Рассуждая, далее так же как и в первом случае, заменяя только теорему Пэли на теорему Хаусдорфа-Юнга, получаем:

$$\mathcal{J}_4 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{(r-1/q)\theta-1}\ E^{\theta}_{k-1}(\varphi)_{q'}\right)^{1/\theta} \leqslant C_1\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{(r-1/q)\theta-1}\left(\sum_{|n|\geqslant k}|\alpha_k|^q\right)^{\theta/q}\right)^{1/\theta} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{(r-1/q)\theta-1}\left(\sum_{|n|\geqslant k}|C_n|^q\ e^{|n|\delta q}\right)^{\theta/q}\right)^{1/\theta} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\left(\sum_{|n|=1}^{\infty}|C_n|^q\ e^{|n|\delta q}\left(\sum_{k=1}^{|n|} k^{(r-1/q)\theta-1}\right)^{q/\theta}\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_4\left(\sum_{|n|=1}^{\infty} E^{q}_{|n|-1}(f)_p\ e^{|n|\delta q}\ |n|^{rq-1}\right)^{1/q} < \infty.$$

А это означает, что $\varphi(x) \in B^{(r-1/q)}_{q',\theta}{}_{*}$.

Теперь теорема 6 доказана полностью.

Заметим, что так же как в работе [2], (см. [2], стр. 128—129), можно привести примеры, показывающие, что теорема 6 не может быть усилена в терминах B — классов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Никольский С. М., *О равномерных дифференциальных свойствах аналитической функции в полосе*, Mathematica (Cluj), **2 (25)**, *1*, 149—157 (1960).

[2] Никольский С. М. и Потапов М. К., *О граничных свойствах функций аналитических в полосе*, Mathematica (Cluj), **4 (27)** *1*, 123—130 (1962.)

[3] Walsh I. L. and Sewell W. E., *On the degree of polynomial approximation to analytic functions: Problem B*. Transactions of the American Mathematical Society, **49**, *3*, 229—257 (1941).

[4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, М.-Л., 1939.

[5] Lorentz G. G., *Fourier-Koeffizienten und Frunktionenklassen*, Mathematische Zeitschrift, **51**, 135—149 (1948).

[6] Конюшков А. А., *О классах Липшица*. Изв. АН СССР, серии матем., **21**, *3*, 423—448 (1957).

[7] Бесов О. В., *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*. Труды МИ АН СССР им. В. А. Стеклова, **LX**, 42—81 (1961).

[8] Бесов О. В., *О некоторых условиях принадлежности к $\mathcal{L}_q$ производных периодических функций*, Научные доклады высшей школы, Физ.-мат. науку, **1**, 13—17 (1959).

Поступило, 15. XII. 1965.

MATHEMATICA VOL. 7 (30), 2, 1965, pp. 357—373

SUR LE PROBLÈME BILOCAL POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

par

DUMITRU RIPIANU

Cluj

1. Dans cette note on traite le problème suivant:

On considère l'équation différentielle linéaire de l'ordre n

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)}(x) = 0 \tag{1}$$

dans l'hypothèse suivante:

(2) *Les coefficients $a_i(x)$ sont des fonctions continues et à dérivées bornées en valeur absolue par un nombre fixe dans l'intervalle* $[0, \infty)$ *et quand x parcourt cet intervalle, le point M de coordonnées $\beta_i = a_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ décrit un certain domaine borné et fermé D de l'espace euclidéen à n dimensions rapporté aux axes $O_{\beta_1\beta_1\ldots\beta_n}$.*

On suppose que la frontière S du domaine D possède dans chaque points un plan tangent unique, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \beta_i}\right)^2 > 0$ dans chaque point de S, où $F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$ est l'équation de la frontière et, de plus, que $F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ sont des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sur S $(i = \overline{1,n})$. Le domaine D étant fermé, il comprend sa frontière.

On désignera par commodité par $a(x)$ la fonction — vecteur de composantes $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$, par E_a l'équation (1) et par $R[f(x)]$ ou $R[f]$ la plus petite racine positive de la fonction $f(x)$, qui est supposée définie et continue dans l'intervalle $[0, \infty)$; si $f(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$, on écrira par convention $R[f] = \infty$.

On dira que la fonction-vecteur $a(x)$ possède la propriété (2) si les fonctions $a_i(x) (i = \overline{1, n})$ possèdent cette propriété et on désignera par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $a(x)$ qui possèdent cette propriété.

On désignera par L un ensemble de n nombres donnés l_i $(i = \overline{0, n-1})$ $L = (l_0, l_1, \ldots, l_{n-1})$ et par $\varphi_{a,L}(x)$ l'intégrale de l'équation E_a pour laquelle

$$\varphi^{(i)}_{a,L}(0) = l_i \; (i = \overline{0, n-1}). \tag{3}$$

On fixera un nombre p de la suite $0, 1, \ldots, n-2$ et on désignera par $(0, \lambda_{p,D,L})$ l'intervalle de longueur maximale dans lequel $\varphi^{(p)}_{a,L}(x) \neq 0$, quelle que soit la fonction-vecteur $a(x)$ de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Le problème en question consiste dans la détermination du nombre $\lambda_{p,D,L} > 0$, (qui sera quelque fois désigné par commodité par λ ou λ_p).

Dans le paragraphe 2 de cette note on établit un système d'équations différentielles (en général non linéaires) et n conditions initiales qui sont vérifiées par la fonction-vecteur minimisante (théorème 1). On entend par là une fonction-vecteur $\alpha^{\underline{p}}(x) \in \mathcal{A}$ qui vérifie les conditions (2) et pour laquelle $R[\varphi^{(p)}_{\alpha^{\underline{p}},L}(x)] = \lambda_{p,D,L}$. Cette fonction existe. Si l'on connaît l'intégrale-respectivement les intégrales du système sus-mentionné, qui satisfait-respectivement satisfont aux conditions initiales mentionnées, alors on obtient immédiatement la fonction $\varphi_{\alpha^{\underline{p}},L}(x)$, respectivement cette fonction se trouve parmi certaines expressions, obtenues immédiatement à l'aide de ces intégrales. Nous ne pouvons pas préciser laquelle de ces expressions est la fonction $\varphi_{\alpha^{\underline{p}},L}(x)$, mais si le nombre des intégrales en question est fini et ces intégrales sont connues, on peut avoir une délimitation inférieure du nombre λ (observations 1—4). Dans le paragraphe 3 on donne un exemple simple de détermination du nombre λ dans un cas particulier (théorème 2). Dans le dernier paragraphe de la note on établit une certaine propriété dont jouit la fonction $\alpha^{\underline{p}}(x)$.

Nous allons nous servir, dans l'étude du problème, d'un résultat de LASOTA et OPIAL ([1]), qui ont déterminé, entre autres, la fonction $\varphi_{\alpha^{\underline{p}},L}(x)$ au cas où dans (3) $L = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, $p = 0$ et le domaine D est défini par les relations $|\beta_i| \leqq A_i$ $(i = \overline{1, n})$, où A_i sont des nombres donnés, et les coefficients de l'équation (1) ne sont pas nécessairement des fonctions continues, mais simplement mesurables et bornées. Le résultat en question s'obtient à l'aide du principe du maximum de PONTRIAGUINE ([2], théorème 3, page 59).

2. On désignera par $H(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)|_{\beta_s = \alpha_s(x)}$ l'expression obtenue en remplaçant dans la fonction $H(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ les variables β_s par les fonctions $\alpha_s(x) (s = \overline{1, n})$ et on présentera le

THÉORÈME 1. *Soit* $F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$ *l'équation de la frontière* S *du domaine* D. *La fonction-vecteur minimisante* $\alpha^{\underline{p}}(x) = (\alpha^{\underline{p}}_1(x), \alpha^{\underline{p}}_2(x), \ldots, \alpha^{\underline{p}}_n(x))$ *verifie pour tout* $x \in [0, \lambda]$ *le système suivant d'équations différentielles, qui ne dépend pas du nombre* p:

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} & F(\alpha^{\underline{p}}_1(x), \alpha^{\underline{p}}_2(x), \ldots, \alpha^{\underline{p}}_n(x)) = 0 \qquad (a) \\ & \frac{d}{dx}\left[\left. \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(x)} \right] + \\ & + \left. \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha^{\underline{p}}_i(x) \left. \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(x)} = 0 \quad (b) \\ & \left. \frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(x)} = \frac{d}{dx}\left[\left. \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(x)} \right] + \\ & + \left. \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(x)} (i = \overline{2, n-1}) \qquad (c) \end{aligned} \right.$$

et les conditions initiales

$$\tag{5} \begin{aligned} & \left. \frac{l_{n-1}}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(0)} = \left. \frac{l_{n-2}}{F'(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(0)} = \ldots = \\ & = \left. \frac{l_{n-i}}{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(0)} = \ldots = \left. \frac{l_0}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \right|_{\beta_s = \alpha^{\underline{p}}_s(0)} \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons écrire par commodité $\alpha(x)$ à la place de $\alpha^{\underline{p}}(x)$. Lasota et Opial ont démontré dans [1] que au cas $p = 0$, $L = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ dans (3) et que $a_i(x)$ soient des fonctions mesurables et bornées dans l'intervalle $[0, \infty)$ et D soit donnée par les relations $|\beta_i| \leqslant A_i (i = \overline{1, n})$, il existe une fonction-vecteur $\alpha^{\underline{p}}(x)$ pour qui $R[\varphi_{\alpha^{\underline{p}},L}(x)] = \lambda_{0,D,L}$. La démonstration est immédiate au cas des coefficients $a_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ à la propriété (2), d'une valeur quelconque de p de la suite $\overline{0, n-2}$ de (3), d'un domaine D borné quelconque et d'un ensemble quelconque de nombres L de (3) ; la démonstration ne sera par conséquent pas présentée. Il existe donc une fonction $\alpha^{\underline{p}}(x)$ de la clase $C[0, \infty)$ pour laquelle $R[\varphi^{(p)}_{\alpha^{\underline{p}},L}(x)] = \lambda_{p,D,L}$. On voit immédiatement que le point de coordonnées $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ est situé dans D ou sur S, pour tout $x \in [0, \infty)$.

On désignera par

$$z_i = z_i(x) = \varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x) \quad (i = \overline{1, n}) \tag{6}$$

On entendra par la notation $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|_\lambda$ l'expression obtenue par le remplacement des variables z_i de la fonction $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ par $z_i(\lambda)(i = \overline{1, n})$ de (6). On écrira sous la forme $F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ $(i = \overline{1, n - r_1})$ les équations de la variété r_1-dimensionnelle située dans l'espace à n dimensions rapporté aux axes $Oz_1, z_2, \ldots, z_n$ sur laquelle est transporté le point de coordonnées $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ([2]), théorème 3, page 59).

Dans ces conditions, Lasota et Opial ont montré dans [1] qu'il existe n fonctions $\varphi_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, non identiquement nulles toutes et continues dans l'intervalle $[0, \infty)$, qui ont les propriétés suivantes:

(7)

1. *La fonction linéaire des variables indépendentes* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

$$L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = -\varphi_1(x)\sum_{i=1}^{n} z_i(x)\beta_i + \sum_{i=2}^{n} z_{i-1}(x)\varphi_i(x) \tag{a}$$

atteint son maximum dans le domaine D *pour* $\beta_i = \alpha_i(x)(i = \overline{1, n})$. *Cette propriété a lieu pour tout* $x \in [0, \lambda]$, *comme du reste les trois autres propriétés suivantes.*

2. $\varphi_i'(x) = \varphi_1(x)\alpha_i(x) - \varphi_{i+1}(x)(i = \overline{1, n}, \varphi_{n+1}(x) \equiv 0)$. (b)

3. $$\frac{1}{\varphi_1(\lambda)}\frac{\partial F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_1}\bigg|_\lambda = \frac{1}{\varphi_2(\lambda)}\frac{\partial F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_2}\bigg|_\lambda = \ldots = \frac{1}{\varphi_n(\lambda)}\frac{\partial F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_n}\bigg|_\lambda \tag{c}$$
$(i = 1, \overline{n - r_1})$

4. *L'expression* $L(\alpha_1, (x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ *ne dépend pas de* x *quand* $x \in [0, \lambda]$ *et a une valeur non négative.*

Si $\varphi_1(x) \neq 0$, l'hyperplan Δ_x, d'équation $\sum_{i=1}^{n} \varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)(\beta_i - \alpha_i(x)) = 0$ de l'espace à n dimensions, rapporté aux axes $O\beta_2\beta_1\ldots\beta_n$, coïncide avec le plan tangent au point de coordonnées $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ à l'hyper-surface S d'équation $F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$ qui est la frontière du domaine D, parceque au cas contraire l'hyperplan pénètre nécessairement à l'intérieur du domaine D et détermine dans celui-ci une région dans laquelle $\sum_{i=1}^{n} \varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)\beta_i < \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)\alpha_i(x)$ et une autre, dans laquelle $\sum_{i=1}^{n} \varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)\beta_i > \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)\alpha_i(x)$, ce qui signifie que la fonction $L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ de (7) (a) n'atteint pas son maximum dans D pour $\beta_i = \alpha_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ et contredit la propriété 1 de (7). Du fait que la fonction linéaire de (7) (a) atteint son maximum dans D pour $\beta_i = \alpha_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, il résulte que le point de coordonnées $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ est situé sur la frontière S, pour tout $x \in [0, \lambda]$.

L'hyperplan Δ_x coincidant avec le plan tangent à S au point $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi^{(n-1)}_{\alpha,L}(x)}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = \frac{\varphi^{(n-2)}_{\alpha,L}(x)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = \ldots = \\
&= \frac{\varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)}{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = \ldots = \frac{\varphi'_{\alpha,L}(x)}{F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = \\
&= \frac{\varphi_{\alpha,L}(x)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}
\end{aligned} \tag{8}$$

donc

$$\frac{\varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)} = \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} \qquad (i = \overline{1, n - 1})$$

On en déduit, à l'aide de l'identité

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)}\right) = \frac{\varphi^{(n+1-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)} - \frac{\varphi'_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)}\frac{\varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)} \quad (i = \overline{2, n - 1}) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}\right] + \\
&+ \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} \qquad (i = \overline{2, n - 1})
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la relation (4) (c).

Mais $\varphi_{\alpha,L}(x)$ est une intégrale de l'équation E_a, c'est-à-dire

$$\frac{\varphi^{(n)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\frac{\varphi^{(n-i)}_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)} = 0$$

ce qui s'écrit à l'aide de (9) (avec $i = 1$) et de (8):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)}\right] + \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\bigg|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la relation (4) (b). Le point $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ est situé sur S, donc $F(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)) = 0$, c'est-à-dire la relation (4) (a).

Les relations (8) ont été établies dans l'hypothèse $\varphi_1(x) \neq 0$, mais elles ont lieu aussi quand $\varphi_1(x) = 0$, ainsi qu'on le constate immédiatement, en remarquant qu'ainsi qu'il sera démontré au paragraphe 4 (à la suite de la relation (26)), $\varphi_1(x)$ a dans l'intervalle $[0, \lambda]$ la racine $x = \lambda$ et que, si elle en a d'autres, celles-ci sont en nombre fini. On désignera par $H_i(x)$ l'expression $\varphi_{\alpha,L}^{(n-i)}(x) F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)|_{\beta_s=\alpha_s(x)} - \varphi_{\alpha,L}(x) F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)|_{\beta_s=\alpha_s(x)}$. Les fonctions $H_i(x)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle $[0, \lambda]$ et (8) atteste qu'elles s'annulent dans tout cet intervalle à l'exception éventuelle des points auxquels $\varphi_1(x) = 0$, parceque si par exemple $F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)|_{\beta_s=\alpha_s(x)} = 0$, alors $\varphi_{\alpha,L}^{(n-i)}(x) = 0$, par suite du fait que les normales au plan tangent en $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$ à S et à Δ_x ont les mêmes cosinus directeurs. Ces points étant en nombre fini, il s'ensuit que $H_i(x)$ s'annule dans ces points aussi, c'est-à-dire que les relations (8) ont lieu dans tout l'intervalle $[0, \lambda]$, ce qui démontre le théorème.

Remarques. 1. Il résulte du théorème 1 que le système (5) de n équations à n inconnues $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

$$(10) \quad \frac{F'_{\beta_i}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} = \frac{l_{n-i}}{l_0} \; (i = \overline{1, n-1})\,; \quad F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0$$

compte parmi ses solutions la solution $\beta_i = \alpha_i^{\underline{p}}(0)$ $(i = \overline{1, n})$, et que le système (4) de n équations différentielles à n fonctions inconnues $\beta_1(x)$, $\beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)$:

$$(11) \begin{cases} \text{(a)} \quad F(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)) = 0 \\[4pt] \text{(b)} \quad \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{F'_{\beta_1}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}\right] + \\[4pt] \qquad + \dfrac{F'_{\beta_1}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))\, F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))} + \\[4pt] \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) \dfrac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))} = 0 \\[4pt] \text{(c)} \quad \dfrac{F'_{\beta_{i-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}\right] \\[4pt] \qquad + \dfrac{F'_{\beta_i}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))\, F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))}{F'^2_{\beta_n}(\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x))} \quad (i = \overline{2, n-1}) \end{cases}$$

compte parmi ses intégrales l'intégrale $\beta_i(x) = \alpha_i^{\underline{p}}(x)$ $(i = \overline{1, n})$ et ceci pour tout $p \in (0, 1, \ldots, n-2)$.

2. Si l'on connaît la fonction-vecteur minimisante $\alpha^{\underline{p}}(x)$ alors (8) (avec $i = n - 1$) donne

$$(12) \quad \varphi_{\alpha^{\underline{p}},L}(x) = \text{const. exp. } H(x)\,; \quad H(x) = \int_0^x \frac{F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s = \alpha_s^{\underline{p}}(\sigma)} d\sigma$$

3. Si toutes les intégrales du système (11) sont comprises dans les formules $\beta_i(x) = f_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ $(i = \overline{1, n})$ où $C_i (i = \overline{1, n})$ sont des constantes arbitraires, alors les valeurs $C_i = \Gamma_i$ $(i = \overline{1, n})$ qui donnent l'intégrale $\beta_i(x) = \alpha_i^{\underline{p}}(x)$ $(i = \overline{1, n})$ se trouvent parmi les solutions du système de n équations à n inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $f_i(0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = \beta_i$ $(i = \overline{1, n})$, où $\beta_i (i = \overline{1, n})$ est l'une des solutions du système (10).

4. S'il existe un nombre fini l d'intégrales du système (11) qui satisfont aux conditions (10), intégrales qui seront désignées par $\beta_i^{\underline{k}}(x) = f_i^{\underline{k}}(x)$ $(i = \overline{1, n}, k = \overline{1, l})$, alors

$$\lambda_{p,D,L} \geqslant \min R\,\{[\exp H^{\underline{k}}(x)]^{(p)}\}\,, H^{\underline{k}}(x) = \int_0^x \frac{F'_{\beta_{n-1}}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}{F'_{\beta_n}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}\Bigg|_{\beta_s = f_s^{\underline{k}}(\sigma)} d\sigma$$

3. On présentera, à titre d'exemple, l'application simple suivante du théorème 1.

THÉORÈME 2. *On considère l'équation* $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ *où* $a_1(x)$, $a_2(x)$ *sont des fonctions continues, à dérivées du premier ordre bornées en valeur absolue par un nombre fixe dans l'intervalle* $[0, \infty)$ *et vérifient dans cet intervalle la relation* $a_1^2(x) + a_2^2(x) \leqq R^2$, *avec* $R > 0$ *donné. Dans ces conditions, et quelles que soient les fonctions* $a_1(x)$, $a_2(x)$, *la plus petite racine positive de l'intégrale* $\varphi_{a,L}(x)$ *de l'équation considérée qui vérifie les conditions* $\varphi_{a,L}(0) = l_0$, $\varphi'_{a,L}(0) = l_1$, *avec* l_0 *et* l_1 *donnés, est au moins égale au nombre* λ *défini comme suit*:

$$\text{Si } q = -\frac{l_1}{l_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2} \leqq A = \frac{1}{2}\left(R + \sqrt{4 + R^2} + \sqrt{2R(R + \sqrt{4 + R^2})}\right)$$

alors

$$\lambda = \bar{\lambda} = \bar{\Lambda}(q, R) = \sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \log \frac{A\,(A + q)}{1 + Aq} + \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \left(\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{q - \frac{1}{2}(-R + \sqrt{4 + R^2})}{\sqrt{\frac{R}{2}(-R + \sqrt{4 + R^2})}}\right).$$

Si $q > A$, alors ou bien $\lambda = \bar{\lambda}$, où bien

$$\lambda = \bar{\bar{\lambda}} = \bar{\bar{\Lambda}}(q, R) = \sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \log \frac{Aq - 1}{A(q - A)} +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{- R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2R(R + \sqrt{4 + R^2})}}{2 + q(R + \sqrt{4 + R^2})}.$$

(On entend par arc tg la détermination principale, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$).

Démonstration. Dans notre cas, au théorème 1, $n = 2$, donc $p = 0$ et le domaine D est clos par le cercle d'équation $F(\beta_1, \beta_2) = \beta_1^2 + \beta_2^2 - R^2 = 0$. On prendra donc, conformément à (4) (a) $\alpha_1(x) = R \cos \Delta(x)$, $\alpha_2(x) = R \sin \Delta(x)$ et la relation (4) (b) s'écrit

$$\frac{d\delta}{dx} = \cos^2 \delta + R \sin \delta \quad (\delta = \Delta(x)) \tag{13}$$

pendant que la relation (12) donne $H(x) = \mathscr{H}(\delta) = \int_0^x \frac{\cos \Delta(\sigma)}{\sin \Delta(\sigma)} d\sigma$ (vu que (13) donne $x = X(\delta)$). On en déduit à l'aide de (13)

$$H'(x) = \frac{\cos \Delta(x)}{\sin \Delta(x)} = \mathscr{H}'(\delta) (\cos^2 \delta + R\sin \delta)$$

c'est-à-dire

$$H(x) = \mathscr{H}(\delta) = \int \frac{\operatorname{cotg} \delta}{R \sin \delta + \cos^2 \delta} d\delta =$$

$$= \text{const} + \log \left[\sin \delta \left(- \sin \delta + \frac{- R + \sqrt{4 + R^2}}{2} \right)^{-\frac{R + \sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \left(- \sin \delta + \frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2} \right)^{-\frac{-R + \sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \right] \tag{14}$$

auquel cas la relation (12) atteste que

$$\varphi_{\alpha,L}(x) = \text{Const.} \sin \delta \left(- \sin \delta + \frac{- R + \sqrt{4 + R^2}}{2} \right)^{-\frac{R + \sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \left(- \sin \delta + \frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2} \right)^{-\frac{-R + \sqrt{4+R^2}}{2\sqrt{4+R^2}}} \tag{15}$$

ne s'annule que pour $\delta = k\pi$ (k entier). D'ailleurs cette affirmation résulte aussi de la relation (8), qui s'écrit

$$\frac{\varphi'_{\alpha,L}(x)}{\varphi_{\alpha,L}(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{\cos \Delta(x)}{\sin \Delta(x)} \tag{16}$$

mais la forme de la fonction $\varphi_{\alpha,L}(x)$ de (15) peut présenter quelque intérêt

Or, la relation (13) donne

$$x = X(\delta) = C + \sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \log \left| \frac{\frac{1}{A} + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{A + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} \right| + 2\sqrt{\frac{- R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}(- R + \sqrt{4 + R^2})}{\sqrt{\frac{R}{2}(- R + \sqrt{4 + R^2})}} = C + F_1(\delta) \tag{17}$$

avec A défini dans l'énoncé du théorème. Vu que, ainsi qu'on verra dans (22), l'intervalle de variation de δ ne comprend pas π comme point intérieur, en prenant pour arc tg de (17) la détermination principale, la fonction $X(\delta)$ est continue au point $\delta = \pi$.

Dans la fig. 1, $\bar{\delta}$ est défini par la relation $\sin \bar{\delta} = \frac{1}{2}(- R + \sqrt{4 + R^2})$, $0 < \bar{\delta} < \frac{\pi}{2}$ on en déduit donc que

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{En (17) on prendra } \log \dfrac{\frac{1}{A} + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{A + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} \textit{ pour } \delta \in [0, \pi + \bar{\delta}) \\ \textit{ou } \delta \in (2\pi - \delta, 2\pi] \textit{ et } \log \left(- \dfrac{\frac{1}{A} + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{A + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} \right) \textit{ pour } \delta \in (\pi + \bar{\delta}, 2\pi - \bar{\delta}). \end{array} \right. \tag{18}$$

Vu que les fonctions $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ sont, ainsi qu'il a été rappellé au § 2, continues, et que $\delta = \Delta(x) \in [0, 2\pi]$, il s'ensuit que $\Delta(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[0, \lambda]$, de sorte que la fonction inverse $X(\delta)$

l'est également dans l'intervalle $\mathcal{J}_\delta$ parcouru par $\Delta(x)$ quand x parcourt l'intervalle $[0, \lambda]$ et par conséquent finie. Or, $X(\delta)$ de (17) devient infini pour $\delta = \pi + \bar{\delta}$ ou $\delta = 2\pi - \bar{\delta}$, de sorte que l'intervalle $\mathcal{J}_\delta$ ne comprend

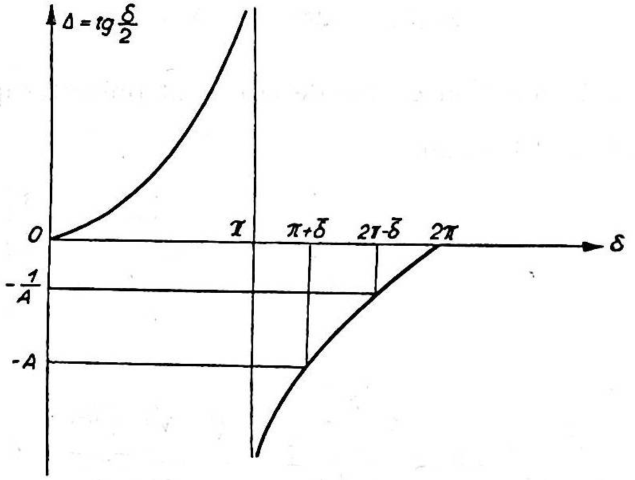

Fig. 1

pas les valeurs $\pi + \bar{\delta}$ ou, $2\pi - \bar{\delta}$. Cet intervalle comprend nécessairement l'une des valeurs 0, π ou 2π, vu qu'au cas contraire (15) donne $\varphi_{\alpha, L}(x) \neq 0$

δ	0		$\pi + \bar{\delta}$		$2\pi - \bar{\delta}$		2π
$X'(\delta)$		$+$	∞	$-$	∞	$+$	
$X(\delta)$	$X(0)$	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$	↗	$X(2\pi)$

Tableau 1.

pour tout $x > 0$, donc selon la convention du § 1, $\lambda_{0,D,L,} = \infty$, résultat infirmé, par exemple, par l'équation $y'' + Ry = 0$, dont la fonction-vecteur $a(x) = (0, R)$ vérifie évidemment les conditions (2). Donc

$$\text{(19)} \begin{cases} \mathcal{J}_\delta \textit{ est situé ou bien dans l'intervalle } [0, \pi + \bar{\delta}), \textit{ ou bien dans} \\ \textit{l'intervalle } (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi], \end{cases}$$

de sorte que $\Delta(x)$ est une fonction uniforme de $x \in [0, \lambda]$.
En ce cas on déduit du tableau 1 et de (13) que

$$\text{(20)} \qquad \mathcal{J}_\delta = [\Delta(0), \Delta(\lambda)]$$

Il en résulte à l'aide de la relation

$$\text{(21)} \qquad x \equiv X(\Delta(x))$$

(déduite du fait que $\Delta(x)$, respectivement $X(\delta)$ sont des fonctions uniformes de x, respectivement δ) et de (15) que

$$\text{(22)} \begin{cases} \text{si } \mathcal{J}_\delta \subset (0, \pi + \bar{\delta}), \text{ alors } \lambda = X(\pi), \text{ donc } \mathcal{J}_\delta \subset (0, \pi], \text{ tandis que} \\ \text{si } \mathcal{J}_\delta \subset (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi], \text{ alors } \lambda = X(2\pi), \end{cases}$$

avec $X(\delta)$ donné par (17). La relation $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = -\cot\delta \pm \sqrt{1 + \cot^2\delta}$ et (16) donnent $\operatorname{tg}\frac{\Delta(0)}{2} = q$ ou $\operatorname{tg}\frac{\Delta(0)}{2} = -\frac{1}{q}$, avec q défini dans l'énoncé du théorème. Or, on déduit sur la fig. 1 que l'on ne peut avoir $\operatorname{tg}\frac{\Delta(0)}{2} \leq$ $\leq -\frac{1}{A}$, parceque il en résulterait $\Delta(0) \in [\pi, 2\pi - \bar{\delta}]$, c'est-à-dire conformément à (20) et (22) que la relation (19) serait contredite. Parsuite, si $q \leq A$, on ne peut avoir que $\operatorname{tg}\frac{\Delta(0)}{2} = q$, donc $\Delta(0) \in (0, \pi)$, $\mathcal{J}_\delta \subset (0, \pi]$, auquel cas (22) et la rélation

$$\text{(23)} \qquad X(\delta) = F_1(\delta) - F_1(\Delta(0))$$

(déduite de (21) et de (17)) donnent pour λ la valeur $\bar{\lambda}$ de l'énoncé du théorème. Pour obtenir $X(\pi)$ on tient compte que, vu que $\delta \in (0, \pi]$, on a $\lim\limits_{\delta \to \pi} \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = +\infty$. Si $q > A$, on peut avoir soit $\Delta(0) \in (0, \pi)$, donc la même valeur $\bar{\lambda}$ pour λ, soit $\Delta(0) \in (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi)$, auquel cas $\mathcal{J}_\delta \subset (2\pi - \bar{\delta}, 2\pi]$ et (22) et (23) donnent $\lambda = \bar{\bar{\lambda}}$, avec $\bar{\bar{\lambda}}$ de l'énoncé du théorème, qui est ainsi démontré.

Remarques. 1. Si $l_0 = 0$, (donc $l_1 \neq 0$), alors $q = 0$ et le théorème donne $\lambda = \bar{\Lambda}(0, R) = 2\sqrt{\frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \log A + \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R(4 + R^2)}} \Big(\pi +$ $+ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{2R}}\Big)$.

2. Si $\frac{l_1}{l_0} \geqslant 0$, on a $0 \leqslant q \leqslant 1 < A$, donc à nouveau $\lambda =$ $= \bar{\Lambda}(q, R)$.

4. On présentera en conclusion une propriété de la fonction minimisante $\alpha^{p}_{-}(x)$. Afin d'éviter l'écriture de relations assez encombrantes dans l'énoncé du théorème présenté ci-dessous, nous allons nous reporter par numérotation à ces relations, écrites au cours de la démonstration.

On dira qu'une fonction-vecteur $a(x) = (a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x))$ définie dans l'intervalle $[0, \infty)$ jouit de la propriété $P_{\lambda, D}$ (avec $\lambda > 0$) dans un domaine D de l'espace à n dimensions rapporté aux axes $0\,\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, si la fonction linéaire des variables indépendentes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

$$L_{a,x}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = -\varphi_{a,1}(x) \sum_{i=1}^{n} \varphi_{a,L}^{(n-i)}(x)\beta_i \tag{24}$$

où $\varphi_{a,1}(x)$ et $\varphi_{a,L}(x)$ sont définies respectivement dans (36) (où l'on remplace la fonction-vecteur $\underline{\alpha^{p}}(x)$ par la fonction-vecteur $a(x)$) et (3) — atteint son maximum dans le domaine D pour $\beta_i = a_i(x) (i = \overline{1, n})$ et ceci pour tout $x \in [0, \lambda]$.

Il est évident que cette définition exige que pour tout $x \in [0, \lambda]$, le point de coordonnées $(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x))$ soit situé sur la frontière S du domaine D.

THÉORÈME 3. *Si la racine $\lambda_{p,D,L}$ de la dérivée $\varphi^{(p)}_{\underline{\alpha^{p}}, L}(x)$ est une racine simple, alors la fonction-vecteur minimisante $\underline{\alpha^{p}}(x)$ jouit de la propriété $P_{\lambda_{p,D,L}, D}$, avec $\lambda_{p,D,L}$ défini dans* (3).

Démonstration. Les deux premières relations (7) (a) assurent l'existence de $\varphi_1^{(2)}(x)$ et $\varphi_2'(x)$; ceci et la troisième relation (7) (a) assure l'existence de $\varphi_1^{(3)}(x)$ et $\varphi_2^{(2)}(x)$. En général, les premières h relations (7) (a) assurent l'existence de $\varphi_1^{(h)}(x)$ et $\varphi_2^{(h-1)}(x)$; par conséquent, les n relations (7) (a) assurent l'existence de $\varphi_1^{(n)}(x)$ dans l'intervalle $[0, \lambda]$. On a

$$\varphi_1^{(q)}(x) = (-1)^q \varphi_{q+1}(x) - \sum_{i=0}^{q-1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q-i} (-1)^s C_{q-s}^{i}\, \alpha_s^{(q-i-s)}(x) \quad (q = \overline{2, n}) \tag{25}$$

à la condition de remplacer au cas $i = 0$, $s = q$, l'expression C_0^0 par 1. Cette relation s'établit immédiatement, si l'on suppose qu'elle a lieu pour $q = q_1$; en ce cas, on déduit de (7) (b) où l'on fait $j = q_1 + 1$:

$$\begin{aligned} -\varphi_1^{(q_1+1)}(x) &= \sum_{i=1}^{q_1-1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q_1-i} (-1)^s C_{q_1+1-s}^{i}\, \alpha_s^{(q_1+1-i-s)}(x) + \\ &+ \sum_{i=1}^{q_1-1} \varphi_1^{(i)}(x)(-1)^{q_1+1-i} \alpha_{q_1+1-i}(x) - \varphi_1^{(q_1)}(x)\, \alpha_1(x) + \varphi_1(x) \sum_{s=1}^{q_1} (-1)^s \alpha_s^{(q_1+1-s)}(x) + \\ &+ (-1)^{q_1+1}(\varphi_1(x)\alpha_{q_1+1}(x) - \varphi_{q_1+2}(x)) = (-1)^{q_1+2} \varphi_{q_1+2}(x) + \\ &+ \sum_{i=0}^{q_1} \varphi_1^{(i)}(x) \sum_{s=1}^{q_1+1-i} (-1)^s C_{q_1+1-s}^{i}\, \alpha_s^{(q_1+1-i-s)}(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire la relation (25) avec $q = q_1 + 1$. Or, si l' ondérive les termes de la relation (7) (b) dans laquelle on fait $i = 1$, on obtient la relation (25) avec $q = 2$, de sorte que cette relation est prouvée. Si l'on y fait $q = n$, on déduit que $\varphi_1(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} b_{\alpha,n,i}(x) y^{(i)}(x) + y^{(n)}(x) = 0 \\ \displaystyle b_{\alpha,q,i}(x) = \sum_{s=1}^{q-i} (-1)^s C_{q-s}^{i}\, \alpha_s^{(q-i-s)}(x);\ 1 \leq q \leq n;\ 0 \leq i \leq q-1. \end{cases} \tag{26}$$

Il en résulte d'ailleurs que $\varphi_1(x)$ a dans $[0, \lambda]$ au plus un nombre fini de zéros, parceque au cas contraire il existerait au moins un point d'accumulation de ces zéros. Si r est l'un de ces points en vertu du théorème de Rolle, il est un point d'accumulation pour les zéros de $\varphi_1^{(s)}(x)$ $(s = \overline{1, n-1})$. Attendu que $\varphi_1^{(s)}(x)$ sont des fonctions continues et définies au point $x = r$, il s'ensuivrait $\varphi_1^{(s)}(r) = 0$ $(s = \overline{0, n-1})$, c'est-à-dire $\varphi_1(x) \equiv 0$, au quel cas (7) (b) donne $\varphi_s(x) \equiv 0 (s = \overline{1, n})$ dans $[0, \lambda]$, ce qui contredit la relation $\varphi(x) \not\equiv 0$. Nous allons établir les conditions ,,initiales'' auxquelles satisfait l'intégrale $\varphi_1(x)$ de l'équation (26). Au cas de notre problème, les relations $F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ $(i = \overline{1, n - r_1})$ écrites à la suite de la relation (6), se réduisent à la relation $z_{n-p}(\lambda_{p,D,L}) = 0$, auquel cas (7) (c) donne

$$\begin{cases} \varphi_i(\lambda_p) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, n-p-1, n-p+1, n-p+2, \ldots, n)\ (p \geq 1) \\ \varphi_i(\lambda_0) = 0 \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (p = 0). \end{cases} \tag{27}$$

On peut remarquer que, attendu que $p \leq n - 2$, en (27) la relation $\varphi_1(\lambda_p) = 0$ figure sans faute. Or, (25) s'écrit

$$\varphi_1^{(q)}(x) = (-1)^q \varphi_{q+1}(x) - \sum_{i=0}^{q-1} b_{\alpha,q,i}(x)\, \varphi_1^{(i)}(x) \tag{28}$$

avec $b_{\alpha,q,i}(x)$ données par (26), ce qui donne avec (27)

$$\varphi_1^{(i)}(\lambda_p) = 0\ (i = \overline{0, n-2-p});\ \varphi_1^{(n-p-1)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1} \varphi_{n-p}(\lambda_p) \tag{29}$$

$$\varphi_1^{(n-p)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p}\, b_{\alpha,n-p,n-p-1}(\lambda_p)\, \varphi_{n-p}(\lambda_p). \tag{30}$$

Afin d'ècrirə le reste des conditions initiales, on notera

$$
(31)\qquad \begin{aligned} G_{\alpha,s,\sigma}(x) = \sum_{(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{s-1})_\sigma} b_{\alpha,n-p+\sigma,n-p+\rho_{s-1}}(x)\ b_{\alpha_1 n-p+\rho_{s-1},n-p+\rho_{s-2}}(x) \ldots \\ \ldots b_{\alpha,n-p+\rho_2,n-p+\rho_1}(x)\ b_{\alpha,n-p+\rho_1,n-p-1}(x) \end{aligned}
$$

où $b_{\alpha,q,i}$ sont définies dans (26), et la notation $\sum\limits_{(\rho_1,\rho_2,\ldots,\varrho_{s-1})_\sigma}$ désigne une somme définie de la manière suivante : on entendra par la notation $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{s-1})_\sigma$ le fait que le groupe d'indices $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{s-1})$ parcourt tous les groupes distincts de nombres de la forme $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{s-1})$, où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{s-1}$ sont des nombres de la suite $0, 1, \ldots, \sigma - 1$, qui jouissent des propriétés suivantes :

$$
(32)\qquad \begin{cases} 1.\ 0 \leqq \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_{s-1} \leqq \sigma - 1 \\ 2.\ \text{On peut écrire la suite de groupes de deux nombres} \\ (\sigma, \delta_{s-1}), (\delta_{s-1}, \delta_{s-2}), \ldots, (\delta_2, \delta_1), (\delta_1, -1) \end{cases}
$$

À l'aide de la notation (31), le reste des conditions initiales auxquelles satisfait l'intégrale $\varphi_1(x)$ peuvent s'écrire

$$
(33)\qquad \begin{gathered} \varphi_1^{(n-p+\sigma)}(\lambda_p) = (-1)^{n-p-1}\varphi_{n-p}(\lambda_p)\Big[-b_{\alpha^{\underline{p}},n-p+\sigma,n-p-2}(\lambda_p) + \sum_{s=2}^{\sigma+1}(-1)^s G_{\alpha^{\underline{p}},s,\sigma}(\lambda_p)\Big] \\ \sigma = \overline{1, p-1};\quad 2 \leqslant p \leqslant n-2. \end{gathered}
$$

Au cas $p = 0$ les conditions initiales se réduisent, bien entendu, aux conditions (29), et au cas $p = 1$ aux conditions (29) et (30). La relation (33) se démontre immédiatement si l'on suppose qu'elle a lieu pour $\sigma = \overline{1, \sigma_1}$. En ce cas, si l'on désigne par commodité $a_{k,l} = b_{\alpha^{\underline{p}},n-p+k,n-p+l}(\lambda_p)$, on déduit de (27), (28), (29) et (30)

$$
\begin{aligned} \frac{\varphi_1^{(n-p+\sigma_1+1)}(\lambda_p)}{(-1)^{n-p-1}\varphi_{n-p}(\lambda_p)} &= -\sum_{i=-1}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,i}\,\varphi_1^{(n-p+i)}(\lambda_p) = -a_{\sigma_1+1,-1} + a_{\sigma_1+1,0}\,a_{0_1-1} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,i}\Big[a_{i,-1} - \sum_{s=2}^{i+1}(-1)^s G_{\alpha^{\underline{p}},s,i}(\lambda_p)\Big]. \end{aligned}
$$

À l'aide de ces relations, (33) avec $\sigma = \sigma_1 + 1$ s'écrit

$$
(34)\qquad \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,i}a_{i,-1} + \sum_{s=3}^{\sigma_1+2}\sum_{i=s-2}^{\sigma_1}(-1)^s a_{\sigma_1+1,i}G_{\alpha^{\underline{p}},s-1,i}(\lambda_p) = \\ = G_{\alpha^{\underline{p}},2,\sigma_1+1}(\lambda_p) + \sum_{s=3}^{\sigma_1+2}(-1)^s G_{\alpha^{\underline{p}},s,\sigma_1+1}(\lambda_p). \end{aligned}
$$

Or, (31) donne $G_{\alpha,2,\sigma_1+1}(\lambda_p) = \sum\limits_{\rho_1=0}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,\rho_1}a_{\rho_1,-1}$. En ce cas, (34) a lieu si

$$
G_{\alpha,s,\sigma_1+1}(\lambda_p) = \sum_{i=s-2}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,i}G_{\alpha,s-1,i}(\lambda_p)\ (s = \overline{3, \sigma_1+2}),
$$

c'est-à-dire, à l'aide de (31)

$$
(35)\qquad \begin{cases} S_1 = S_2 \\ S_1 = \sum\limits_{(\rho_1,\varrho_2,\ldots,\rho_{s-1})_{\sigma_1+1}} a_{\sigma_1+1,\rho_{s-1}}a_{\rho_{s-1},\rho_{s-2}}\ldots a_{\rho_2,\rho_1}a_{\rho_1,-1}, \\ S_2 = \sum\limits_{i=s-2}^{\sigma_1} a_{\sigma_1+1,i}\sum\limits_{(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{s-2})_i} a_{i,\rho_{s-2}}a_{\rho_{s-2},\rho_{s-3}}\ldots a_{\rho_2,\rho_1}a_{\rho_1,-1}. \end{cases}
$$

Si l'on choisit donc dans S_1 un terme quelconque

$$
a_{\sigma_1+1,\bar\rho_{s-1}}\,a_{\bar\rho_{s-1},\bar\rho_{s-2}}\ldots a_{\bar\rho_2,\bar\rho_1}\,a_{\bar\rho_1,-1}
$$

ce même terme s'obtient si on prend dans S_2, $i = \bar\rho_{s-1}$ et $\rho_k = \bar\rho_k$ $(k = \overline{1, s-2})$. Or, on déduit de (32) que le groupe $(\bar\rho_1, \bar\rho_2, \ldots, \bar\rho_{s-2})$ appartient à l'ensemble $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{s-2})_{\bar\rho_{s-1}}$, de sorte que $S_1 \subset S_2$. Inversement, si on choisit dans S_2 un terme quelconque $a_{\sigma_1+1,\bar i}\,a_{\bar i,\bar\rho_{s-2}}\,a_{\bar\rho_{s-2},\bar\rho_{s-3}}\ldots a_{\bar\rho_2,\bar\rho_1}, a_{\bar\rho_1,-1}$ le même terme s'obtient si on prend dans S_1, $s-1 = \bar i$, $\rho_k = \bar\rho_k$ $(k = \overline{1, s-2})$. On déduit de (32) que le groupe $(\bar\rho_1, \bar\rho_2, \ldots, \bar\rho_{s-2}, \bar i)$ appartient à l'ensemble $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{s-1})_{\sigma_1+1}$, de sorte que $S_2 \subset S_1$, d'où $S_1 = S_2$, c'est-à-dire la relation (35) et par suite la relation (34). Ainsi donc, si la relation (33) a lieu pour $\sigma = \overline{1, \sigma_1}$, elle aura lieu aussi pour $\sigma = \sigma_1 + 1$. Or, on déduit de (28) avec $q = n - p + 1$, de (29), (30) et de (27) que $\varphi_1^{(n-p+1)}(\lambda_p)$ prend la valeur donnée par (33) où l'on fait $\sigma = 1$. La relation (33) est donc démontrée. On considèrera maintenant une autre intégrale de l'équation (26), qui d'une part vérifie des conditions initiales indépendentes de la quantité inconnue $\varphi_{n-p}(\lambda_p)$ qui figure en (29), (30) et (33) et d'autre part vérifie les conditions (7) (a). À cet effet on désignera par $\varphi_{\alpha^{\frac{p}{-}},1}(x)$ l'intégrale de l'équation (26) qui satisfait aux conditions initiales suivantes:

$$(36)\begin{cases} \text{(a) } \varphi^{(i)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},1}(\lambda_p)=0(i=\overline{0,\,n-p-2})\,;\ \text{(b) } \varphi^{(n-p-1)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},1}(\lambda_p)=(-1)^{n-p-1}\varphi^{(p+1)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(\lambda_p)\,; \\ \text{(c) } \varphi^{(n-p)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},1}(\lambda_p)\equiv(-1)^{n-p}b_{\alpha^{\frac{p}{-}},n-p,\,n-p-1}(\lambda_p)\quad \varphi^{(p+1)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(\lambda_p) \\ \text{(d) } \varphi^{(n-p+\sigma)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},1}(\lambda_p)\equiv(-1)^{n-p-1}\varphi^{(p+1)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(\lambda_p)\Big[-b_{\alpha^{\frac{p}{-}},\,n-p+\sigma,\,n-p-1}(\lambda_p)+ \\ \qquad +\sum_{s=2}^{\sigma+1}G_{\alpha^{\frac{p}{-}},s,\sigma}(\lambda_p)\Big]\,;\ (\sigma=\overline{1,p-1})\,;\ 1\leqq p\leqq n-2 \end{cases}$$

où $b_{\alpha,q,i}(x)$ est définie en (26), avec $\varphi_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(x)$ définie en (3). Au cas $p=0$, respectivement $p=1$, les conditions (36) se réduisent, comme les conditions (29), (30), (33) aux conditions (a) et (b), respectivement (a), (b), (c) de (36). On déduit donc de (29), (30), (33), (36), en tenant compte que par hypothèse du théorème $\varphi^{(p+1)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(\lambda_p)\neq 0$

$$\varphi_{n-p}(\lambda_p)\varphi_{\alpha^{\frac{p}{-}},1}(x) = \varphi^{(p+1)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(\lambda_p)\varphi_1(x). \tag{37}$$

Si on fait dans (7) (d) $x=\lambda_p$, on déduit à l'aide de (27) (où la relation $\varphi_1(\lambda_p)=0$ figure sans faute, ainsi qu'il a été remarqué à la suite de cette formule) et de (7) (a)

$$\varphi_{n-p}(\lambda_p)\varphi^{(p+1)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(\lambda_p)\geqq 0. \tag{38}$$

On déduit donc de (7) (a), (37) et (38) que la fonction linéaire des variables $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$:

$$L_{\alpha^{\frac{p}{-}},x}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n) = -\varphi_{\alpha^{\frac{p}{-}},1}(x)\sum_{i=1}^{n}\varphi^{(n-i)}_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(x)\beta_i$$

où $\varphi_{\alpha^{\frac{p}{-}},1}(x)$ et $\varphi_{\alpha^{\frac{p}{-}},L}(x)$ sont définies en (36), respectivement (3), atteint son maximum dans le domaine D pour $\beta_i=\alpha_i^{\frac{p}{-}}(x)$ $(i=\overline{1,n})$, et ceci pour tout $x\in[0,\lambda_p]$, ce qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lasota A. et Opial Z., *L'application du principe de Pontriaghin à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des sciences math., astr. et phys. **XI**, **2**, 41—46 (1963).

[2] Pontriaguine L., Boltyanski V., Gamkrelidze R. et Mistchenko E., *Математическая теория оптимальных процессов.* Москва, 1961.

Reçu le 12. I. 1965