

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

EXTRAS

9

TOMUL 17
1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

O TEOREMĂ RELATIVĂ LA REZOLVABILITATEA PROBLEMEI DE INTERPOLARE LACUNARĂ¹⁾

DE

A. B. NÉMETH

(Cluj)

În Nota de față se generalizează la familii interpolatoare problema de interpolare lacunară formulată de G. D. Birkhoff în [1] pentru polinoame algebrice. Se enunță o teoremă relativă la rezolvabilitatea problemei formulate.

Notăm cu $\mathcal{C}[a, b]$ spațiul funcțiilor reale și continue definite pe intervalul $[a, b]$. Fie $\mathcal{F}$ o submulțime a acestui spațiu, avînd forma $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, unde F_n este o familie interpolatoare n parametrică definită pe $[a, b]$. În cele ce urmează vom presupune că F_v pentru $v \leq 0$ se reduce la funcția identic nulă pe $[a, b]$.

Definim operatorul $B: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ în următorul fel:

1. B este liniar (aditiv și omogen) pe fiecare din $F_v \subset \mathcal{F}$;
2. $B(F_n) = F_{n-s}$;
3. Dacă $\varphi \neq 0$, $\varphi \in F_n$ are $h \geq ks$ rădăcini distincte, atunci B_φ^k nu este identic nul. Prin B_φ^k înțelegem aplicarea repetată de k ori a operatorului B la funcția φ .

Un operator care posedă proprietățile 1, 2 și 3 este operatorul de diferențiere în cazul cînd familiile interpolatoare F_n sînt generate de baze de forma:

$$1, x, \dots, x^{n-1}$$

În acest caz $B = D^s$, unde D este operatorul de diferențiere.

¹⁾ Comunicare prezentată la Sesiunea științifică din 11–12 decembrie 1964 a Academiei R.P.R. — Filiala Cluj

Problema generală de B -interpolare se formulează în următorul fel :

Fie date punctele axei reale $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$, numerele arbitrare y_i , $i = 1, \dots, n$, precum și numerele întregi nenegative k_i , $i = 1, \dots, n$. Să se determine funcția $\varphi \in F_n$ avînd proprietățile

$$(1) \quad B^{k_i} \varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Spunem că problema (1) de B -interpolare are soluție dacă există un singur element cu proprietățile cerute.

Problema (1) de B -interpolare este complet caracterizată de perechile :

$$(k_i, x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Într-adevăr din liniaritatea lui B urmează :

LEMĂ. Problema (1) de B -interpolare are soluție dacă și numai dacă matricea

$$|| B^{k_i} \varphi_j(x_i) ||_{i, j=1, \dots, n}$$

este nesingulară.

Prin $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se înțelege o bază oarecare a spațiului F_n .

Problema de B -interpolare formulată mai sus nu are totdeauna soluție nici chiar în cazul simplu cînd B este operatorul de diferențiere, iar F_n este mulțimea polinoamelor de grad cel mult $n-1$. În acest caz, B -interpolarea revine la interpolarea lacunară cunoscută [1]. Exemple de probleme de interpolare lacunară fără soluție sînt date în lucrările [2] și [3].

Date fiind numerele k_i , $i = 1, \dots, n$, vom zice că sînt fixate ordinele operatoriale ale B -interpolării.

DEFINIȚIE Un sistem de ordine operatoriale se numește nedegenerat, dacă se poate determina cel puțin un sistem de puncte x_i , $i = 1, \dots, n$, astfel ca problema de interpolare (1) să fie rezolvabilă.

Prima problemă care ne-am pus-o referitoare la B -interpolarea formulată mai sus este următoarea : În ce condiții sistemul de ordine operatoriale k_i , $i = 1, \dots, n$, ale B -interpolării cu operatorul B avînd proprietățile 1, 2 și 3 formează un sistem nedegenerat. Am demonstrat următoarea :

TEOREMĂ Condiția necesară și suficientă pentru ca ordinele operatoriale k_i , $i = 1, \dots, n$ ale unei B -interpolări cu $s \geq 1$ să formeze sistem nedegenerat, este ca să avem :

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left(n - j - p \left\{ k_i \mid k_i > \frac{j}{s} \right\} \right) \neq 0.$$

Cu $p(A)$ se notează numărul elementelor din mulțimea finită A .

Pentru demonstrarea necesității s-au folosit numai condițiile 1 și 2 impuse asupra operatorului B . Suficiența se poate de asemenea demonstra în condiții mai generale decît cele de la punctele 1, 2 și 3. Aceste condiții

sînt însă mai complicate și nu au importanță din punctul de vedere al cazurilor concrete la care se aplică teorema. La demonstrarea teoremei drept punct de plecare se folosește lema enunțată mai sus.

Aplicînd teorema la cazul concret al interpolării lacunare, ajungem la următorul

COROLAR *Condiția necesară și suficientă pentru ca ordinele de derivare k_i , $i = 1, \dots, n$, ale unei probleme de interpolare lacunară să formeze sistem nedegenerat este să fie îndeplinită condiția*

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left(n - j - p \left\{ k_i \mid k_i > j \right\} \right) \neq 0 .$$

Problema care se ridică în urma condițiilor impuse operatorului B este următoarea :

Date fiind două familii interpolatoare F_n și F_{n-s} există oare totdeauna un operator $B : F_n \rightarrow F_{n-s}$ care să verifice condițiile 1, 2 și 3? Dacă există un asemenea operator, atunci în ce condiții va admite o prelungire în sensul ca să existe un subspațiu $\mathcal{C}^{(B)}[a, b] \subset \mathcal{C}[a, b]$ astfel ca $B(\mathcal{C}^{(B)}[a, b]) = \mathcal{C}[a, b]$?

Primită la redacție la 29 mai 1965

*Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România — Filiala Cluj*

BIBLIOGRAFIE

1. G. D. BIRKHOFF, *General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature* Trans. Amer. Math. Soc., **7**, 107—136 (1906).
2. J. SURÁNYI, P. TURÁN, *Notes on interpolation I.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **6**, 66—79 (1955).
3. A. B. NÉMETH, *Interpolare cu lacune pe noduri distincte.* St. cerc. mat. (Cluj), **14**, 111—122 (1963).