celui de $\mathcal{F}$.

4. Nous allons démontrer le

THÉORÈME 1. *Si $\mathcal{F}$ est un ensemble du type $I_n[a, b]$ où $n \geq 1$, alors l'ensemble $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$ ne contient aucun sous-ensemble du type $I_{n+2}[a, b]$.*

En effet, dans le cas contraire, si $g(x)$ est un élément de $\mathcal{F}$, $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ sont $n + 2$ points distincts de $[a, b]$ et $y_1, y_2, \dots, y_{n+2}$ sont $n + 2$ nombres tels que

$$\operatorname{sg}[g(x_i) - y_i] = -\operatorname{sg}[g(x_{i+1}) - y_{i+1}] \neq 0, i = 1, 2, \dots, n + 1$$

il existerait un élément $\varphi(x)$ de $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$ tel que

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n + 2.$$

Alors, par suite de la continuité, la différence $f(x) - g(x)$ s'annulerait sur au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$, ce qui contredit la définition de $\mathcal{V}(\mathcal{F})$.

5. Nous allons utiliser la notion d'épi [4]. Considérons un ensemble $\mathcal{F}$ du type $I_n[a, b]$ et désignons par $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ un sous-ensemble de $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ et par $\mathcal{S}\{\mathcal{H}(\mathcal{F})\}$ l'ensemble des fonctions qui appartiennent ou bien à $\mathcal{F}$ ou bien à l'un des éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$. Considérons alors les points

$$(2) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

de $[a, b]$ et les nombres

$$(3) \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

correspondants

Définition 1. L'ensemble des éléments de $\mathcal{E}\{\mathcal{H}(\mathcal{F})\}$ qui sur les points (2) prennent les valeurs (3) respectives s'appelle un épi de l'ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ et nous le désignons par

$$(4) \quad S \left\{ \mathcal{H}(\mathcal{F}); \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{matrix} \right\}.$$

L'épi (4) contient un élément et un seul de chacun des éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ et aussi de $\mathcal{F}$.

Définition 2. Si l'épi contient, pour tout point $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ et pour tout nombre y_0 donnés, un élément et un seul qui prend la valeur y_0 sur x_0 , nous disons que cet épi est interpolatoire d'ordre 1.

Cette propriété interpolatoire de l'épi (4) a lieu sur l'ensemble $[a, b] - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Nous utiliserons la notion d'épi pour préciser certaines propriétés de l'ensemble $\mathcal{E}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$.

6. THÉORÈME 2. Si $\mathcal{F}$ est un ensemble du type $I_n[a, b]$ et si :

1° il existe un ensemble $\mathcal{Q}$ du type $I_{n+1}[a, b]$ qui a un ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ de sous-ensembles chacun n -valents par rapport à $\mathcal{F}$,

2° quels que soient les points (2) de $[a, b]$ et les nombres (3), l'épi (4) est interpolatoire d'ordre 1,

alors $\mathcal{E}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$ a un sous-ensemble du type $I_{n+1}[a, b]$.

L'ensemble $\mathcal{Q}$ étant du type $I_{n+1}[a, b]$ les éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont deux à deux n -valents l'un par rapport à l'autre. Ceci signifie que deux éléments différents de $\mathcal{E}\{\mathcal{H}(\mathcal{F})\}$ coïncident sur au plus n points distincts de $[a, b]$. Ensuite, quels que soient les points

$$(5) \quad t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$$

de $[a, b]$ et quels que soient les nombres

$$(6) \quad u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$$

l'ensemble $\mathcal{E}\{\mathcal{H}(\mathcal{F})\}$ contient un élément et un seul qui prend sur les points (5) les valeurs correspondantes (6). En effet, considérons l'épi

$$(7) \quad S \left\{ \mathcal{H}(\mathcal{F}); \begin{matrix} t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n} \\ u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n} \end{matrix} \right\}$$

où $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n+1$.

Par hypothèse, l'épi (7) est interpolatoire d'ordre 1, donc pour l'indice i , $1 \leq i \leq n+1$ différent de tous les indices $i_1, i_2, \dots, i_n$, cet épi contient

une fonction et une seule $\varphi_i(x) = \varphi_i \left(\begin{matrix} t_1, t_2, \dots, t_{n+1} \\ u_1, u_2, \dots, u_{n+1} \end{matrix}; x \right)$ qui sur le point t_i prend la valeur u_i . Cette fonction φ_i est indépendante de la suite partielle $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}$ de (5) que l'on prend pour la formation de l'épi (7). En effet, si nous prenons une autre suite partielle (croissante) $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_n}$ qui contient le point t_i , mais non le point t_{j_i} , l'épi

$$(8) \quad S \left\{ \mathcal{H}(\mathcal{F}); \begin{matrix} t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_n} \\ u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_n} \end{matrix} \right\}$$

contient une fonction et une seule $\varphi_j(x) = \varphi_j \left(\begin{matrix} t_1, t_2, \dots, t_{n+1} \\ u_1, u_2, \dots, u_{n+1} \end{matrix}; x \right)$ qui sur t_j prend la valeur u_j . La fonction φ_j de (7) appartient à l'épi (8) et prend la valeur u_j sur t_j . La propriété interpolatoire d'ordre 1 de l'épi (8) nous montre que la fonction $\varphi_j(x)$ doit coïncider avec la fonction $\varphi_i(x)$.

Le théorème est donc démontré.

7. Pour donner un exemple considérons la suite $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ de fonctions continues sur $[a, b]$ et formant un système de Tchebycheff sur cet intervalle. Soit $g_{n+1}(x)$ une fonction continue de manière que $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), g_{n+1}(x)$ forment également un système de Tchebycheff sur $[a, b]$. On connaît des conditions sous lesquelles on peut trouver une telle fonction $g_{n+1}(x)$ [6]. Soit $\mathcal{Q}_k$ l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Alors $\mathcal{Q}_n$ est du type $I_n[a, b]$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ du type $I_{n+1}[a, b]$. Dans ce cas $\mathcal{Q}_{n+1}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}\{\mathcal{V}(\mathcal{Q}_n)\}$. En effet, pour tout A constant donné, l'ensemble des fonctions de la forme $Ag_{n+1}(x) + f(x)$, où $f \in \mathcal{Q}_n$ est du type $I_n[a, b]$ et est n -valent par rapport à $\mathcal{Q}_n$ si $A \neq 0$. Il appartient donc à $\mathcal{V}(\mathcal{Q}_n)$. Ceci signifie que $\mathcal{Q}_{n+1} \subseteq \mathcal{E}\{\mathcal{V}(\mathcal{Q}_n)\}$.

8. THÉORÈME 3. Si $\mathcal{F}$ est un ensemble du type $I_n[a, b]$ et si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° il existe un ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ de sous-ensembles de $\mathcal{E}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$ qui sont n -valents par rapport à $\mathcal{F}$ et deux à deux n -valents l'un par rapport à l'autre,

2° tout épi $S \left\{ \mathcal{H}(\mathcal{F}); \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{matrix} \right\}$ est interpolatoire d'ordre 1, au sens de la définition 2,

alors $\mathcal{E}\{\mathcal{V}(\mathcal{F})\}$ a un sous-ensemble du type $I_{n+1}[a, b]$.

Pour la démonstration, remarquons que, en vertu de l'hypothèse 1°, il existe l'épi de la forme (4) pour toute suite (2) et tout système de nombres (3). En admettant aussi l'hypothèse 2° de l'énoncé, la démonstration est analogue à celle du théorème 2.

Pour donner un exemple considérons l'ensemble $\mathcal{P}_n$ et soit $f(x)$ une fonction convexe d'ordre n sur $[a, b]$. Il est clair que $\mathcal{P}_n$ est du type $I_{n+1}[a, b]$. L'ensemble $\mathcal{Q}_\alpha(f)$ des fonctions de la forme $\alpha f(x) + P(x)$, où $P \in \mathcal{P}_n$ et α est une constante est du type $I_{n+1}[a, b]$ pour tout α fixé. Nous avons $\mathcal{Q}_\alpha(f) \not\subset \mathcal{P}_n$ si $\alpha \neq 0$. La condition 2° du théorème 3 est vérifiée, l'ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{P}_n)$ étant formé par tous les ensembles $\mathcal{Q}_\alpha(f)$, $\alpha \neq 0$ (la fonction f étant donnée). Remarquons que $\mathcal{S}\{\mathcal{V}(\mathcal{P}_n)\}$ a un sous-ensemble du type $I_{n+2}[a, b]$ dont les éléments sont de la forme $\alpha f(x) + P(x)$ où $P \in \mathcal{P}_n$ et α prend toutes les valeurs réelles.

9. Les exemples que nous avons donnés, nous les avons liés à des ensembles interpolatoires qui interviennent souvent dans la théorie de l'interpolation et de la meilleure approximation. Nous pouvons donner d'autres exemples formés par des fonctions vérifiant une équation différentielle et dans ce cas la comparaison de leurs ensembles interpolatoires ont des répercussions sur des problèmes polilocaux pour les équations différentielles. Nous reviendrons dans un autre travail sur ces questions et aussi sur le problème de la meilleure approximation par des fonctions appartenant à une classe de n -valence.

10. Soulignons que dans cette théorie de la comparaison des ensembles interpolatoires un rôle important joue le fait que si pour deux ensembles $\mathcal{F}, \mathcal{Q}$ du type $I_n[a, b]$ a lieu la relation $\mathcal{F} \not\subset \mathcal{Q}$, il existe des fonctions de $\mathcal{F}$ qui peuvent être remplacées par des fonctions convenables de $\mathcal{Q}$. Si $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{Q}$ et si la différence $f(x) - g(x)$ s'annule sur n points, désignons par $\mathcal{I}(f; \mathcal{Q})$ respectivement par $\mathcal{I}(g; \mathcal{F})$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{Q}$ qui coïncident avec $f(x)$ sur n points, respectivement l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ qui coïncident avec $g(x)$ sur n points. Si $\mathcal{F}^*(f) = \mathcal{F} - \mathcal{I}(g; \mathcal{F})$, $\mathcal{Q}^*(g) = \mathcal{Q} - \mathcal{I}(f; \mathcal{Q})$, les ensembles $\mathcal{F}^*(f) \cup \mathcal{I}(f; \mathcal{Q})$ et $\mathcal{Q}^*(g) \cup \mathcal{I}(g; \mathcal{F})$ sont du type $I_n[a, b]$.

11. Considérons un ensemble $\mathcal{F}$ du type $I_n[a, b]$ et la classe de n -valence $\mathcal{V}(\mathcal{F})$. Nous avons le

THÉOREME 4. Si $\mathcal{L} \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$ et si $\mathcal{L}$ est un ensemble sous- $\mathcal{F}$ (sur- $\mathcal{F}$), alors $\mathcal{V}(\mathcal{L})$ contient tous les éléments de $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ qui sont sur- $\mathcal{F}$ (sous- $\mathcal{F}$).

La démonstration est immédiate en vertu de la propriété suivante [4]: si $f(x)$ est une fonction $\mathcal{F}$ -convexe ($\mathcal{F}$ -concave) et $\mathcal{L}$ est un ensemble sous- $\mathcal{F}$ (sur- $\mathcal{F}$) alors $f(x)$ est $\mathcal{L}$ -convexe ($\mathcal{L}$ -concave).

Remarquons aussi que de $\mathcal{L} \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$, si $\mathcal{L}$ est sur- $\mathcal{F}$ (sous- $\mathcal{F}$) il résulte que l'ensemble $\mathcal{U}(\mathcal{F}; \mathcal{L}) = \mathcal{V}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{L})$ contient tous les ensembles qui sont sous- $\mathcal{F}$ (sur- $\mathcal{F}$), l'ensembles $\mathcal{F}$ et tous les ensemble sur- $\mathcal{L}$ (sous- $\mathcal{L}$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Moldovan Elena, *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate*, Studii si Cercetari știintifice, Cluj, 6, 3-4, 67-75 (1955).
- [2] — *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime de funcții interpolatoare*, Studii si Cercetări de Matematică, IX, 1-4, 161-224 (1958).
- [3] — *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica, 1 (24), 1, 49-80 (1959).
- [4] Popoviciu — Moldovan Elena, *Introduction à l'étude comparative des ensembles de fonctions interpolatoires*, Mathematica, 6 (29), 1, 145-155 (1964).
- [5] Popoviciu Tiberiu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (I)*, Mathematica, 12, 81-92 (1936).
- [6] Rutman M. A., *Integralnoe predstavlenie funkții obrazuiuşih riad Markova*, D.A.N. 164, 989-992 (1965).

Reçu le 30. IV. 1965