

SUR LE MODE DE CONVERGENCE D'UN PROCÈS ITÉRATIF

par

VASILE PETEANU

à Cluj

Dans un travail antérieur nous avons introduit la notion de centre généralisé de symétrie d'une figure plane convexe, relatif à deux directions orthogonales. Nous allons rappeler deux des définitions données à ce propos.

Définition 1. On appelle courbe de symétrie d'une figure plane convexe relativement à une certaine direction, le lieu géométrique des milieux des cordes de la figure convexe parallèles à cette direction.

Si l'on considère le plan comme rapporté à un système cartésien orthogonal, la courbe de symétrie relative à la direction Oy peut s'exprimer par une équation $y = f(x)$. Pareillement, la courbe de symétrie relative à la direction Ox peut s'exprimer par une autre équation $x = g(y)$.

Définition 2. Un point intérieur à la figure convexe considérée, dont les coordonnées vérifient le système d'équations

$$y = f(x)$$

$$x = g(y)$$

sera appelé centre généralisé de symétrie de la figure convexe relativement au système xOy considéré.

Dans le travail cité nous avons démontré que, quel que soit le point de départ $M_0(x_0, y_0)$ intérieur au domaine convexe, le processus itératif

$$(1) \quad y_{i+1} = f(x_i)$$

$$x_{i+1} = g(y_{i+1})$$

converge.

Le présent travail met en évidence deux propriétés des suites (1) d'approximations successives.

THÉOREME 1. Si dans le processus itératif (1) on a $x_i < x_{i+1}$ alors $x_i < x_{i+2}$.

Démonstration. Nous supposons d'abord $x_i = x_{i+2}$. On peut, sans restreindre la généralité, supposer $x_i = 0$, $y_{i+1} = 0$, $x_{i+1} = 1$, $y_{i+2} = 1$, $x_{i+2} = 0$. Il résulte de la définition des fonctions $f(x)$ et $g(y)$ qu'il existe quatre valeurs strictement positives α , β , γ , δ , telles que les points

$$(2) \quad \begin{array}{ll} A(0, \alpha) & B(0, -\alpha) \\ C(1, 1 + \beta) & D(1, 1 - \beta) \\ E(-\gamma, 1) & F(\gamma, 1) \\ G(1 - \delta, 0) & H(1 + \delta, 0) \end{array}$$

soient situés sur la frontière de la figure convexe. (Fig. 1). Si on désigne par $P(EA)$ la valeur absolue de la pente de la droite déterminée par les

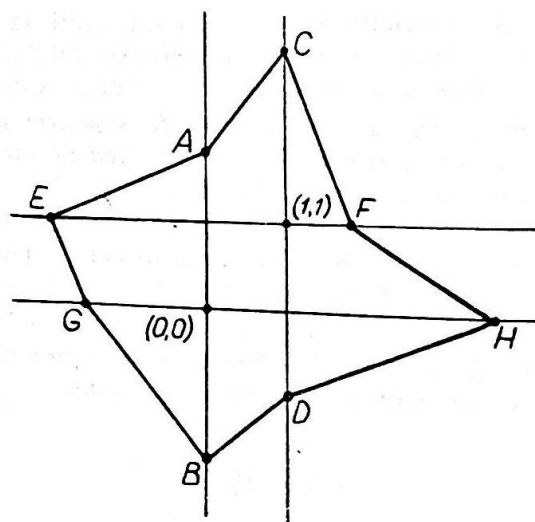


Fig. 1

deux points et pareillement par $P(AC)$... ainsi de suite, alors la condition pour que les points (2) soient situés sur la frontière d'une figure convexe, revient aux inégalités suivantes :

$$(3) \quad \begin{array}{l} P(EA) \geq P(AC) \\ P(FH) \geq P(CF) \\ P(EG) \geq P(GB) \\ P(DH) \geq P(BD) \end{array}$$

Mais

$$\begin{array}{ll} P(EA) = \frac{\alpha - 1}{\gamma}, & P(AC) = |1 + \beta - \alpha| \\ P(FH) = \frac{1}{|1 + \delta - \gamma|}, & P(CF) = \frac{\beta}{\gamma - 1} \\ P(EG) = \frac{1}{|1 + \gamma - \delta|}, & P(GB) = \frac{\alpha}{\delta - 1} \\ P(DH) = \frac{\beta - 1}{\delta}, & P(BD) = |1 + \alpha - \beta| \end{array}$$

En portant ces valeurs dans (3), nous obtenons

$$\frac{\alpha - 1}{\gamma} \geq \beta - (\alpha - 1)$$

$$\frac{\beta - 1}{\delta} \geq \alpha - (\beta - 1)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\beta} \geq \delta - (\gamma - 1)$$

$$\frac{\delta - 1}{\alpha} \geq \gamma - (\delta - 1)$$

On en déduit immédiatement,

$$(4) \quad \begin{array}{l} (\alpha - 1)(\gamma + 1) \geq \beta\gamma \\ (\beta - 1)(\delta + 1) \geq \alpha\delta \\ (\gamma - 1)(\beta + 1) \geq \delta\beta \\ (\delta - 1)(\alpha + 1) \geq \alpha\gamma \end{array}$$

En multipliant les inégalités (4) terme à terme on obtient

$$(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1)(\delta^2 - 1) \geq \alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2.$$

La dernière inégalité est évidemment impossible à réaliser, par conséquent $x_i \neq x_{i+2}$.

Supposons maintenant $x_i > x_{i+2}$. En ce cas, par rapport à la situation précédente, seules les abscisses des points E et F seront changées, (plus précisément diminuées). Les inégalités (3) pourront d'autant moins être vérifiées, ce qui démontre le théorème.

Observation. Si $x_i > x_{i+1}$ alors $x_i > x_{i+2}$.

THÉORÈME 2. Si $x_i \neq x_{i+1}$ alors $x_i \neq x_{i+3}$.
Démonstration. Supposons, pour préciser,

$$(5) \quad x_i < x_{i+1}$$

et admettons que

$$(6) \quad x_i = x_{i+3}.$$

Il en résulte alors

$$(7) \quad x_{i+2} < x_{i+1}$$

vu qu'au cas contraire, on en déduirait, conformément au théorème 1, $x_{i+1} < x_{i+3}$ ce qui contredit les relations (5) et (6). De ces relations (1) et (6) il résulte immédiatement

$$(8) \quad x_{i+1} = x_{i+4}.$$

On déduit enfin de (5), conformément au théorème 1, $x_i < x_{i+2}$, et en tenant compte de (6)

$$(9) \quad x_{i+3} < x_{i+2}.$$

Les relations (7), (8), et (9) conduisent à la double inégalité

$$x_{i+3} < x_{i+2} < x_{i+4}$$

qui contredit elle aussi le théorème 1; par conséquent, l'égalité (6) est impossible.

Observation. Les théorèmes 1 et 2 restent vrais aussi pour la suite de valeurs $\{y_i\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Peteanu V., *Simultaneous equations, for which the iterative process is convergent*. Mathematica. Cluj, 6 (29), 1, 101 - 104 (1964).
 Reçu le 15. XII. 1964.

UN PROBLÈME D'INTERPOLATION DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES^{*}

par

DUMITRU RIPIANU

à Cluj

1. Dans le présent travail on détermine les éléments „minimaux” d'un certain ensemble attaché aux équations différentielles linéaires du second ordre.

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des équations différentielles linéaires du second ordre, de la forme

$$(1) \quad y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0,$$

où $p_i(x)$ ($i = 1, 2$) parcourent l'ensemble des fonctions continues dans un intervalle donnée $[0, l]$. On désigne par le terme „équation (E)” un élément quelconque de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une équation (1) et par $\mathcal{H}$ l'ensemble des équations (E) qui ont la propriété que leurs intégrales qui s'annulent pour $x = 0$ ont dans l'intervalle $[0, l]$ au moins une racine positive. On désigne par h_E la plus petite de ces racines positives, relatives à une équation (E) $\in \mathcal{H}$ donnée, et qui change en général quand on change d'équation. On désigne enfin par m_i la quantité $\max_{x \in [0, h_E]} |p_i(x)|$ — étant entendu que

l'équation (E) $\in \mathcal{H}$ est donnée par les coefficients $p_i(x)$ qui donnent les m_i ($i = 1, 2$) — et par $\mathcal{A}$ l'ensemble des paires de nombres positifs a_1 et a_2 qui ont la propriété que la relation suivante, du type de de la Vallée-Poussin

$$(2) \quad 1 \leq a_1 m_1 h_E + a_2 m_2 h_E^2$$

a lieu pour chaque équation (E) de $\mathcal{H}$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est borné inférieurement et évidemment non borné supérieurement (si $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$, alors toute paire $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ avec $\bar{a}_i \geq a_i$

^{*}) Ce travail a été publié sous une forme légèrement modifiée, en langue roumaine, dans la revue „Studii și cercetări de matematică (Cluj) tome XIV, No. 1 et 2 (1963); il y est réparti en trois notes.