THÉORÈME 2. *Si* $x_i \neq x_{i+1}$ *alors* $x_i \neq x_{i+3}$.

Démonstration. Supposons, pour préciser,

$$x_i < x_{i+1} \tag{5}$$

et admettons que

$$x_i = x_{i+3}. \tag{6}$$

Il en résulte alors

$$x_{i+2} < x_{i+1} \tag{7}$$

vu qu'au cas contraire, on en déduirait, conformément au théorème 1, $x_{i+1} < x_{i+3}$ ce qui contredit les relations (5) et (6). De ces relations (1) et (6) il résulte immédiatement

$$x_{i+1} = x_{i+4}. \tag{8}$$

On déduit enfin de (5), conformément au théorème 1, $x_i < x_{i+2}$, et en tenant compte de (6)

$$x_{i+3} < x_{i+2}. \tag{9}$$

Les relations (7), (8), et (9) conduisent à la double inégalité

$$x_{i+3} < x_{i+2} < x_{i+4}$$

qui contredit elle aussi le théorème 1; par conséquent, l'égalité (6) est imposible.

Observation. Les théorèmes 1 et 2 restent vrais aussi pour la suite de valeurs $\{y_i\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Peteanu V., *Simultaneous equations, for which the iterative process is convergent*. Mathematica. Cluj, 6 (29), 1, 101 – 104 (1964).

Reçu le 15. XII. 1964.

MATHEMATICA VOL. 7 (30), 1, 1965, pp. 71–127

UN PROBLÈME D'INTERPOLATION DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES*)

par

DUMITRU RIPIANU

à Cluj

1. Dans le présent travail on détermine les éléments „minimaux" d'un certain ensemble attaché aux équations différentielles linéaires du second ordre.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des équations différentielles linéaires du second ordre, de la forme

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

où $p_i(x)$ $(i = 1, 2)$ parcourent l'ensemble des fonctions continues dans un intervalle donnée $[0, l]$. On désigne par le terme „équation (E)" un élément quelconque de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une équation (1) et par $\mathcal{H}$ l'ensemble des équations (E) qui ont la propriété que leurs intégrales qui s'annulent pour $x = 0$ ont dans l'intervalle $[0, l]$ au moins une racine positive. On désigne par h_E la plus petite de ces racines positives, relatives à une équation $(E) \in \mathcal{H}$ donnée, et qui change en général quand on change d'équation. On désigne enfin par m_i la quantité $\max\limits_{x\in[0,h_E]} |p_i(x)|$ — étant entendu que l'équation $(E) \in \mathcal{H}$ est donnée par les coefficients $p_i(x)$ qui donnent les $m_i (i = 1, 2)$ — et par $\mathcal{A}$ l'ensemble des paires de nombres positifs a_1 et a_2 qui ont la propriété que la relation suivante, du type de de la Vallée-Poussin

$$1 \leq a_1 m_1 h_E + a_2 m_2 h_E^2 \tag{2}$$

a lieu pour chaque équation (E) de $\mathcal{H}$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est borné inférieurement et évidemment non borné supérieurement (si $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$, alors toute paire $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ avec $\bar{a}_i \geq a_i$

*) Ce travail a été publié sous une forme légèrement modifiée, en langue roumaine, dans la revue „Studii şi cercetări de matematică (Cluj) tome XIV, No. 1 et 2 (1963); il y est réparti en trois notes.

$(i = 1, 2)$ appartient également à $\mathcal{A}$) de sorte qu'on peut se poser le problème de l'existence et de la détermination de ses éléments ,,minimaux'', en fonction de la définition donnée à ces éléments minimaux.

Dans ce travail on introduira trois définitions de ce genre.

D e f i n i t i o n 1. Une paire $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ de $\mathcal{A}$ est dite ,,minimale relative'' par rapport à a_2, si toute paire $(\bar{a}_1, a_2)$ avec $a_2 < \bar{a}_2$ n'appartient plus à $\mathcal{A}$.

D é f i n i t i o n 2. Une paire $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ de $\mathcal{A}$ est dite ,,minimale absolue'' par rapport à a_2, si toute paire (a_1, a_2) avec $a_2 < \bar{a}_2$ et toute paire $(a_2, \bar{a}_2)$ avec $a_1 < \bar{a}_1$ n'appartiennent plus à $\mathcal{A}$.

D é f i n i t i o n 3. Une paire $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ de $\mathcal{A}$ est dite ,,minimale par rapport à la fonction $f(a_1, a_2)$'', supposée définie dans tout l'ensemble $\mathcal{A}$, si $f(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \min\limits_{(a_1, a_2) \in \mathcal{A}} f(a_1, a_2)$.

Les deux premières définitions peuvent évidemment se formuler par rapport à a_1, il est inutile de les répéter.

L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas vide, car conformément au Théorème bien connu de de la Vallée-Poussin ([4]) il contient la paire $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (à l'inégalité stricte dans (2)). Hartmann et Wintner ([2]) ont donné la paire $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ de $\mathcal{A}$ (à inégalité stricte), et Opial ([3]) la paire

$$\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right), \tag{3}$$

de $\mathcal{A}$ (qui assure dans (2) tant l'égalité que l'inégalité).

Le problème posé a donc de sens.

Le présent travail se divise en deux parties. Dans la première partie, on détermine la paire minimale relative par rapport à a_2, quand a_1 a une valeur donnée quelconque, et l'on démontre que cette paire est aussi minimale relative par rapport à a_1, pour la valeur ainsi déterminée de a_2, ce qui résout la question des paires minimales relatives. On démontre que la paire indiquée par Opial est la paire minimale absolue par rapport à a_2 et qu'il n'y en a pas par rapport à a_1. En conclusion, à titre d'applications simples des formules donnant les paires minimales relatives, on détermine les paires minimales par rapport à quelques fonctions de la forme la plus simple. Dans la seconde partie du travail, on détermine les mêmes éléments minimaux dans le cas où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des équations (1) à coefficients constants et où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des équations (1) qui ont la propriété que leurs intégrales qui s'annulent pour $x = 0$ possèdent une dérivée première qui a au moins une racine positive. En ce cas, le nombre h_E de (2) est la plus petite de ces racines. Les résultats sont analogues, pour la pluplart, à ceux de la l'ère partie. On peut d'ailleurs remarquer qu'en vertu d'un résultat de O. ARAMĂ ([1]) les conclusions de la seconde partie sétendent aussi au cas des équations (1) à coefficients variables.

1.

2. Nous allons présenter le

THÉORÈME 1. I. *Pour une valeur donnée de a_1, la paire minimale relative à a_2 est la paire $(a_1, \alpha(a_1))$ où la fonction $\alpha(a_1)$ est définie comme suit :*

1° *Si $0 < a_1 < \frac{1}{8}$, alors $\alpha(a_1)$ est la racine positive de la fonction de la variable a_2.*

$$f_4(a_2) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\bar{m} - 4}}{a_1\sqrt{\bar{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\bar{m}}} + \ln \frac{\sqrt{\bar{m}} + \sqrt{\bar{m} - 4}}{2},$$

où

$$\bar{m} = \frac{1}{4a_1^3}\left[2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) + \right.$$

$$\left. + (1 - 2a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - 2a_1)a_2 + (1 - 12a_1 + 4a_1^2)a_2^2}\right].$$

2°. *Si $a_1 = \frac{1}{8}$, alors $\alpha\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$.*

3°. *Si $\frac{1}{8} < a_1 < \frac{2}{\pi^2}$, alors $\alpha(a_1)$ est la racine positive de la fonction de la variable a_2 :*

$$f_{12}(a_2) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{4 - \bar{m}}}{a_1\sqrt{\bar{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\bar{m}}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4 - \bar{m}}{\bar{m}}},$$

où

$$\bar{m} = \frac{1}{4a_1^3}\left[2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) - \right.$$

$$\left. - (1 - 2a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - 2a_1)a_2 + (1 - 12a_1 + 4a_1^2)a_2^2}\right].$$

4°. *Si $a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}$, alors $\alpha(a_1) = \frac{1}{\pi^2}$.*

II. *La fonction $\alpha(a_1)$ décroît dans l'intervalle $\left(0, \frac{2}{\pi^2}\right)$ et*

$$\lim_{a_1 \to 0} \alpha(a_1) = \infty.$$

Démonstration. Nous allons nous servir, à l'exemple d'Opial, ([1]), du résultat suivant de de la Vallée-Poussin ([3]) :

$$h \geqq H(m_1, m_2) = 2\int_0^\infty \frac{d\varphi}{\varphi^2 + m_1\varphi + m_2} \;{}^{*)}. \tag{4}$$

---

* nous écrivons simplement h à la place de h_E.

D'ailleurs il y a des cas où dans (4) on a l'egalité, par exemple l'équation $(E_1): y'' + k^2 y = 0$, pour laquelle $m_1 = 0$, $m_2 = k^2$, $h = \frac{\pi}{k} = H(0, k^2)$.

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \textit{La relation (2) est équivalente** à la relation} \\ h \geqq \varphi = \varphi(m_1, m_2) = \dfrac{1}{2a_2m_2}\left(-a_1m_1 + \sqrt{a_1^2m_1^2 + 4a_2m_2}\right). \end{cases}$$

En effet, pour une équation (E) fixée, donc pour h, m_1, m_2 fixés, on ne peut avoir $h < \varphi$, car alors h se situerait entre les racines du trinome $a_2m_2x^2 + a_1m_1x - 1$ et (2) n'aurait pas lieu. La relation

$$\text{(6)} \qquad H \geqq \varphi$$

est équivalente à la relation (2), car (2) résulte de (6) par l'entremise de (4) et de (5), et (6) résulte de (2) dans le cas des équations (E) pour lesquelles $h = H$ — toujours par l'entremise de (5).

La relation (6) s'écrit à l'aide de (4) et de (5) sous la forme des trois relations suivantes, données, en d'autres notations, par OPIAL dans le travail cité [3]:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} f_1(m_1) = \dfrac{\sqrt{4m_2 - m_1^2}}{4}(H - \varphi) = \dfrac{\sqrt{4m_2 - m_1^2}}{8a_2m_2}\left(a_1m_1 - \sqrt{4a_2m_2 + a_1^2m_1^2} + \right. \\ \quad + \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{4m_2 - m_1^2}{m_1}} \geqq 0 & \text{(a)} \\ \text{pour } m_1 < 2\sqrt{m_2}\,; \\ H - \varphi = \dfrac{4}{\sqrt{m_2}} \dfrac{a_1 + a_2 - \frac{1}{4}}{a_1 + 2a_2 + \sqrt{a_1^2 + a_2}} \geqq 0 & \text{(b)} \\ \text{pour } m_1 = 2\sqrt{m_2}\,; \\ f_2(m_1) = \dfrac{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{8a_2m_2}\left(a_1m_1 - \sqrt{4a_2m_2 + a_1^2m_1^2}\right) + \\ \quad + \ln\dfrac{m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2\sqrt{m_2}} \geqq 0 & \text{(c)} \\ \text{pour } m_1 > 2\sqrt{m_2}\,. \end{cases}$$

Ces trois relations prises ensemble, sont donc équivalentes à la relation (2).

** Par équivalence de deux relations (A) et (B) on entend selon l'usage, le fait que (A) est une conséquence de (B) et (B) une conséquence de (A).

Les expressions (7a) et (7c) donnent

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} f_1'(m_1) = -\dfrac{f_3(m_1)}{4a_2m_2\sqrt{(4m_2 - m_1^2)(4a_2m_2 + a_1^2m_1^2)}}, \\ f_2'(m_1) = \dfrac{f_3(m_1)}{4a_2m_2\sqrt{(m_1^2 - 4m_2)(4a_2m_2 + a_1^2m_1^2)}}, \\ f_3(m_1) = -m_1[a_1^2m_1^2 + 2(a_2 - a_1^2)m_2] + \\ \quad + [a_1m_1^2 + 2(2a_2 - a_1)m_2]\sqrt{4a_2m_2 + a_1^2m_1^2}\,. \end{cases}$$

La relation $f_3(m_1) = 0$ s'écrit si l'on fait disparaître la racine par élévation au carré

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} P_1(m) = 0, \text{ où } m = \dfrac{m_1^2}{m_2} \text{ et} \\ P_1(m) = 2a_1^3m^2 - [2a_1^2(1 + 2a_1) + \\ \quad + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2)]m + 4(a_1 - 2a_2)^2. \end{cases}$$

Ainsi donc, $f_3(m_1)$ peut avoir au plus deux racines non-négatives, qu'on désignera, si elles existent, par $\overline{m}_1$ et $\overline{\overline{m}}_1$. Pour cela, il faut que les racines du polynome $P_1(m)$ de (9) qui seront désignées par $\overline{m}$ et $\overline{\overline{m}}$, soient non-négatives. Pour que les expressions non-négatives $\sqrt{m_2\overline{m}}$ et $\sqrt{m_2\overline{\overline{m}}}$ — seuls nombres qui pourraient être des racines de $f_3(m_1)$-soient des racines de cette fonction, il faut et il suffit qu'on ait dans (8)

$$[a_1\overline{m} + 2(2a_2 - a_1)][a_1^2\overline{m} + 2(a_2 - a_1^2)] > 0$$

respectivement

$$[a_1\overline{\overline{m}} + 2(2a_2 - a_1)][a_1^2\overline{\overline{m}} + 2(a_2 - a_1^2)] > 0$$

(vu que les expressions $a_1m + 2(2a_2 - a_1)$ et $a_1^2m + 2(a_2 - a_1^2)$ ont la même racine au seul cas où $a_1 = \frac{1}{2}$). Ces relations s'écrivent à l'aide de (9)

$$\text{(10)} \qquad (1 - 2a_1)\left\{\left[a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)\right]\overline{m} + 2a_1(2a_2 - a_1)\right\} > 0.$$

respectivement

$$\text{(10)} \qquad (1 - 2a_1)\left\{\left[a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)\right]\overline{\overline{m}} + 2a_1(2a_2 - a_1)\right\} > 0.$$

Le réalisant du polynome $P_1(m)$ de (9) est

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} R &= (1 - 2a_1)^2 P_2(a_2) \\ P_2(a_2) &= (1 - 12a_1 + 4a_1^2)a_2^2 + 4a_1^2(1 - 2a_1)a_2 + 4a_1^4. \end{aligned} \right.$$

Si les racines $\overline{m}$ et $\overline{\overline{m}}$ de $P_1(m)$ sont distinctes, et si $a_1 \neq \frac{1}{2}$, alors les racines $\overline{m}_1$ et $\overline{\overline{m}}_1$ de $f_3(m_1)$ sont — si elles existent — des racines simples, parce que (8) donne

$$f_3'(m_1) = -\left[3a_1^2m_1^2 + 2(a_2 - a_1^2)m_2\right] + a_1m_1 \frac{3a_1^2m_1^2 + 2(4a_2 + 2a_1a_2 - a_1^2)m_2}{\sqrt{4a_2m_2 + a_1^2m_1^2}},$$

de sorte que

$$f_3'(\overline{m}_1) = 4a_2m_2 \frac{4a_1^3\overline{m}_1^2 - m_2[2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2)]}{a_1^2m_1^2 + 2(a_2 - a_1^2)m_2} \neq 0$$

vu qu'au cas contraire si l'on tire $\overline{m}_1$ de la relation $f_3'(\overline{m}_1) = 0$ et que l'on écrive que $P_1(\overline{m}) = 0$, avec $\overline{m} = \frac{\overline{m}_1^2}{m_2}$ et $\overline{m}_1$ ainsi déterminé, on obtient en (11) $R = 0$ ce qui contredit l'hypothèse que $P_1(m)$ a des racines simples. Ainsi donc

(12) *Si le polynome $P_1(m)$ de (9) a deux racines non-négatives et distinctes, et si $a_1 \neq \frac{1}{2}$, alors la fonction $f_3(m_1)$ de (8) a deux racines non-négatives simples, une seule, ou aucune racine de cette espèce, selon que les deux relations (10) sont vérifiées, une seule est vérifiée, ou aucune de ces relations n'est vérifiée. Le polynome $P_2(a_2)$ de (11) a les racines*

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} a_2 &= \overline{a}_2 = \overline{a}_2(a_1) = -\frac{2a_1^2}{1 - 2a_1 + 2\sqrt{2a_1}} \\ a_2 &= \overline{\overline{a}}_2 = \overline{\overline{a}}_2(a_1) = \frac{2a_1^2}{-1 + 2a_1 + 2\sqrt{2a_1}}. \end{aligned} \right.$$

(14) Si $0 < a_1 \leqq \frac{1}{6}$, (7) (b) donne $a_2 \geqq \frac{1}{4} - a_1 \geqq \frac{a_1}{2}$.

La démonstration présentée consiste dans l'étude du signe des expressions (7) selon les valeurs de a_1 et a_2 et exige l'examination de plusieurs cas, suivant les valeurs de a_1.

1°. $0 < a_1 \leqq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

En ce cas, (11) donne $R > 0$ pour chaque $a_2 > 0$, tandis que dans (9) $2a_1^2 (1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) > 0$, donc $\overline{m} > 0$, $\overline{\overline{m}} > 0$, auquel cas (14) assure l'existence des relations (10), et (12) l'existence des racines m_1 et m_1. Or, (9) et (7)(b) donnent

$$(15)\qquad P_1(4) = 16(a_1^2 + a_2)\left(a_1 + a_2 - \frac{1}{4}\right) \geqq 0$$

et

$$(16)\qquad \frac{\overline{m} + \overline{\overline{m}}}{2} - 4 = \frac{1}{4a_1^3} [2a_1^2(1 - 6a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2)] > 0,$$

de sorte que si $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$, on a $\overline{m} = 4 < \overline{\overline{m}}$, et si $a_2 > \frac{1}{4} - a_1$, on a $4 < \overline{m} < m$, auquel cas (9) donne $\overline{m}_1 = 2\sqrt{m_2} < \overline{\overline{m}}_1$, respectivement $2\sqrt{m_2} < \overline{m}_1 < m_1$.

Tableau **1**

m_1	0		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$-$	
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\searrow$	0

Tableau **2**

m_1	$2\sqrt{m_2}$		$\overline{\overline{m}}_1$		∞
$f_2'(m_1)$		$-$	0	$+$	
$f_2(m_1)$	0	$\searrow$	$f_2(\overline{\overline{m}}_1)$	$\nearrow$	∞

Tableau **3**

m_1	$2\sqrt{m_2}$		$\overline{m}_1$		$\overline{\overline{m}}_1$		∞
$f_2'(m_1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(m_1)$	0	$\nearrow$	$f_2(\overline{m}_1)$	$\searrow$	$f_2(\overline{\overline{m}}_1)$	$\nearrow$	∞

Si $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$, on a donc les tableaux 1 et 2 (dans lesquels $f_1'(2\sqrt{m_2}) = f_2'(2\sqrt{m_2}) = 0$) et si $a_2 > \frac{1}{4} - a_1$, on a les tableaux 1 et 3.

Or, (9) donne

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{m} &= \frac{1}{4a_1^3} [2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) - (1 - 2a_1)\sqrt{P_2(a_2)}] \\ \overline{\overline{m}} &= \frac{1}{4a_1^3} [2a_1^2(1 + 2a_1) + a_2(1 - 8a_1 - 4a_1^2) + (1 - 2a_1)\sqrt{P_2(a_2)}]. \end{aligned} \right.$$

avec $P_2(a_2)$ donné par (11) et

$$\bar{m}_1 = \sqrt{m_2 \bar{m}}, \quad \bar{\bar{m}}_1 = \sqrt{m_2 \bar{\bar{m}}}. \tag{18}$$

On peut donc considérer l'expression $f_2(\bar{\bar{m}}_1)$ du tableau 3 successivement comme fonction de a_2, de $\bar{\bar{m}}$, de a_2 et de $\bar{\bar{m}}$ — On désignera par $f_4(a_2)$, $f_5(\bar{\bar{m}})$, $f_6(a_2, \bar{\bar{m}})$ les fonctions respectives, en tenant compte que $\bar{\bar{m}}$ de (17) est une fonction de a_2, qui sera désignée par $\bar{\bar{m}}(a_2)$. Les relations (7)(c) et (17) donnent donc

$$f_2(\bar{\bar{m}}_1) = f_4(a_2) = f_5(\bar{\bar{m}}) = f_6(a_2, \bar{\bar{m}}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\bar{\bar{m}} - 4}}{a_1 \sqrt{\bar{\bar{m}}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2 \bar{\bar{m}}}} + \ln \frac{\sqrt{\bar{\bar{m}}} + \sqrt{\bar{\bar{m}} - 4}}{2}. \tag{19}$$

Mais (18) donne

$$\frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = f_5'(\bar{\bar{m}}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_2}{\bar{\bar{m}}}} f_2'(\bar{\bar{m}}_1) = 0, \tag{20}$$

de sorte que

$$f_4'(a_2) = \frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial a_2} + \frac{d\bar{\bar{m}}}{da_2} \frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = \frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial a_2} = \tag{21}$$

$$= \frac{\sqrt{\bar{\bar{m}} - 4}}{\sqrt{4a_2 + a_1^2 \bar{\bar{m}}} (a_1 \sqrt{\bar{\bar{m}}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2 \bar{\bar{m}}})^2} > 0.$$

Tableau 4

a_2	$\frac{1}{4} - a_1$		$\bar{A}_2$		∞
$f_4(a_2)$	$f_7(a_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

On en déduit le tableau 4, dans lequel

$$f_7(a_1) = f_4\left(\frac{1}{4} - a_1\right) = -\frac{1 - 2a_1}{4a_1(1 - 4a_1)} \sqrt{1 - 8a_1} +$$

$$+ \ln \frac{1 - 6a_1 + (1 - 2a_1)\sqrt{1 - 8a_1}}{4a_1 \sqrt{2a_1}},$$

de sorte que $f_7'(a_1) = \dfrac{(1 - 2a_1)(1 - 8a_1)\sqrt{1 - 8a_1}}{4a_1^2(1 - 4a_1)^2} > 0$,

Tableau 5

a_1	0		$\frac{1}{8}$
$f_7(a_1)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

auquel cas le tableau 5 donne $f_4\left(\frac{1}{4} - a_1\right) < 0$, et le tableau 4 présente la racine $\bar{A}_2 = \bar{A}_2(a_1)$ de la fonction $f_4(a_2)$.

On considérera à présent l'expression $f_4(a_2)$ de (19) comme une fonction de a_1 et de a_2 donc

$$f_4(a_2) = f_8(a_1, a_2) \text{ donc } f_8(a_1, \bar{A}_2(a_1)) \equiv 0 \tag{22}$$

$$\bar{A}_2'(a_1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial f_8(a_1, a_2)}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial f_8(a_1, a_2)}{\partial a_2}}\right|_{a_2 = \bar{A}_2(a_1)}. \tag{23}$$

On considérera enfin la même expression $f_4(a_2)$ successivement comme fonction de a_1, ensuite de a_1 et $\bar{\bar{m}}$, et $\bar{\bar{m}}$ de (17) comme fonction de a_1 donc $\bar{\bar{m}} = \bar{\bar{m}}(a_1)$

$$f_4(a_2) = f_8(a_1, a_2) = f_9(a_1) = f_{10}(a_1, \bar{\bar{m}}), \tag{24}$$

auquel cas (20) donne

$$\frac{\partial f_{10}(a_1, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = \frac{\partial f_6(a_2, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} = 0,$$

de sorte que

$$\frac{\partial f_8(a_1, a_2)}{\partial a_1} = f_9'(a_1) = \frac{\partial f_{10}(a_1, \bar{\bar{m}})}{\partial a_1} + \frac{d\bar{\bar{m}}}{da_1} \frac{\partial f_{10}(a_1, \bar{\bar{m}})}{\partial \bar{\bar{m}}} =$$

$$= \frac{\partial f_{10}(a_1, \bar{\bar{m}})}{\partial a_1} = \frac{1}{2} \frac{1}{a_1 \sqrt{\bar{\bar{m}}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2 \bar{\bar{m}}}} \sqrt{\frac{\bar{\bar{m}}(\bar{\bar{m}} - 4)}{4a_2 + a_1^2 \bar{\bar{m}}}} > 0.$$

Par ailleurs (21) donne

$$(26)\qquad \frac{\partial f_8(a_1, a_2)}{\partial a_2}\Bigg|_{a_2=\overline{A}_2} = f_4'(\overline{A}_2) > 0,$$

de sorte que (23) donne $\overline{A}_2'(a_1) < 0$ et le tableau 6, dans lequel

$$(27)\qquad \lim_{a_1\to 0} \overline{A}_2(a_1) = \infty.$$

Tableau **6**

a_1	0		$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$
$\overline{A}_2(a_1)$	∞	$\searrow$	$\overline{A}_2\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$

La relation (27) se justifie de suite, si l'on tient compte que pour $a_1 < \frac{1}{20}$, au tableau 4, $A_2 > \frac{1}{5}$, de sorte que (27) donne pour $a_2 = \overline{A}_2(a_1)$

$$\lim_{a_1\to 0} \overline{m} = \lim_{a_1\to 0} a_1^2\overline{\overline{m}} = \infty.$$

Si l'on avait donc $\overline{A}_2(a_1) < M$ pour tout $a_1 < \alpha$, où α et M sont des nombres positifs pris à volonté, alors si $a_1 \to 0$, l'expression de droite de la relation

$$a_1 \ln \frac{\sqrt{\overline{m}}+\sqrt{\overline{m}-4}}{2}\Bigg|_{a_2=\overline{A}_2(a_1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-\frac{4}{\overline{m}}}}{1+\sqrt{1+\frac{4A_2}{a_1^2\overline{\overline{m}}}}}\Bigg|_{a_2=\overline{A}_2(a_1)}$$

donnée par (19) tendrait vers $\frac{1}{4}$, alors que celle de gauche tendrait vers zéro, ainsi qu'on le déduit de suite de (17), de sorte que la relation ci-dessus n'aurait pas lieu, pour $a_1 > 0$ suffisamment petit, ce qui contredit la définition de $\overline{A}_2$ et démontre la relation (27).

2°. $\frac{3}{2}-\sqrt{2} < a_1 < \frac{1}{8}$,

En ce cas, on a dans (13) $\overline{a}_2 < 0$ et $\overline{\overline{a}}_2 > 0$. On déduit de (11)

$$(28)\qquad P_2\left(\frac{1}{4}-a_1\right) = \left[\frac{1}{4}(1-2a_1)(1-8a_1)\right]^2 > 0$$

de sorte que $\overline{\overline{a}}_2(a_1) > \frac{1}{4} - a_1$, et

$$\frac{2a_1^2(1-6a_1)}{-1+8a_1+4a_1^2} - \frac{\overline{a}_2+\overline{\overline{a}}_2}{2} = 16a_1^3\,\frac{1-8a_1+4a_1^2}{(-1+8a_1+4a_1^2)(-1+12a_1-4a_1^2)} > 0$$

si

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < a_1 < \frac{1}{8} < 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$P_2\left(\frac{2a_1^2(1-6a_1)}{-1+8a_1+4a_1^2}\right) = -32\,\frac{a_1^5(1-2a_1)^2(1-8a_1)}{(-1+8a_1+4a_1^2)^2} < 0,$$

de sorte que si $\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < a_1 < \frac{1}{8}$,

$$(29)\qquad \overline{\overline{a}}_2(a_1) < \frac{2a_1^2(1-6a_1)}{-1+8a_1+4a_1^2} < 2a_1^2\,\frac{1+2a_1}{-1+8a_1+4a_1^2}\,.$$

Si $\frac{1}{4}-a_1 \leqslant a_2 < \overline{\overline{a}}_2(a_1)$, on a dans (11) $R > 0$ et $\overline{m}$ et $\overline{\overline{m}}$ sont positifs, parceque (29) donne dans (9), dans l'hypothèse $\frac{\sqrt{5}}{2}-1 < a_1 < \frac{1}{8}$

$$(30)\qquad \overline{m}+\overline{\overline{m}} > \frac{1}{2a_1^3}\left[2a_1^2(1+2a_1) - \overline{\overline{a}}_2(-1+8a_1+4a_1^2)\right] > 0$$

$\Big($au cas où $\frac{3}{2}-\sqrt{2} < a_1 \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}-1$, il est évident que dans (9) on a $\overline{m}+\overline{\overline{m}} > 0\Big)$.

Les relations (15) et (16) se conservent*, donc les tableaux 1, 2, 3 aussi. Le tableau 4 se remplace par le tableau 7 dans lequel

$$f_{11}(a_1)=f_4(\overline{\overline{a}}_2)=-\frac{1}{4a_1}\sqrt{1-6a_1-4a_1\sqrt{2a_1}}+$$

$$+\ln\frac{1-\sqrt{2a_1}+\sqrt{1-6a_1-4a_1\sqrt{2a_1}}}{\sqrt{2\sqrt{2a_1}}\,(-1+2a_1+2\sqrt{2a_1})},$$

Tableau 7

a_2	$\frac{1}{4}-a_1$		$\overline{A}_2(a_1)$		$\overline{\overline{a}}_2$
$f_4(a_2)$	$f_7(a_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{11}(a_1)$

de sorte que

$$f_{11}'(a_1)=\frac{-(1-6a_1+16a_1^2)+2(1-4a_1)\sqrt{2a_1}}{4a_1^2(-1+2a_1+2\sqrt{2a_1})\sqrt{1-6a_1-4a_1\sqrt{2a_1}}}<0,$$

donc

$$f_{11}(a_1)>f_{11}\left(\frac{1}{8}\right)=0,$$

ce qui, avec le tableau 5, présente la racine $\overline{A}_2(a_1)$ au tableau 7. Les relations (21), (23), (26), se conservent, donc la relation $\overline{A}_2'(a_1)<0$ aussi, de sorte que le tableau 6 se remplace par le tableau 8

Tableau 8

a_1	$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$		$\frac{1}{8}-\varepsilon$
$\overline{A}_2(a_1)$	$\overline{A}_2\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$\overline{A}_2\left(\frac{1}{8}-\varepsilon\right)$

* parceque au cas où $\frac{\sqrt{5}}{2}-1<a_1<\frac{1}{8}$, (16) s'écrit à l'aide de (29) $\frac{\overline{m}+\overline{\overline{m}}}{2}-4>\frac{1}{4a_1^3}\left[2a_1^2(1-6a_1)-\overline{\overline{a}}_2(-1+8a_1+4a_1^2)\right]>0$ et au cas où $\frac{3}{2}-\sqrt{2}<a_1\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}-1$, la même relation (16) est évidente.

3° $$a_1=\frac{1}{8}$$

En ce cas, (7)(b) donne $a_2\geqq\frac{1}{8}$.

Si l'on fait donc $a_1=a_2=\frac{1}{8}$, (8) donne donc

$$f_3(m_1)=\frac{m_2(m_1^2-4m_2)^2}{8[m_1(m_1^2+14m_2)+(m_1^2+2m_2)\sqrt{m_1^2+32m_2}]}\geqq 0,$$

donc $f_1'(m_1)<0$, $f_2'(m_1)>0$, donc dans (7) $f_1(m_1)>f_1(2\sqrt{m_2})=0$,

$$f_2(m_1)>f_2(2\sqrt{m_2})=0.$$

La paire minimale relative par rapport à a_2 est en ce cas la paire $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$.

4°. $$\frac{1}{8}<a_1\leqq\frac{1}{6}$$

En ce cas on a dans (16) pour $a_2\geqq\frac{1}{4}-a_1$:

$$\frac{\overline{m}+\overline{\overline{m}}}{2}-4\leqq\frac{1}{4a_1^3}[2a_1^2(1-6a_1)-$$

$$-\left(\frac{1}{4}-a_1\right)(-1+8a_1+4a_1^2)]=\frac{1}{16a_1^3}(1-2a_1)^2(1-8a_1)<0. \tag{31}$$

Les relations (28), (29), (30) se conservent — à la différence près que (29) prend maintenant la forme $\overline{\overline{a}}_2(a_1)<2a_1^2\frac{1+2a_1}{-1+8a_1+4a_1^2}$ et résulte des relations

$$\frac{2a_1^2(1+2a_1)}{-1+8a_1+4a_1^2}-\frac{\overline{a}_2+\overline{\overline{a}}_2}{2}=\frac{64a_1^4}{(-1+8a_1+4a_1^2)(-1+12a_1-4a_1^2)}>0$$

et

$$P_2\left[\frac{2a_1^2(1+2a_1)}{-1+8a_1+4a_1^2}\right]=-32\frac{a_1^5(1-2a_1)^2}{(-1+8a_1+4a_1^2)^2}<0,$$

données par (11) — de sorte que pour $\frac{1}{4} - a_1 \leqslant a_2 < \bar{\bar{a}}_2(a_1)$ les racines $\overline{m}$ et $\overline{\overline{m}}$ sont positives, tandis que (18), (15) et (31) donnent $\overline{m}_1 < \overline{\overline{m}}_1 \leqslant 2\sqrt{m_2}$ $\left(\text{l'égalité au cas où } a_2 = \frac{1}{4} - a_1\right)$. Ces deux propriétés se conservent aux cas 5°—10° à la différence près qu'au cas 6° on a $m_1 = 0$ et aux cas 6°—10° la relation $\overline{m} + \overline{\overline{m}} > 0$ se déduit de la sorte :

$$\overline{m} + \overline{\overline{m}} \geqslant \frac{1}{2a_1^3}\left[2a_1^2(1 + 2a_1) + \frac{a_1}{2}(1 - 8a_1 - 4a_1^2)\right] = \frac{(1 - 2a_1)^2}{4a_1^2} \geqslant 0.$$

Les tableaux 1, 2, 3 se remplacent donc respectivement par les tableaux 9, 10, 11 c'est-à-dire que si $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$, on a les tableaux 10 et 11 (dans lesquels $f_1'(2\sqrt{m_2}) = f_2'(2\sqrt{m_2}) = 0$), et si $a_2 > \frac{1}{4} - a_1$, on a les tableaux 9 et 11. Si $a_1 = \frac{1}{6}$ on a au tableau 10, $\overline{m}_1 = 0$ vu qu'alors $a_2 = \frac{1}{4} - a_1 = \frac{a_1}{2}$

Tableau **9**

m_1	0		$\overline{m}_1$		$\overline{\overline{m}}_1$		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\searrow$	$f_1(\overline{m}_1)$	$\nearrow$	$f_1(\overline{\overline{m}}_1)$	$\searrow$	0

Tableau **10**

m_1	0		$\overline{m}_1$		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$-$	0	$+$	
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\searrow$	$f_1(\overline{m}_1)$	$\nearrow$	0

Tableau **11**

m_1	$2\sqrt{m_2}$		∞
$f_2'(m_1)$		$+$	
$f_2(m_1)$	0	$\nearrow$	∞

Les relations (7)(a) et (18) donnent la relation

$$f_1(\overline{m}_1) = f_{12}(a_2) =$$

(32) $$= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4 - \overline{\overline{m}}}}{a_1\sqrt{\overline{\overline{m}}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{\overline{m}}}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4 - \overline{\overline{m}}}{\overline{\overline{m}}}}.$$

Si l'on y considère $f_1(\overline{m}_1)$ comme une fonction de a_2 et de $\overline{m}$, donc $f_1(\overline{m}_1) = f_{13}(a_2, \overline{m})$, alors (21) se remplace par la relation

$$f_{12}'(a_2) = \frac{\partial f_{13}(a_2, \overline{m})}{\partial a_2} =$$

(33) $$= \frac{\sqrt{4 - \overline{m}}}{\sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}}\left(a_1\sqrt{\overline{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}}\right)^2} > 0,$$

qui donne le tableau 12, dans lequel

$$f_{14}(a_1) = f_{12}\left(\frac{1}{4} - a_1\right) = -\frac{(1 - 2a_1)\sqrt{-1 + 8a_1}}{4a_1(1 - 4a_1)} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{1 - 2a_1}{1 - 6a_1}\sqrt{-1 + 8a_1},$$

de sorte que

$$f_{14}'(a_1) = -\frac{(1 - 2a_1)(-1 + 8a_1)}{4a_1^2(1 - 4a_1)^2}\sqrt{-1 + 8a_1} < 0,$$

donc $f_{14}(a_1) < f_{14}\left(\frac{1}{8}\right) = 0$, tandis que

$$f_{15}(a_1) = f_{12}(\bar{\bar{a}}_2) = -\frac{1}{4a_1}\sqrt{-1 + 6a_1 + 4a_1\sqrt{2a_1}} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-1 + 6a_1 + 4a_1\sqrt{2a_1}}}{1 - \sqrt{2a_1}},$$

de sorte que

$$f_{15}'(a_1) = \frac{1 - 6a_1 + 16a_1^2 - 2(1 - 4a_1)\sqrt{2a_1}}{4a_1^2(-1 + 2a_1 + 2\sqrt{2a_1})\sqrt{-1 + 6a_1 + 4a_1\sqrt{2a_1}}} > 0,$$

donc $f_{15}(a_1) > f_{15}\left(\frac{1}{8}\right) = 0$, auquel cas le tableau 12 présente la racine $\overline{\overline{A}}_2 = \overline{\overline{A}}_2(a_1)$*.

---

* On a désigné les fonctions $\overline{A}_2(a_1)$ des tableaux 4 et 7 et $\overline{\overline{A}}_2(a_1)$ du tableau 12 par des notations différentes, parceque ce sont des fonctions différentes, étant respectivement les racines des fonctions obtenues en considérant les expressions $f_2(\overline{\overline{m}}_1)$ de (19), respectivement $f_1(\overline{m}_1)$ de (32) comme des fonctions de a_2.

Les relations (22)—(26) se remplacent respectivement par les relations

$$
(34)\quad \begin{cases}
f_{12}(a_2) = f_{16}(a_1, a_2), \text{ donc } f_{16}(a_1, \overline{\overline{A}}_2(a_1)) \equiv 0 \\[2mm]
\overline{\overline{A}}_2'(a_1) = - \left. \dfrac{\dfrac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2}} \right|_{a_2 = \overline{\overline{A}}_2(a_1)} \\[2mm]
f_{12}(a_2) = f_{16}(a_1, a_2) = f_{17}(a_1) = f_{18}(a_1, \overline{m}) \\[2mm]
\dfrac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{a_1\sqrt{\overline{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}}} \sqrt{\dfrac{\overline{m}(4 - \overline{m})}{4a_2 + a_1^2\overline{m}}} > 0, \\[2mm]
\left. \dfrac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2} \right|_{a_2 = \overline{\overline{A}}_2(a_1)} = f_{12}'(\overline{\overline{A}}_2) > 0.
\end{cases}
$$

Tableau 12

a_2	$\frac{1}{4} - a_1$		$\overline{\overline{A}}_2$		$\overline{\overline{a}}_2$
$f_{12}(a_2)$	$f_{14}(a_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{15}(a_1)$

5° $\frac{1}{6} < a_1 < \frac{2}{\pi^2}$

En ce cas, on a $\frac{1}{4} - a_1 < \frac{a_1}{2}$ de sorte que les relations (10) n'ont plus lieu d'elles mêmes pour tout $a_2 \geqslant \frac{1}{4} - a_1$.

On déduit de (9)

$$
(35)\quad P_1\left(2a_1 \frac{a_1 - 2a_2}{a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)}\right) = 2a_2^2 \frac{(1 - 2a_1)^2(a_1^2 + a_2)(2a_2 - a_1)}{\left(a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)\right)^2},
$$

de sorte que si $a_2 \leqslant \frac{a_1}{2}$, on a $\overline{m} \leqslant 2a_1 \frac{a_1 - 2a_2}{a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1)} < \overline{\overline{m}}$, donc dans (10) seule la seconde relation est vérifiée $\left(\text{vu qu'au cas où } a_2 = \frac{a_1}{2}, \text{ on a } \overline{\overline{m}}_1 = 0\right)$.

Tableau 13

m_1	0		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$+$	
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\nearrow$	0

Si $a_2 = \frac{1}{4} - a_1$, on a donc les tableaux 13 et 11 (avec $f_2'(2\sqrt{m_2}) = 0$), tandisque si $\frac{1}{4} - a_1 < a_2 \leqslant \frac{a_1}{2}$, on a les tableaux 14 et 11 $\left(\text{avec } f_1'(0) = 0 \text{ au cas } a_2 = \frac{a_1}{2}\right)$

Tableau 14

m_1	0		$\overline{\overline{m}}_1$		$2\sqrt{m_2}$
$f_1'(m_1)$		$+$	0	$-$	
$f_1(m_1)$	$f_1(0)$	$\nearrow$	$f_1(\overline{\overline{m}}_1)$	$\searrow$	0

Or, la relation (7) (a) donne

$$
(36)\quad f_1(0) = f_{19}(a_2) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{\sqrt{a_2}}\right) \geqslant 0 \text{ pour } a_2 \geqslant \frac{1}{\pi^2}.
$$

et dans notre cas $a_2 \leqslant \frac{a_1}{2} < \frac{1}{\pi^2}$.

Par conséquent $\alpha(a_1) \geqslant \frac{a_1}{2}$. On déduit de (11) $P_2\left(\frac{a_1}{2}\right) = \left(\frac{a_1}{2}(1 - 2a_1)\right)^2 > 0$, de sorte que $\frac{a_1}{2} < \overline{\overline{a}}_2$. Pour $\frac{a_1}{2} < a_2 \leqslant \overline{\overline{a}}_2$, on a donc les tableaux 9 et 11 et à la place du tableau 12, le tableau 15. Les relations (34) se conservent et donnent $\overline{\overline{A}}_2'(a_1) < 0$, donc le tableau 16.

Tableau 15

a_2	$\frac{a_1}{2}$		$\overline{\overline{A}}_2$		$\overline{\overline{a}}_2$
$f_{12}(a_2)$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2a_1}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{15}(a_1)$

Tableau 16

a_1	$\frac{1}{8} + \varepsilon$		$\frac{2}{\pi^2} - \varepsilon$
$\overline{\overline{A}}_2(a_1)$	$\overline{\overline{A}}_2\left(\frac{1}{8} + \varepsilon\right)$	$\searrow$	$\overline{\overline{A}}_2\left(\frac{2}{\pi^2} - \varepsilon\right)$

Vu que (13) donne $\bar{\bar{a}}_2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$, on déduit des tableaux 7 et 12 qu'aux tableaux 8 et 16 on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon > 0}} \bar{A}_2\left(\frac{1}{8} - \varepsilon\right) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} A_2\left(\frac{1}{8} + \varepsilon\right) = \frac{1}{8}. \tag{37}$$

La relation associée à la relation (21) pour la fonction $f_{16}(a_1, a_2)$ de (34) est — conformément à (33) —

$$\frac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2} = f'_{12}(a_2) = \frac{\sqrt{4 - \overline{m}}}{\sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}}\left(a_1\sqrt{\overline{m}} + \sqrt{4a_2 + a_1^2\overline{m}}\right)^2} > 0.$$

On déduit donc de (32) et de (34) $f_{16}\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right) = 0$ et de l'expression ci-dessus de

$$\left.\frac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2} : \frac{\partial f_{16}(a_1, a_2)}{\partial a_2}\right|_{a_1 = \frac{2}{\pi^2},\ a_2 = \frac{1}{\pi^2}} = \frac{\pi^3}{4} \neq 0,$$

de sorte que conformément au théorème des fonctions implicites, on a au tableau 16

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \bar{\bar{A}}_2\left(\frac{2}{\pi^2} - \varepsilon\right) = \frac{1}{\pi^2}. \tag{38}$$

6° $a_1 = \frac{2}{\pi^2}$

En ce cas, pour $a_2 < \frac{a_1}{2}$ on a toujours les tableaux 13 et 11, respectivement 14 et 11, dans lesquels $f_1(0) < 0$, parceque dans (36) $a_2 < \frac{a_1}{2} = \frac{1}{\pi^2}$. Pour $a_2 = \frac{a_1}{2}$, on a par contre les tableaux 14 $\Big($avec $f_1(0) = f_1'(0) = 0$, conformément à (36) et à (8)$\Big)$ et 11, de sorte que $\alpha\left(\frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi^2}$. Il est facile de constater que la paire $\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right)$ ainsi obtenue est la paire minimale absolue par rapport à a_2, parceque conformément à (36) et à (7) (a), si $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$ alors $a_2 \geqslant \frac{1}{\pi^2}$, tandisque si $a_2 = \frac{1}{\pi^2}$ alors $f_1(0) = 0$ et pour

que $f_1(m_1) \geqslant 0$ il faut que $f_1'(0) \geqslant 0$, donc qu'en (8) $f_3(0) = \frac{4}{\pi} m_2^{3/2}\left(\frac{2}{\pi^2} - a_1\right) \leqslant 0$ donc que $a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}$. On a retrouvé ainsi le résultat de OPIAL.

7°. $$\frac{2}{\pi^2} < a_1 < \frac{1}{2}.$$

Pour $a_2 < \frac{a_1}{2}$, on a toujours les tableaux 13 et 11, respectivement 14 et 11, ainsi que les tableaux 17 et 18, selon que $a_1 < \frac{1}{4}$ ou $a_1 \geqq \frac{1}{4}$.

Tableau 17

a_2	$\frac{1}{4} - a_1$		$\frac{1}{\pi^2}$		$\frac{a_1}{2}$
$f_{19}(a_2)$	$f_{19}\left(\frac{1}{4} - a_1\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{19}\left(\frac{a_1}{2}\right)$

Tableau 18

a_2	0		$\frac{1}{\pi^2}$		$\frac{a_1}{2}$
$f_{19}(a_2)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{19}\left(\frac{a_1}{2}\right)$

8°. $$a_1 = \frac{1}{2}$$

La relation (8) donne

$$f_3(m_1) = \frac{1}{4}\left[m_1^2 + 2(4a_2 - 1)m_2\right]\left(-m_1 + \sqrt{m_1^2 + 16a_2m_2}\right).$$

Si $a_2 < \left(\frac{1}{4}\right)$ on a les tableaux 14 (dans lequel $\overline{m}_1$ est remplacé par $\sqrt{2(1 - 4a_2)m_2}$), 11 et 18.

9°. $$\frac{1}{2} < a_1 \leqq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

Si $a_1 < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, et $a_2 < \frac{a_1}{2}$, on déduit de (35) et du fait que pour $a_2 < \frac{a_1}{2}$ on a $a_1^2 + \frac{a_2}{2}(1 - 2a_1) > 0$, que dans (10) seule la première relation est vérifiée. On a donc les tableaux 14 (avec $\overline{m}_1$ à la place de $\overline{m}_1$), 11 et 18. Si $a_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, on aboutit à la même conclusion si l'on tient compte que dans (11)

$$R = 4a_1^2(1 - 2a_1)^2[a_1^2 - (2a_1 - 1)a_2] > 0 \text{ pour } a_2 < \frac{a_1}{2}.$$

10°. $$a_1 > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

En ce cas, (13) donne $a_2 > 0$, $\bar{\bar{a}}_2 > 0$ et (11)

$$P_2\left(\frac{a_1}{2}\right) = \left(\frac{a_1}{2}(1 - 2a_1)\right)^2 > 0 \text{ et } \frac{a_1}{2} - \frac{\bar{a}_2 + \bar{\bar{a}}_2}{2} = \frac{a_1}{2}\,\frac{1 - 8a_1 - 4a_1^2}{1 - 12a_1 + 4a_1^2} < 0,$$

de sorte que $\frac{a_1}{2} < \bar{a}_2$. Pour $a_2 < \frac{a_1}{2}$, on a donc dans (11) $R > 0$ donc la même conclusion qu'au cas précédent.

Ainsi donc, $\alpha(a_1)$ est :

(39) $\begin{cases} \textit{aux cas } 1° \textit{ et } 2°,\ \bar{A}_1(a_1) - \textit{racine de } f_4(a_2), \textit{ donnée par } (19) \textit{ et } (17) \\ (\textit{Tableaux } 1, 3, 4 \textit{ et } 7) \\ \textit{au cas } 3°,\ \frac{1}{8} \\ \textit{aux cas } 4° \textit{ et } 5°,\ \bar{A}_2(a_1) - \textit{racine de } f_{12}(a_2) \textit{ donnée par } (32) \textit{ et } (17) \\ (\textit{Tableaux } 9, 11, 12, 15) \\ \textit{Aux cas } 6°-10°,\ \frac{1}{\pi^2} (\textit{tableaux } 14, 11, 17 \textit{ et } 18). \end{cases}$

Les tableaux 6, 8 et 16 et les relations (37) et (38) peuvent se résumer dans le tableau 19,

Tableau 19

a_1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{\pi^2}$	∞
$\alpha(a_1)$	∞ ↘	$\frac{1}{8}$ ↘	$\frac{1}{\pi^2}$	$\frac{1}{\pi^2}$

Les relations (39) démontrent le point I et le tableau 19 le point II du théorème.

3. Les équations du théorème 1 qui donnent la fonction $\alpha(a_1)$ sont assez compliquées et ne semblent pas admettre une forme plus simple. Il est peut-être préférable, pour la commodité, de se servir, dans certains cas, d'une représentation de la paire minimale relative par rapport à a_2 par deux fonctions de forme très simple d'une même variable. A cet effet, on désignera respectivement par $f_{20}(a_1, a_2)$ et $f_{21}(a_1, a_2)$ les fonctions $f_4(a_2)$ et $f_{12}(a_2)$ de l'énoncé du théorème 1. et par (C_1) et (C_2) les arcs de courbe d'équation respectivement

$$f_{20}(a_1, a_2) = 0 \qquad f_{21}(a_1, a_2) = 0$$

situés dans un plan P rapporté aux axes rectangulaires Oa_1, Oa_2 et compris respectivement entre les droites d'équations $a_1 = 0$, $a_1 = \frac{1}{8}$ et $a_1 = \frac{1}{8}$, $a_1 = \frac{2}{\pi^2}$.

Il suffit alors de remarquer que (C_1) et (C_2) admettent, par exemple, les représentations paramétriques suivantes, de forme très simple

$$(40) \begin{cases} (C_1) \begin{cases} a_1 = f_{22}(s) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1-s}{\ln s}\,\dfrac{2(1-s) + (1+s)\ln s}{1 - s^2 + (1+s^2)\ln s} \\ a_2 = f_{23}(s) = -\dfrac{(1-s)^2}{4s\ln^2 s}\cdot\dfrac{1 - s^2 + 2s\ln s}{1 - s^2 + (1+s^2)\ln s} \end{cases} \\ \qquad \text{(a)} \quad s \in (0, 1);\ a_1 \in \left(0, \frac{1}{8}\right) \\ (C_2) \begin{cases} a_1 = f_{24}(s) = \dfrac{2(1-\cos s) - s\sin s}{2s(\sin s - s\cos s)} \\ a_2 = f_{25}(s) = \dfrac{(1-\cos s)(s - \sin s)}{2s^2(\sin s - s\cos s)} \end{cases} \\ \qquad \text{(b)} \quad s \in (0, \pi);\ a_1 \in \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)^*. \end{cases}$$

À une paire (a_1, a_2) de $\mathcal{A}$ on fera correspondre un point de coordonnées (a_1, a_2) dans le plan P. A l'ensemble $\mathcal{A}$ correspondra alors un domaine infini D de P, situé dans l'angle positif des axes, et borné inférieurement par une frontière (C).

Selon le théorème 1, l'équation de la courbe (C) est $a_2 = \alpha(a_1)$ et $f_4(\alpha(a_1)) = f_{20}(a_1, \alpha(a_1)) = f_{12}(\alpha(a_1)) = f_{21}(a_1, \alpha(a_1)) = 0$. Cette équation prend donc les formes $f_{20}(a_1, a_2) = 0$ pour $a_1 \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, $f_{21}(a_1, a_2) = 0$ pour $a_1 \in \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$ et $a_2 = \frac{1}{\pi^2}$ pour $a_1 \in \left(\frac{2}{\pi^2}, \infty\right)$. La courbe (C) passe par les points $A\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ et $B\left(\frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}\right)$. On en déduit à l'aide de (40) le

THÉORÈME 2. *La paire minimale relative par rapport à a_2 est la paire $(f_{22}(s), f_{23}(s))$ de (40) où s parcourt l'intervalle $(0, 1)$ quand a_1 parcourt l'intervalle $\left(0, \frac{1}{8}\right)$; la paire $(f_{24}(s), f_{25}(s))$ de (40) où s parcourt l'intervalle $(0, \pi)$ quand a_1 parcourt l'intervalle $\left(\frac{1}{8}, \frac{2}{\pi^2}\right)$ et la paire $\left(a_1, \frac{1}{\pi^2}\right)$ quand a_1 parcourt l'intervalle $\left[\frac{2}{\pi^2}, \infty\right)$.*

* Les relations (40) (a) et (b) se déduisent des tableaux 20 et 21.

Pour $a_1 = \frac{1}{8}$, la paire est $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

4. Il est d'ailleurs facile de construire la courbe (C) car elle admet, ainsi qu'on vient de le constater, la représentation paramétrique (40) pour $a_1 < \frac{2}{\pi^2}$.

On en déduit donc pour l'arc (C_1)

$$
(41)\quad \begin{cases}
\dfrac{da_1}{ds} = f'_{22}(s) = \dfrac{2sf_{26}(s)}{\ln^2 s[1 - s^2 + (1 + s^2)\ln s]^2} \\[2mm]
f_{26}(s) = \dfrac{(1-s)^3(1+s)}{2s^2} + \dfrac{1}{s^2}(1-s)^2(1+s+s^2)\ln s + \\
\qquad + \dfrac{1}{4s^2}(1-s^2)(1+4s+s^2)\ln^2 s + \ln^3 s. \\[2mm]
\dfrac{da_2}{ds} = f'_{23}(s) = \dfrac{1-s^2}{2s\ln s}\dfrac{da_1}{ds};\ \dfrac{d^2a_2}{da_1^2} = -\dfrac{1-s^2+(1+s^2)\ln s}{2s^2\ln^2 s} : \dfrac{da_1}{ds} \\[2mm]
\text{et pour l'arc } (C_2) \\[2mm]
\dfrac{da_1}{ds} = f'_{24}(s) = \dfrac{f_{27}(s)}{2s^2(\sin s - s\cos s)^2} \\[2mm]
f_{27}(s) = -2\sin s(1-\cos s) + 2s(1-\cos)(1+2\cos s) - \\
\qquad - s^2\sin s(2+\cos s) + s^3 \\[2mm]
\dfrac{da_2}{ds} = f'_{25}(s) = -\dfrac{\sin s}{s}\dfrac{da_1}{ds};\ \dfrac{d^2a_2}{da_1^2} = \dfrac{\sin s - s\cos s}{s^2\dfrac{da_1}{ds}}.
\end{cases}
$$

Par conséquent pour $s \in (0, 1)$

$$
(42)\quad \begin{cases}
f_{28}(s) = -\dfrac{2s^3}{(1-s)^2(1+4s+s^2)\ln s}f'_{26}(s) = \ln s + 3\dfrac{1-s^2}{1+4s+s^2} \\[2mm]
f'_{28}(s) = \dfrac{(1-s)^4}{s(1+4s+s^2)} > 0,\quad f_{28}(s) < f_{28}(1) = 0,\quad f'_{26}(s) < 0, \\[2mm]
f_{26}(s) > f_{26}(1) = 0,\quad f'_{22}(s) > 0,\quad f'_{23}(s) < 0, \\[2mm]
f_{29}(s) = \ln s + \dfrac{1-s^2}{1+s^2},\quad f'_{29}(s) = \dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1-s^2}{1+s^2}\right)^2 > 0, \\[2mm]
f_{29}(s) < f_{29}(1) = 0,\quad 1 - s^2 + (1+s^2)\ln s < 0,
\end{cases}
$$

et pour $s \in (0, \pi)$

$$
(42)\quad \begin{cases}
f_{30}(s) = \dfrac{f'_{27}(s)}{2s(1-\cos s)(2+\cos s)} = s - \dfrac{3\sin s}{2+\cos s}. \\[2mm]
f'_{30}(s) = \left(\dfrac{1-\cos s}{2+\cos s}\right)^2 > 0,\quad f_{30}(s) > f_{30}(0) = 0, \\[2mm]
f'_{27}(s) > 0,\ f_{27}(s) > f_{27}(0) = 0,\quad f'_{24}(s) > 0, \\[2mm]
f'_{25}(s) < 0,\quad f_{31}(s) = \sin s - s\cos s, \\[2mm]
f'_{31}(s) = s\sin s > 0,\quad f_{31}(s) > f_{31}(0) = 0.
\end{cases}
$$

Tableau 20

s	0		1
$\frac{da_1}{ds} = f'_{22}(s)$		+	
$a_1(s) = f_{22}(s)$	0	↗	$\frac{1}{8}$
$\frac{da_2}{ds} = f'_{23}(s)$		−	
$a_2(s) = f_{23}(s)$	∞	↘	$\frac{1}{8}$
$\frac{da_2}{da_1}$			−1
$\frac{d^2a_2}{da_1^2}$		+	

Tableau 21

s	0		π
$\frac{da_1}{ds} = f'_{24}(s)$		+	
$a_1(s) = f_{24}(s)$	$\frac{1}{8}$	↗	$\frac{2}{\pi^2}$
$\frac{da_2}{ds} = f'_{25}(s)$		−	
$a_2(s) = f_{25}(s)$	$\frac{1}{8}$	↘	$\frac{1}{\pi^2}$
$\frac{da_2}{da_1}$	−1		0
$\frac{d^2a_2}{da_1^2}$		+	

Les tableaux 20 et 21 donnent donc pour la frontière (C) la forme de la fig. 1, dans laquelle le domaine D est marqué en pointillé.

5. On constate sur la fig. 1 qu'une paire minimale relative par rapport à a_2 est en même temps une paire minimale relative par rapport à a_1. De la sorte, on a démontré le

THÉORÈME 3. I. *La paire minimale relative par rapport à a_1 pour une valeur donnée de a_2, est la paire $(\beta(a_2), a_2)$ où la fonction $\beta(a_2)$ est définie comme suit.*

1°. *Si* $a_2 = \frac{1}{\pi^2}$, $\beta(a_2) = \frac{2}{\pi^2}$.

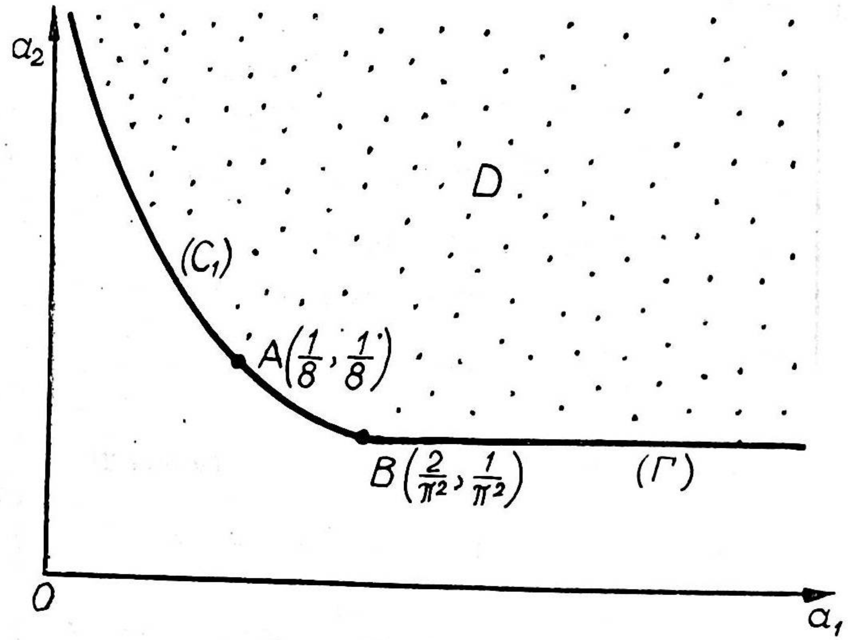

Fig. 1

2°. *Si* $\frac{1}{\pi^2} < a_2 < \frac{1}{8}$, $\beta(a_2)$ *est la racine de la fonction de* a_1 *obtenue en considérant dans l'énoncé du Théorème* 1, *l'expression* $f_{12}(a_2)$ *comme une fonction de* a_1.

3°. *Si* $a_2 = \frac{1}{8}$, *alors* $\beta(a_2) = \frac{1}{8}$.

4°. *Si* $a_2 > \frac{1}{8}$, $\beta(a_2)$ *est la racine de la fonction de* a_1 *obtenue en considérant dans l'énoncé du théorème* 1 *l'expression* $f_4(a_2)$ *comme une fonction de* a_1.

II. *La fonction* $\beta(a_2)$ *est décroissante et* $\lim\limits_{a_2 \to \infty} \beta(a_2) = 0$.

On constate aussi sur la fig. 1 qu'il n'y a pas de paire minimale absolue par rapport à a_1. La remarque faite au début de ce paragraphe démontre aussi le

THÉORÈME 4. *La paire minimale relative par rapport à* a_1 *est la paire* $(f_{24}(s), f_{25}(s))$ *de* (40) *où s parcourt l'intervalle* $[\pi, 0)$ *quand* a_2 *parcourt l'intervalle* $\left|\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{8}\right)$ *et la paire* $[f_{22}(s), f_{23}(s)]$ *de* (40) *où s parcourt l'intervalle* $(1, 0)$ *quand* a_2 *parcourt l'intervalle* $\left(\frac{1}{8}, \infty\right)$. *Pour* $a_2 = \frac{1}{8}$ *la paire est* $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

6. La représentation de la paire minimale relative, donnée aux Théorèmes 2 et 4 permet de déterminer facilement les paires minimales par rapport à des fonctions $f(a_1, a_2)$ données. Bien que cette détermination puisse se faire aussi à l'aide des théorèmes 1 et 3, nous croyons que c'est là un des cas mentionnés au début du paragraphe 3, qui justifient la présentation de la forme (40) de ces paires minimales.

On se bornera à deux exemples, simples donnés par le

THÉORÈME 5. *La paire minimale relative à chaqune des fonctions*

$$f^{[1]}(a_1, a_2) = a_1 a_2, \quad f^{[2]}(a_1, a_2) = a_1^m + a_2^m,$$

(m nombre naturel quelconque) est la paire $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$*)*.

Démonstration. On suppose la fonction $f(a_1, a_2)$ définie, ainsi qu'on l'a mentionné au paragraphe 1, dans D et sur (C) et, de plus, croissante par rapport à l'une des variables. Pour fixer les idées, cette variable sera a_2. Il est alors évident que l'éventuelle paire minimale par rapport à $f(a_1, a_2)$ est la paire $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = (\bar{a}_1, \alpha(\bar{a}_1))$, où $f_{32}(\bar{a}_1) = \min\limits_{a_1 > 0} f_{32}(a_1)$ avec $f_{32}(a_1) = f(a_1, \alpha(a_1)))$.
On en déduit, à l'aide du théorème 2

$$f_{32}(\bar{a}_1) = \min\left(\inf_{s \in (0,1)} f\left[f_{22}(s), f_{23}(s)\right], f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right),\right.$$

$$\left.\inf_{s \in (0,\pi)} f[f_{24}(s), f_{25}(s)], \quad \inf_{a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}} f\left(a_1, \frac{1}{\pi^2}\right)\right). \tag{43}$$

(paire minimale $(\bar{a}_1, \alpha(\bar{a}_1))$.

Une condition suffisante pour que $f_{32}(a_1)$ admette un minimum dans l'intervalle $(0, \infty)$-s'il y en a plusieurs on en considérera le plus petit — est évidemment la suivante.

(44)

1° *ou bien que tous les trois infima de* (43) *soient* $\geqslant f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, *auquel cas* $\bar{a}_1 = \frac{1}{8}$.

2° *ou bien, si le plus petit de ces infima est moindre que* $f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, *qu'il soit atteint pour une valeur* $\bar{s}$ *de l'intervalle ouvert (ou semi-ouvert), respectif, auquel cas* $\bar{a}_1 = f_{22}(\bar{s})$ *ou* $\bar{a}_1 = f_{24}(\bar{s})$, *suivant le cas.*

---

*) On désigne par $f^{[i]}(a_1, a_2) (i = 1, 2, \ldots)$ les diverses formes de la fonction $f(a_1, a_2)$ qui intervient dans la définition 3.

Cette remarque rend la démonstration immédiate. On posera pour la commodité

$$
\begin{aligned}
& f_{33}^{[i]}(s) = f^{[i]}(f_{22}(s), f_{23}(s)), \quad f_{34}^{[i]}(s) = f^{[i]}(f_{24}(s), f_{25}(s)), \\
(45) \qquad & f_{35}^{[i]}(a_1) = f^{[i]}\left(a_1, \frac{1}{\pi^2}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
$$

Si $f^{[1]}(a_1, a_2) = a_1 a_2$, (45), (40), (41) donnent

$$f_{33}^{[1]'}(s) = -\frac{(1-s)^2}{4s\ln^2 s}\,\frac{1+4s+s^2}{1-s^2+(1+s^2)\ln s} f_{28}(s) f_{22}'(s) < 0$$

$$f_{34}^{[1]'}(s) = \frac{(1-\cos s)(2+\cos s)}{2s^2(\sin s - s\cos s)} f_{30}(s) f_{24}'(s) > 0,$$

conformément à (42) de sorte que les tableaux 20 et 21 donnent

$$(46) \qquad \inf_{s\in(0,1)} f_{33}^{[1]}(s) = \inf_{s\in(0,\pi)} f_{34}^{[1]}(s) = f^{[1]}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

D'ailleurs, en (45) $f_{35}^{[1]}(a_1) = \frac{a_1}{\pi^2}$, de sorte que $\inf\limits_{a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}} f_{35}^{[1]}(a_1) = \frac{2}{\pi^4} > \frac{1}{64} = f^{[1]}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, ce qui, avec (46), assure la condition 1° (44), auquel cas (43) donne la paire minimale $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$.

Soit maintenant $f^{[2]}(a_1, a_2) = a_1^m + a_2^m$, En posant $d = a_2 - a_1$, $p = a_1 a_2$ on déduit

$$a_1 = \frac{1}{2}(-d + \sqrt{a^2 + 4p}), \quad a_2 = \frac{1}{2}(d + \sqrt{d^2 + 4p})$$

de sorte que

$$f^{[2]}(a_1, a_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2n-1}} \sum\limits_{\sigma=0}^{n} C_{2n}^{2\sigma} d^{2\sigma}(d^2 + 4p)^{n-\sigma} & \text{pour } m = 2n \text{ pair} \\ \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + 4p}}{2^{2p}} \sum\limits_{\sigma=0}^{n} C_{2n+1}^{2\sigma} d^{2\sigma}(d^2 + 4p)^{n-\sigma} & \text{pour } m = 2n+1 \text{ impair} \end{cases}$$

La paire $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ est minimale, ainsi qu'on vient de le constater, par rapport à la fonction p et aussi à la fonction d^2* de sorte que, vu que

* cf. fig. 1.

$f(a_1, a_2)$, considérée comme une fonction de d^2 et de p est croissante par rapport à chaque de ces variables non-négatives, elle atteindra son minimum pour la paire qui réalise à la fois le minimum de p et de d^2, donc pour la paire $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ ce qui démontre le théorème.

Il résulte du théorème 5 que le point A de la fig. 1 est le point du domaine D le plus rapproché de l'origine des axes. On pourrait en ce sens considérer dans $\mathcal{A}$ la paire $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ comme la „plus petite" des paires de cet ensemble.

II

7. Nous aborderons à présent le cas où le nombre h_E de (2) est — ainsi qu'il a été mentionné à la fin du paragraphe 1-la plus petite racine positive des dérivées des intégrales de l'équation E à coefficients constants qui s'annulent pour $x = 0$ et nous présenterons le.

THÉORÈME 6. I. *La paire minimale relative par rapport à a_2 est la paire $(a_1, \bar{\alpha}(a_1)$*) où la fonction $\bar{\alpha}(a_1)$ est définie comme suit:*

1° *Si* $0 < a_1 < \frac{1}{4}$, *$\bar{\alpha}(a_1)$ est la racine plus grande que* $1 - 2a_1$ *de la fonction de la variable* a_2

$$
\begin{aligned}
f_{42}(a_2) = {} & \frac{1}{\sqrt{2a_1 a_2}}\{(1-a_1)^2 a_2^2 - 4a_1^2 a_2 - 4a_1^4 + \\
& + [(1+a_1)a_2 + 2a_1^2]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\}^{\frac{1}{2}} + \\
& + 2\ln\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{1}{2a_1^3}\left[2a_1^2(1+a_1) + a_2(1-4a_1-a_1^2) + \right.\right.\right. \\
& \left.\left. + (1-a_1)\sqrt{4a_4^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{\frac{1}{2a_1^3}\left[2a_1^2(1-3a_1) + \right.\right. \\
& \left.\left.\left. + a_2(1-4a_1-a_1^2) + (1-a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

2° *Si* $a_1 = \frac{1}{4}$, $\bar{\alpha}(a_1) = \frac{1}{2}$.

* les notations $\alpha(a_1)$, $\beta(a_2)$, $\mathcal{A}$, D, (C_1), (C_2), (Γ) de la première partie seront remplacées dans la seconde par $\bar{\alpha}(a_1)$, $\bar{\beta}(a_2)$, $\bar{\mathcal{A}}$, $\bar{D}$, $(\bar{C}_1)$, $(\bar{C}_2)$, $(\bar{\Gamma})$.

3° *Si* $\frac{1}{4} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}$, $\overline{\alpha}(a_1)$ *est la racine plus grande que* $1 - 2a_1$ *de la fonction de la variable* a_2

$$f_{53}(a_2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}\,a_1 a_2}\Big\{4a_1^4 + 4a_1^2 a_2 - (1-a_1)^2 a_2^2 +$$

$$+ [2a_1^2 + (1+a_1)a_2]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1 - 6a_1 + a_1^2)a_2^2}\Big\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}(a_2 - a_1)}\Big\{2a_1^3 + (1 - a_1^2)a_2 - 2a_2^2 +$$

$$+ (1 - a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1 - 6a_1 + a_1^2)a_2^2}\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

4° *Si* $a_1 \geqslant \frac{4}{\pi^2}$, $\overline{\alpha}(a_1) = \frac{4}{\pi^2}$.

II. *Si* $3 - 2\sqrt{2} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}$, $\overline{\alpha}(a_1) < \frac{2a_1^2}{a_1 - 1 + 2\sqrt{a_1}}$

III. *Au cas* 1° *on a* $\lim\limits_{a_1 \to 0} \overline{\alpha}(a_1) = \infty$.

Démonstration. Si le polynome caractéristique $P_3(r) = r^2 + c_1 r + c_2$ de l'équation (1) qui prend à présent la forme

$$y'' + c_1 y' + c_2 y = 0$$

(c_1, c_2 constantes) a les racines réelles et distinctes, r_1 et r_2, alors l'intégrale $\varphi(x)$ de l'équation (E) qui vérifie les conditions $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ -ce qu'on peut toujours supposer-a la forme $\varphi(x) = A(e^{r_1 x} - e^{r_2 x})$ (A constante).

Si donc $r_1 r_2 \leqslant 0$, $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout $x \geqslant 0$, et si $r_1 r_2 > 0$, $\varphi'(x)$a la seule racine $x = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\frac{r_2}{r_2}$ en x qui est de signe contraire au signe commun de r_1 et r_2.

Si donc r_1 et r_2 sont négatifs, en posant

$$r_i = -R_i (i = 1, 2),\ \text{avec}\ 0 < R_2 < R_1,\ \text{on a}$$

$$h = \frac{1}{R_1 - R_2}\ln\frac{R_1}{R_2},\ m_1 = R_1 + R_2,\ m_2 = R_1 R_2,$$

de sorte que la relation (2) s'écrit

$$a_2\frac{s}{(1-s)^2}\ln^2 s - a_1\frac{1+s}{1-s}\ln s - 1 \geqslant 0\ \text{avec}\ 0 < s = \frac{R_2}{R_1} < 1.$$

Cette relation s'écrit

$$a_1\frac{s}{(1-s)^2}\left[\ln s - \frac{a_1}{a_2}\frac{1-s^2}{2s} - \frac{1-s}{2a_2 s}\sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2}\right] \times$$

$$\times\left[\ln s - \frac{a_1}{a_2}\frac{1-s^2}{2s} + \frac{1-s}{2a_2 s}\sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2}\right] \geqslant 0.$$

Étant donné que l'expression dans le premier crochet ci-dessus est évidemment négative, la relation ci-dessus s'écrit

$$f_{36}(s) = \ln s - \frac{a_1}{a_2}\frac{1-s^2}{2s} + \frac{1-s}{2a_2 s}\sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2} \leqslant 0 \tag{47}$$

$$(0 < s < 1)$$

Si le polynome caractéristique a la racine double ρ-évidemment réélle et non-nulle, car pour l'équation $y'' = 0$ le problème ne se pose pas — alors $\varphi(x) = x e^{\rho x}$ donc $\varphi'(x) = e^{\rho x}(1 + \rho x)$. Si $\rho > 0$, $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$, et si $\rho < 0$, alors $h = -\frac{1}{\rho}$, $m_1 = -2\rho$, $m_2 = \rho^2$, de sorte que la relation (2) s'écrit

$$2a_1 + a_2 - 1 \geqslant 0. \tag{48}$$

Si le polynome caractéristique a les racines complexes $\alpha \pm i\beta (\beta > 0)$, alors $\varphi(x) = Ae^{\alpha x}\sin\beta x$, donc $\varphi'(x) = Ae^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) = 0$. quand $\operatorname{tg}\beta\overline{x} = -\beta/\alpha$. Si $\alpha < 0$, alors $\overline{x} = \frac{1}{\beta}\left[K\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]$. donc $h = \frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $m_1 = -2\alpha$, $m_2 = \alpha^2 + \beta^2$, de sorte que la relation (2) s'écrit

$$a_2\frac{1+s^2}{s^2}(\operatorname{arctg} s)^2 + \frac{2a_1}{s}\operatorname{arctg} s - 1 \geqslant 0,\ \text{avec}\ s = -\frac{\beta}{\alpha} > 0.$$

Cette relation s'écrit

$$a_2\frac{1+s^2}{s^2}\left[\operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} + \frac{s}{a_2(1+s^2)}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}\right] \times$$

$$\times\left[\operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}\right] \geqslant 0.$$

Étant donné que l'expression du premier crochet est évidemment positive, la relation ci-dessus s'écrit

$$(49)\qquad f_{37}(s) = \operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2} \geqslant 0 \ (s > 0).$$

Si $\alpha = 0$, $\varphi(x) = A \sin \beta x$, $\varphi'(x) = A\beta \cos \beta x$, $h = \frac{\pi}{2\beta}$, $m_1 = 0$, $m_2 = \beta^2$, de sorte que (2) s'écrit

$$(50)\qquad a_2 \geqslant \frac{4}{\pi^2}.$$

Si $\alpha > 0$, $\varphi'(x) = 0$ quand $x = \frac{1}{\beta}\left(K\pi - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)$, donc $h = \frac{1}{\beta}\left(\pi - \right.$ $\left. - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)$, $m_1 = 2\alpha$, $m_2 = \alpha^2 + \beta^2$, de sorte que la relation (2) s'écrit

$$a_2 \frac{1+s^2}{s^2}(\pi - \operatorname{arctg} s)^2 + \frac{2}{s} a_1(\pi - \operatorname{arctg} s) - 1 \geqslant 0, \text{ avec } s = \frac{\beta}{\alpha} > 0.$$

Cette relation s'écrit

$$a_2 \frac{1+s^2}{s^2}\left[\pi - \operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} + \frac{s}{a_2(1+s^2)}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}\right] \times$$

$$\times \left[\pi - \operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}\right] \geqslant 0.$$

Étant donné que l'expression du premier crochet est à nouveau évidemment positive, la relation ci-dessus s'écrit

$$(51)\qquad \pi - \operatorname{arctg} s + \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2} \geqslant 0 \ (s > 0),$$

et est évidemment une conséquence de la relation (50), parce que

$$(52)\qquad \pi - \operatorname{arctg} s > \frac{\pi}{2}$$

et si l'on pose

$$f_{38}(s) = -\frac{\pi}{2} - \frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} + \frac{s}{a_2(1+s^2)}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}$$

alors

$$f'_{38}(s) = \frac{a_2 + a_1^2 + (a_2 - a_1^2)s^2 - a_2(1-s^2)\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}}{a_2(1+s^2)^2\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}} > 0$$

de sorte que $f_{38}(s) < f_{38}(\infty) = \frac{1}{\sqrt{a_2}} - \frac{\pi}{2} \leqslant 0$,

Par conséquent

$$\frac{a_1 s}{a_2(1+s^2)} - \frac{s}{a_2(1+s^2)}\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2} > -\frac{\pi}{2},$$

ce qui, avec (52) assure l'inégalité stricte en (51).

Ainsi donc, l'ensemble $\mathcal{A}$ est formé des paires (a_1, a_2) qui vérifient les relations (47), (48), (49) et (50).

La relation (47) donne

$$(53)\qquad \begin{cases} f'_{36}(s) = \dfrac{-(1+s)(a_1^2 + 2a_2 s + a_1^2 s^2) + (a_1 + 2a_2 s + a_1 s^2)\sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2}}{2a_2 s^2\sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2}} = \\ = \dfrac{2P_4(s)}{s\left[(1+s)(a_1^2 + 2a_2 s + a_1^2 s^2) + (a_1 + 2a_2 s + a_1 s^2)\sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2}\right]\sqrt{4a_2 s + a_1^2(1+s)^2}} \\ P_4(s) = a_1^3(1+s^4) + [-2a_1^2(1-a_1) + a_2(-1 + 4a_1 + \\ + a_1^2)]s(1+s^2) + 2[a_1^3 + a_2(-1 + a_1^2) + 2a_2^2]s^2. \end{cases}$$

La relation $P_4(s) = 0$ s'écrit, si l'on pose $x = s + \frac{1}{s}$

$$P_5(x) = a_1^3 x^2 + [2a_1^2(-1 + a_1) + a_2(-1 + 4a_1 + a_1^2)]x +$$

$$(54)\qquad + 2a_2(-1 + a_1^2 + 2a_2) = 0.$$

Le réalisant du polynome $P_5(x)$ est

$$(55)\qquad R = (1 - a_1)^2[4a_1^4 + 4a_1^2(1 - a_1)a_2 + (1 - 6a_1 + a_1^2)a_2^2]$$

et si x_1 et x_2 sont les racines de $P_5(x)$, alors les racines de $P_4(s)$ sont données par les équations $s^2 - x_1 s + 1 = 0$, $s^2 - x_2 s + 1 = 0$, dont les racines seront désignées par s_1, s_2 respectivement s_3, s_4 et qui sont positives au seul cas où $x_1 \geqslant 2$, respectivement $x_2 \geqslant 2$.

Or,

$$(56)\quad \begin{cases} P_5(2) = 4(a_2 + 2a_1 - 1)(a_2 + a_1^2) \geqslant 0 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{2} - 2 = \dfrac{1}{2a_1^3}\left[2a_1^2(1 - 3a_1) + a_2(1 - 4a_1 - a_1^2)\right]. \end{cases}$$

Ainsi donc, si $a_2 + 2a_1 - 1 = 0$, on a

$$x_1 = 2,\quad x_2 = x_2(a_1) = \frac{1}{a_1^3}(1 - 2a_1)(1 - 4a_1 + a_1^2)$$

$$x_2'(a_1) = -\frac{3}{a_1^4}(1 - a_1)(1 - 3a_1).$$

Tableau 22

a_1	0		$\frac{1}{4}$		$2-\sqrt{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
$x_2'(a_1)$					$-$		0	$+$	
$x_2(a_1)$	∞	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Au tableau 22 on a donc pour $0 < a_1 < \frac{1}{4}$: $x_2 > 2$, de sorte que $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 - \sqrt{x_2^2 - 4}\right) < 1$, $s_4 > 1$.

Donc

$$(57)\quad \begin{cases} \text{si } a_2 = 1 - 2a_1, \text{ alors pour } 0 < a_1 < \frac{1}{4}\ f_{36}'(s) \text{ a dans l'inter-} \\ \text{valle } (0, 1) \text{ la racine } s_3, \text{ et si } \frac{1}{4} \leqslant a_1 < \frac{1}{2},\ f_{36}'(s) \neq 0 \text{ pour} \\ \text{tout } s \in (0, 1). \end{cases}$$

On va étudier le signe de R de (55). A cet effet, on construira dans le plan P de la fig. 2 la courbe (C_3) d'équation

$$4a_1^4 + 4a_1^2(1 - a_1)a_2 + (1 - 6a_1 + a_1^2)a_2^2 = 0.$$

On en déduit

$$(58)\quad a_2 = f_{39}(a_1) = \frac{2a_1^2}{a_1 - 1 - 2\sqrt{a_1}},\quad a_2 = f_{40}(a_1) = \frac{2a_1^2}{a_1 - 1 + 2\sqrt{a_1}}$$

de sorte que

$$f_{39}'(a_1) = 2a_1\frac{a_1 - 2 - 3\sqrt{a_1}}{(a_1 - 1 - 2\sqrt{a_1})^2},\quad f_{40}'a_1) = 2a_1\frac{a_1 - 2 + 3\sqrt{a_1}}{(a_1 - 1 + 2\sqrt{a_1})^2}.$$

Tableau 23

a_1	0		$3+2\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}(13+3\sqrt{17})$		∞
$f_{39}'(a_1)$			$-$		0		$+$
$f_{39}(a_1)$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(71+17\sqrt{17})$	$\nearrow$	∞

Tableau 24

a_1	0		$3-2\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}(13-3\sqrt{17})$		∞
$f_{40}'(a_1)$			$-$		0		$+$
$f_{40}(a_1($	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}(71-17\sqrt{17})$	$\nearrow$	∞

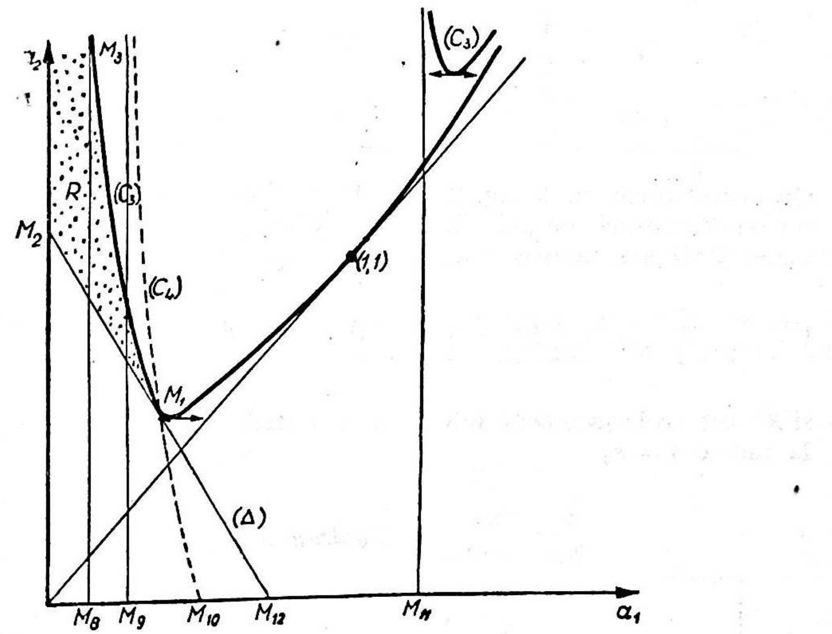

Fig. 2

Coordonnées des points: $M_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $M_2(0,1)$, $M_8(3 - 2\sqrt{2}, 0)$, $M_9(\sqrt{5} - 2, 0)$, $M_{10}\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ $M_{11}(3 + 2\sqrt{2}, 0)$, $M_{12}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

On entendra, dans le reste du travail, pour abréger, par „courbe" ou „droite" la portion de la courbe ou de la droite respective située dans l'angle positif des axes $0a_1a_2$. Dans la fig. 2 on a tracé d'un trait continu la courbe (C_3) et la droite (Δ) d'équation $a_2 + 2a_1 - 1 = 0$ et en pointillé la courbe (C_4) d'équation

$$2a_1^2(1 - 3a_1) + a_2(1 - 4a_1 - a_1^2) = 0,$$

c'est-à-dire $a_2 = f_{41}(a_1) = 2a_1^2 \dfrac{1 - 3a_1}{-1 + 4a_1 + a_1^2}$

avec $f'_{41}(a_1) = -2a_1 \dfrac{2 - 13a_1 + 24a_1^2 + 3a_1^3}{(-1 + 4a_1 + a_1^2)^2} < 0$

qui intervient dans le signe de l'expression $\dfrac{x_1 + x}{2} - 2$ de (56).

Tableau 25

a_1	0		$\sqrt{5} - 2$		$\frac{1}{3}$		∞
$f_{41}(a_1)$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On déduit donc sur la fig. 2 à l'aide de (57) que si le point M est dans la région R marquée en pointillé, alors $x_2 > x_1 > 2$, donc $f'_{36}(s)$ a dans l'intervalle $(0, 1)$ les racines

(59) $$s = s_1 = \frac{1}{2}\left(x_1 - \sqrt{x_1^2 - 4}\right) \text{ et } s = s_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 - \sqrt{x_2^2 - 4}\right)$$

şi M est sur le segment ouvert aux extrémités $\overline{M_1M_2}$, $f'_{36}(s)$ a dans $(0, 1)$ la racine $s = s_3$.

Tableau 26

s	0		s_3		1
$f'_{36}(s)$		$+$	0	$-$	
$f_{36}(s)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_{36}(s_3)$	$\searrow$	0

Dans ce cas le tableau 26 indique qu'aucun point du segment en question n'appartient à $\overline{D}$.

(60) *Si M est sur la branche (infinie et ouverte en M_1) $\widehat{M_1M_3}$ de (C_3), $f'_{36}(s)$ a une racine double en $(0, 1)$ donc $f'_{36}(s) \geqslant 0$; si M est situé dans le reste de la région de l'angle positif des axes située sur ou au-dessus de (Δ), on a $f'_{36}(s) > 0$ pour tout $s \in (0, 1)$, donc $f_{36}(s) < f_{36}(1) = 0$.*

On peut donc supposer, grâce à (60), que le point M est situé dans la région R, de sorte que $0 < a_1 < \frac{1}{4}$.

Tableau 27

s	0		s_3		s_1		1
$f'_{36}(s)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_{36}(s)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_{36}(s_3)$	$\searrow$	$f_{36}(s_1)$	$\nearrow$	0

Vu que $x - \sqrt{x^2 - 4}$ décroît, qund x croît au delà de 2, on a en (59) $s_3 < s_1$.

On déduit donc du tableau 27 que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $f_{36}(s) \leqslant 0$ pour tout $s \in (0, 1)$, est que l'on ait $f_{36}(s_3) \leqslant 0$.

On considèrera s_3 donné par (59) et (54) comme une fonction de a_2, auquel cas (47) et (53) donnent

$$f_{36}(s_3) = f_{42}(a_2) = \ln s_3 + \frac{(1 - a_1)(1 - s_3^2)}{a_1 + 2a_2s_3 + a_1s_3^2}.$$

On en déduit

$$f_{42}(a_2) = \frac{1}{\sqrt{2a_1a_2}}\{-4a_1^4 - 4a_1^3a_2 + (1 - a_1)^2a_2^2 +$$

$$+ [2a_1^2 + (1 + a_1)a_2]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - a_1)a_2 + (1 - 6a_1 + a_1^2)a_2^2}\}^{1/2} +$$

$$+2\ln\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{1}{2a_1^3}\left[2a_1^2(1+a_1)+a_2(1-4a_1-a_1^2)+\right.\right.\right.$$

(61)

$$\left.\left.+(1-a_1)\sqrt{4a_1^4+4a_1^2(1-a_1)a_2+(1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\right]\right\}^{1/2}-$$

$$-\left\{\frac{1}{2a_1^3}\left[2a_1^2(1-3a_1)+a_2(1-4a_1-a_1^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+(1-a_1)\sqrt{4a_1^4+4a_1^2(1-a_1)a_2+(1-6a_1+a_1^2)a_1^2}\right\}^{1/2}\right),$$

de sorte que

$$f_{42}(1-4a_1)=f_{43}(a_1)=\frac{1-a_1}{a_1(1-2a_1)}\sqrt{1-4a_1}+$$

$$+\ln\frac{1}{2a_1^3}\left[(1-2a_1)(1-4a_1+a_1^2)-(1-a_1)(1-3a_1)\sqrt{1-4a_1}\right]$$

d'où

$$f'_{43}(a_1)=-\frac{(1-a_1)(1-4a_1)}{a_1^2(1-2a_1)^2}\sqrt{1-4a_1}<0,$$

donc pour

(62) $$0<a_1<\frac{1}{4},\quad f_{42}(1-2a_1)=f_{43}(a_1)>f_{43}\left(\frac{1}{4}\right)=0.$$

La branche $\widehat{M_1M_3}$ de (C_3) a l'équation $a_2=f_{40}(a_1)$, de sorte qu'on déduit de (60) la relation (63) dans laquelle s_3 est une valeur de $s\in(0,1)$:

(63) $$f_{36}(s_3)\Big|_{M\ \text{sur}\ \widehat{M_1M_3}}=f_{42}(f_{40}(a_1))<0\quad\text{pour}\quad 3-2\sqrt{2}<a_1<\frac{1}{4}$$

ce qui d'ailleurs peut se vérifier directement, car (61) donne pour $3-2\sqrt{2}<$ $<a_1<\frac{1}{4}$

$$f_{42}(f_{40}(a_1))=f_{44}(a_1)=$$

$$=\frac{1}{a_1}(1+\sqrt{a_1})\sqrt{1-2\sqrt{a_1}}+\ln\frac{1-a_1-(1+a_1)\sqrt{a_1}-(1-a_1)\sqrt{1-2\sqrt{a_1}}}{\sqrt{a_1}(-1+a_1+2\sqrt{a_1})}$$

de sorte que

$$f'_{44}(a_1)=\frac{(1+\sqrt{a_1})(1-2\sqrt{a_1})\sqrt{1-2\sqrt{a_1}}}{a_1^2(-1+a_1+2\sqrt{a_1})}>0$$

et $f_{44}(a_1)<f_{44}\left(\frac{1}{4}\right)=0.$

Si l'on pose en (47) $f_{36}(s)=f_{45}(a_2,s)$

alors

$$f'_{42}(a_2)=\frac{\partial f_{45}(a_2,s}{\partial a_2}\bigg|_{s=s_3}+f'_{36}(s_3)\frac{ds_3}{da_2}\bigg|_{s=s_3}=\frac{\partial f_{45}(a_2,s)}{\partial a_2}\bigg|_{s=s_3}=$$

(64)

$$=-\frac{2s_3(1-s_3)}{\left[2a_2s_3+a_1^2(1+s_3)^2+a_1(1+s_3)\sqrt{4a_2s_3+a_1^2(1+s_3)^2}\right]\sqrt{4a_2s_3+a_1^2(1+s_3)^2}}<0.$$

On déduit donc de (62), (63) et (64) les tableaux 28 et 29.

Tableau 28

a_2	$1-2a_1$		$\alpha(a_1)$		∞
$f_{42}(a_2)=$ $=f_{36}(s_3)$	$f_{42}(1-2a_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tableau 29

a_2	$1-2a_1$		$\bar{\alpha}(a_1)$		$f_{40}(a_1)$
$f_{42}(a_2)=$ $=f_{36}(s_3)$	$f_{42}(1-2a_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f_{42}(f_{40}(a_1))$

valables respectivement pour $0<a_1\leqq 3-2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}<a_1<\frac{1}{4}$ ce qui avec (60) indique que

(65) *si le polynome caractéristique de l'équation (E) a des racines réelles et distinctes, alors au cas où*

$$1-2a_1\leqq a_2<\bar{\alpha}(a_1),$$

Il existe des valeurs $s\in(0,1)$ avec $f_{36}(s)>0$, tandisque si $a_2\geqq\alpha(a_1)$, alors $f_{36}(s)\leqq 0$ pour tout $s\in(0,1)$; au cas où $a_1\geqq\frac{1}{4}$, on a $f_{36}(s)<0$ pour tout $s\in(0,1)$; $\bar{\alpha}(a_1)$ est la racine plus grande que $1-2a_1$ de la fonction de la variable $a_2: f_{42}(a_2)$ de (61).

La relation (49) donne

$$
(66)\quad \begin{cases} f'_{37}(s) = \dfrac{1}{a_2(1+s^2)^2}\left[a_2 + a_1 + (a_2 - a_1)s^2 - \dfrac{a_2 + a_1^2 + (a_2 - a_1^2)s^2}{\sqrt{a_2 + a_1^2 + a_2 s^2}}\right] = \\ = \dfrac{P_6(s)}{(1+s^2)\{a_2+a_1^2+(a_2-a_1^2)s^2+[a_2+a_1+(a_2-a_1)s^2]\sqrt{a_2+a_1^2+a_2s^2}\}\sqrt{a_2+a_1^2+a_2s^2}} \\ P_6(s) = (a_2 - a_1)^2 s^4 + [-2a_1^3 + (-1 + a_1^2)a_2 + 2a_2^2]s^2 + \\ \qquad + (a_2 + a_1^2)(a_2 + 2a_1 - 1). \end{cases}
$$

Si l'on pose $x = s^2$ la relation $P_6(s) = 0$ s'écrit

$$
(67)\quad \begin{aligned} P_7(x) = (a_2 - a_1)^2 x^2 + [-2a_1^3 + (-1 + a_1^2)a_2 + 2a_2^2]x + \\ + (a_2 + a_1^2)(a_2 + 2a_1 - 1) = 0. \end{aligned}
$$

Le réalisant du polynome $P_7(x)$ est l'expression R de (55). Il est évident que $P_6(x)$ de (66) peut avoir au plus deux racines positives, qui seront désignées par s_5 et s_6. Les expressions $a_2 + a_1 + (a_2 - a_1)s^2$ et $a_2 + a_1^2 + (a_2 - a_1^2)s^2$ peuvent s'annuler ensemble au seul cas où $a_1 = 1$, quand

$$
f'_{37}(s) = \frac{1}{a_2(1+s^2)^2}[1 + a_2 - (1 - a_2)s^2]\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a_2 + a_2 s^2}}\right).
$$

Si $0 < a_2 < 1$, on en déduit le tableau 30, tandis que si $a_2 \geqslant 1$, $f'_{37}(s) > 0$, de sorte que $f_{37}(s) > f_{37}(0) = 0$, donc

$$
(68)\quad \text{si} \quad a_1 = 1, \quad f_{37}(s) > 0 \quad \text{pour tout} \quad s > 0.
$$

On supposera donc $a_1 \neq 1$. Pour que l'on ait $f_{37}(s_i) = 0$, il faut et il suffit donc que $[a_2 + a_1 + (a_2 - a_1)s_i^2][a_2 + a_4^2 + (a_2 - a_1^2)s_i^2] > 0$.

Tableau 30

s	0		$\sqrt{\dfrac{1+a_2}{1-a_2}}$		∞
$f'_{37}(s)$	$+$		0	$-$	
$f_{37}(s)$	0	$\nearrow$	$f_{37}\left(\sqrt{\dfrac{1+a_2}{1-a_2}}\right)$	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} \geqslant 0$

Si l'on tient compte que $P_6(s_i) = 0 (i = 5, 6)$, la relation ci dessus s'écrit

$$
(69)\quad \begin{aligned} \frac{a_1 - 1}{a_2 - a_1}\{(a_2 + a_1^2)[2a_1^2 + (-1 + a_1)a_2] - \\ -[2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2]s_i^2\} > 0. \end{aligned}
$$

On va dessiner dans la fig. 3 la courbe C_3 d'équation $R = 0$ donnée par (55) d'un trait continu et la courbe (C_5) d'équation $2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2 = 0$ en pointillé. On en déduit

$$
a_2 = f_{46}(a_1) = \frac{4a_1^2}{1 + a_1 + \sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}, \quad a_2 = f_{47}(a_1) = \frac{4a_1^2}{1 + a_1 - \sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}
$$

$$
f'_{46}(a_1) = 4a_1 \frac{-14 + 15a_1 + a_1^2 + (2 + a_1)\sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}{(1 + a_1 + \sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2})^2\sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}
$$

$$
f'_{47}(a_1) = 4a_1 \frac{14 - 15a_1 - a_1^2 + (2 + a_1)\sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}{(1 + a_1 - \sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2})^2\sqrt{-7 + 10a_1 + a_1^2}}.
$$

Dans les tableaux 31 et 32, les nombres $a_{1,1}$ et $a_{1,2}$ sont les racines positives du polynome $P_8(a_1) = a_1^3 + 10a_1^2 - 27a_1 + 14$.

Tableau 31

a_1	$4\sqrt{2} - 5$		$a_{1,1}$		1		∞
$f'_{46}(a_1)$		$-$	0	$+$			
$f_{46}(a_1)$	$f_{46}(4\sqrt{2}-5)$	$\searrow$	$f_{46}(a_{1,1})$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

Tableau 32

a_1	$4\sqrt{2} - 5$		1		$a_{1,2}$		∞
$f'_{47}(a_1)$			$+$		0	$-$	
$f_{47}(a_1)$	$f_{47}(4\sqrt{2} - 5)$	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$f_{47}(a_{1,2})$	$\searrow$	$-\infty$

Les courbes (C_3) et (C_5) ont le seul point commun M_6 ainsi qu'on le constate immédiatement par élimination de a_2. Vu qu'en (67) $a_2 + 2a_1 - 1 \geqq 0$, pour que $P_7(x)$ ait des racines positives, il faut qu'en (67)

(70)
$$2a_1^3 + (1 - a_1^2)a_2 - 2a_2^2 > 0.$$

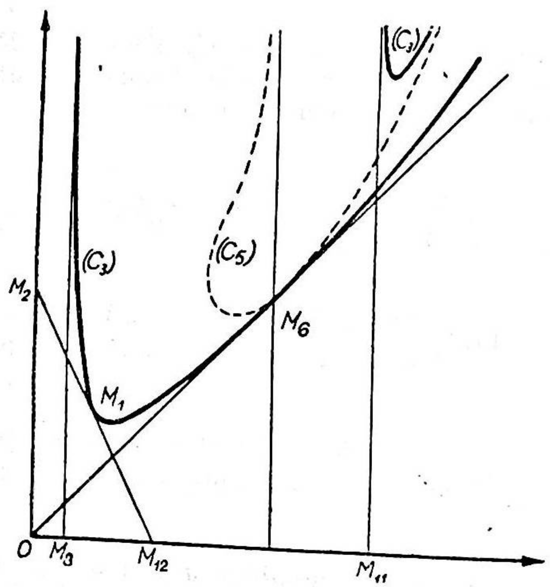

Fig. 3

Coordonnées des points :

$M_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $M_8(3 - 2\sqrt{2}, 0)$, $M_{12}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $M_{11}(3 + 2\sqrt{2}, 0)$

On construira donc dans la fig. 4 la courbe (C_3) d'un trait continu et la courbe (C_6) d'équation

(71)
$$2a_1^3 + (1 - a_1^2)a_2 - 2a_2^2 = 0$$

en pointillé. On en déduit

(72)
$$a_2 = f_{48}(a_1) = \frac{1}{4}[1 - a_1^2 + \sqrt{16a_1^3 + (1 - a_1^2)^2}]$$

$$f'_{48}(a_1) = a_1 \frac{-1 + 12a_1 + a_1^2 - \sqrt{16a_1^3 + (1 - a_1^2)^2}}{2\sqrt{16a_1^3 + (1 - a_1^2)^2}}.$$

Tableau 33

a_1	0		$2\sqrt{21} - 9$		∞
$f'_{48}(a_1)$		$-$	0	$+$	
$f_{48}(a_1)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$3(2\sqrt{21} - 9)$	$\nearrow$	∞

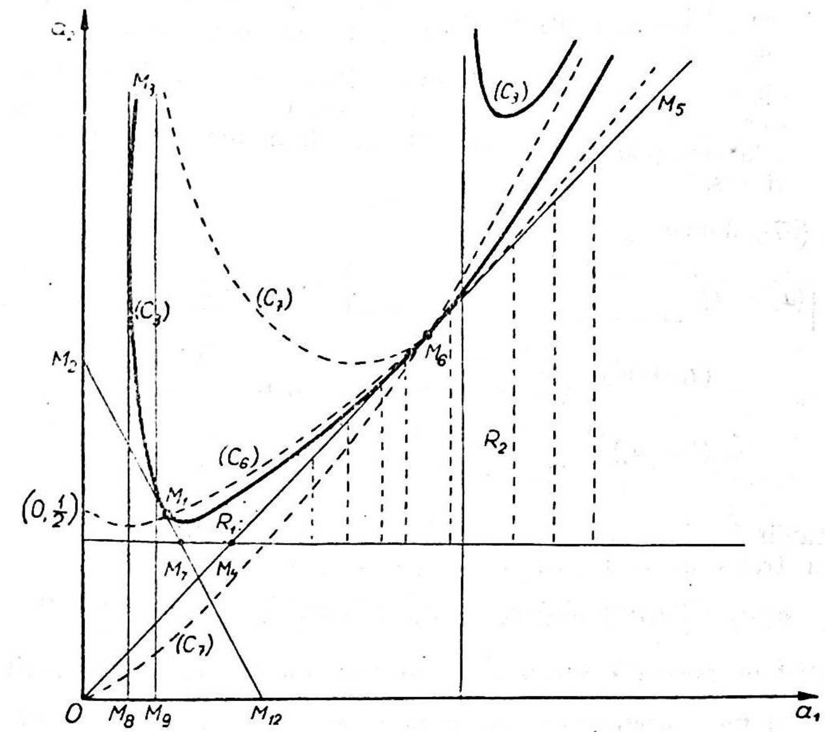

Fig. 4

Coordonnées des points :

$M_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $M_2(0, 1)$, $M_4\left(\frac{4}{\pi^2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$, $M_6(1, 1)$, $M_7\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}, \frac{4}{\pi^2}\right)$, $M_8(3 - 2\sqrt{2}, 0)$,

$M_9(\sqrt{5} - 2, 0)$, $M_{11}(3 + 2\sqrt{2}, 0)$, $M_{12}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

On a tenu compte pour dessiner la fig. 4, que

1° *Les valeurs minimes des tableaux* 24 *et* 33 *sont* $> \frac{4}{\pi^2}$.

2° *Les courbes* (C_3) *et* (C_6) *ont les seuls points communs* M_1 *et* M_6 *ainsi qu'on le constate de suite par élimination de* a_2.

On constate donc sur les fig. 3 et 4 qu'aux points M pour lesquels $P_6(s)$ a des racines positives, on a

$$2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2 > 0,$$

auquel cas (69) s'écrit

$$\frac{a_1 - 1}{a_2 - a_1}\left[- x_i + (a_2 + a_1^2)\frac{2a_1^2 + (-1 + a_1)a_2}{2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2}\right] > 0, \tag{73}$$

(74) où x_5 et x_6 sont les racines de $P_7(x)$ de (67). Ainsi donc pour que $f'_{37}(s)$ ait des racines positives, il faut et il suffit que les relations (70), (73) et $R \geqq 0$ avec R donné par (55) soient vérifiées.

Or, (67), donne

$$(75)\begin{cases} P_7\left[(a_2 + a_1^2)\dfrac{2a_1^2 + (-1 + a_1)a_2}{2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2}\right] = \dfrac{4a_1^3a_2^2(1 - a_1)^2(a_2 + a_1^2)(a_2 - a_1)}{[2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2]^2}. \\ (a_2 + a_1^2)\dfrac{2a_1^2 + (-1 + a_1)a_2}{2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2} - \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \\ = (1 - a_1)\dfrac{a_1^4(a_2 - 2a_1)^2 + a_1^2a_2^2(a_2 - 4a_1) + a_1a_2^2(4a_2 - a_1) - a_2^3}{2(a_2 - a_1)^2[2a_1^4 - a_1^2(1 + a_1)a_2 + (1 - a_1)a_2^2]}. \end{cases}$$

Pour établir le signe de cette dernière expression on construira sur la fig. 4 à traits interrompus, la courbe (C_7) d'équation

$$a_1^4(a_2 - 2a_1)^2 + a_1^2a_2^2(a_2 - 4a_1) + a_1a_2^2(4a_2 - a_1) - a_2^3 = 0 \tag{76}$$

A cet effet on posera $1 + u = \frac{a_1}{a_2}(a_2 - 2a_1)$. La relation (76) s'écrit alors $2a_1^2 - (12 + 6u + u^2)a_1 + 2 + 2u + 3u^2 + u^3 = 0$. Par conséquent

$$(77)\begin{cases} \mathrm{I}\begin{cases} a_1 = f_{49}(u) = \dfrac{1}{4}[12 + 6u + u^2 + (2 + u)\sqrt{32 + u^2}] \\ a_2 = f_{50}(u) = \dfrac{1}{2}\dfrac{[12 + 6u + u^2 + (2 + u)\sqrt{32 + u^2}]^2}{8 + 2u + u^2 + (2 + u)\sqrt{32 + u^2}} \end{cases} \\ \mathrm{II}\begin{cases} a_1 = f_{51}(u) = \dfrac{1}{4}[12 + 6u + u^2 - (2 + u)\sqrt{32 + u^2}] \\ a_2 = f_{52}(u) = \dfrac{1}{2}\dfrac{[12 + 6u + u^2 - (2 + u)\sqrt{32 + u^2}]^2}{8 + 2u + u^2 - (2 + u)\sqrt{32 + u^2}}. \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{da_1}{du} = f'_{49}(u) = \frac{1}{2\sqrt{32 + u^2}}[16 + u + u^2 + (3 + u)\sqrt{32 + u^2}],$$

$$\frac{da_2}{du} = f'_{50}(u) = 2[12 + 6u + u^2 + (2 + u)\sqrt{32 + u^2}]\times$$

$$\times\frac{192 + 98u + 30u^2 + 3u^3 + u^4 + (34 + 14u + 3u^2 + u^3)\sqrt{32 + u^2}}{[8 + 2u + u^2 + (2 + u)\sqrt{32 + u^2}]^2\sqrt{32 + u^2}},$$

$$\frac{da_1}{du} = f'_{51}(u) = \frac{1}{2\sqrt{32 + u^2}}[-(16 + u + u^2) + (3 + u)\sqrt{32 + u^2}],$$

$$\frac{da_2}{du} = f'_{52}(u) = 2[12 + 6u + u^2 - (2 + u)\sqrt{32 + u^2}]\times$$

$$\times\frac{-(192 + 98u + 30u^2 + 3u^3 + u^4) + (34 + 14u + 3u^2 + u^3)\sqrt{32 + u^2}}{[8 + 2u + u^2 - (2 + u)\sqrt{32 + u^2}]^2\sqrt{32 + u^2}}.$$

Tableau 34

u	$-\infty$		u_2		$-(3 + \sqrt{5})$		u_1		-2		∞
$\frac{da_1}{du} = f'_{49}(u)$					$+$						
$a_1(u) = f_{49}(u)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_{49}(u_2)$	$\nearrow$	$f_{49}(-(3 + \sqrt{5}))$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
$\frac{da_2}{du} = f'_{50}(u)$		$+$	0		$-$		0	$+$			
$a_2(u) = f_{50}(u)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_{50}(u_2)$	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞

Tableau 35

u	$-\infty$		-2		u_3		$-(3 - \sqrt{5})$		u_5		u_4		∞
$\frac{da_1}{du} = f'_{51}(a)$					$-$				0	$+$			
$a_1(u) = f_{51}(u)$	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	$f_{51}(u_3)$	$\searrow$	$f_{51}(-(3 - \sqrt{5}))$	$\searrow$	$f_{51}(u_5)$	$\nearrow$	$f_{51}(u_4)$	$\nearrow$	∞
$\frac{da_2}{du} = f'_{52}(u)$		$-$			0	$+$					0	$-$	
$a_2(u) = f_{52}(u)$	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	$f_{52}(u_3)$	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$f_{52}(u_5)$	$\nearrow$	$f_{52}(u_4)$	$\searrow$	$-\infty$

Dans les tableaux 34 et 35, $u_1 \in (-3, -2)$ est la racine du polynome $P_9(u) = u^3 + 3u^2 + 2u + 2$, $u_5 \in (-1, 0)$ celle de $P_{10}(u) = u^3 + 2u^2 + 40u + 8$, $u_2 < -6$, $u_3 \in (-2, -1)$, $u_4 \in (0, 1)$ les racines de $P_{11}(u) = u^5 + 9u^4 + 38u^3 + 224u^2 + 224u - 4$, qui a deux racines complexes parceque $P_{11}^{3'}(u) > 0$ pour tout $u > 0$. Pour compléter la fig. 4 avec la courbe (C_7) on tiendra compte que :

1° *La courbe (C_6) a une asymptote d'équation $a_2 = 2(a_1 - 4)$, tandis-que (C_3) et (C_7) n'en ont pas.*

2° *Les courbes (C_3) et (C_7) ont le seul point commun M_6 ainsi qu'on le déduit de suite par élimination de a_2 entre la relation* (76) *et chaque des relations* (58).

3° *Les tangentes en M_6 aux deux branches de (C_7) ont selon* (77) *les coefficients angulaires* 1, *respectivement* $\frac{7}{4}$.

4° *Si l'on fait en* (77) II $u = -2 + x(|x| < 1)$, *on obtient* $a_1 = 1 - x + \frac{x^2}{3} + \dots$, $a_2 = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots$, *auquel cas* (72) *donne avec la valeur ci-dessus de* a_1, $a_2 = 1 - x + \frac{7}{12}x^2 + \dots$ *de sorte qu'au voisinage de* M_6, *la branche en question de* (C_7) *est située „sous"* (C_6). *Si l'on fait en* (77) II $u = -\frac{1}{x}$ $(|x| < 1)$, *on obtient* $a_1 = \frac{1}{2x^2}(1 - 4x + 14x^2 - 16x^3 + \dots)$, $a_2 = \frac{1}{x^2}(1 - 6x + \dots)$ *auquel cas* (72) *donne* $a_2 = \frac{1}{x^2}(1 - 4x + \dots)$. *de sorte que la branche en question de* (C_7) *est située, quand* $a_1 \to \infty$, *„sous"* (C_6).

5° *Si l'on élimine a_2 entre* (71) *et* (76) *on obtient*

$$a_1^6(1 - a_1)^2(1 - 7a_1^2 + 2a_1^3) = 0.$$

On constate donc, sur la fig. 4, à l'aide de (74), (75), et (68) que si le point M est dans la région R_1, marquée sur la figure en pointillé, ou sur le segment (ouvert aux deux extrémités) $\overline{M_7M_4}$, $f'_{37}(s)$a deux racines positives évidemment simples, selon (67). Si M est sur le segment $\overline{M_1M_7}$ (ouvert en M_1), $f'_{37}(s)$ a une racine positive, auquel cas le tableau 36 indique que le dit segment n'appartient pas au domaine D.

(78) *Si M est dans la région R_2, marquée dans la fig.* 4. *par des traits verticaux,* $f'_{37}(s)$ *a une seule racine positive, auquel cas on déduit du tableau* 37 *que* $f'_{37}(s) > 0$ *pour tout* $s > 0$.

Si M est sur la demi-droite $\overrightarrow{M_4M_5}$, (49) *donne* $f_{37}(s) > 0$ *pour tout* $s > 0$ $\Big($*vu que si* $\frac{4}{\pi^2} \leqslant a_1 < 1$, *on a pour* $f_{37}(s)$ *le tableau* 37,*et si* $a_1 \geqslant 1$, $f'_{37}(s) > 0$, *donc* $f_{37}(s) > f_{37}(0) = 0\Big)$.

Si M est sur la branche (ouverte aux extrémités) $\widehat{M_1M_6}$ *de* (C_3), $f'_{37}(s)$ *a une racine double positive, enfin si M est dans tout autre point de l'angle positif des axes situé „au-dessus" de la droite* (Δ) *et de la droite d'équation* $a_2 = \frac{4}{\pi^2}$ *ou bien sur l'une de ces droites, on a* $f'_{37}(s) > 0$ *pour tout* $s > 0$, *donc* $f_{37}(s) > f_{37}(0) = 0$ *pour tout* $s > 0$.

Tableau 36

s	0		$\bar{s}$		∞
$f'_{37}(s)$		$-$	0	$+$	
$f_{37}(s)$	0	$\searrow$	$f_{37}(\bar{s})$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \geqslant 0$

Tableau 37

s	0		$\bar{s}$		∞
$f'_{37}(s)$		$+$	0	$-$	
$f_{37}(s)$	0	$\nearrow$	$f_{37}(\bar{s})$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \geqslant 0$

Tableau 38

s	0		s_5		s_6		∞
$f'_{37}(s)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_{37}(s)$	0	$\nearrow$	$f_{37}(s_5)$	$\searrow$	$f_{37}(s_6)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \geqslant 0$

On peut donc supposer que le point M est dans la région R_1 ou sur le segment (ouvert aux extrémités) $\overline{M_7M_4}$, auquel cas le tableau (38) indique que pour que l'on ait $f_{37}(s) \geqslant 0$ pour tout $s > 0$ il faut et il suffit que l'on ait $f_{37}(s_6) \geqslant 0$. On considèrera donc s_6 donné par (66) comme une fonction de a_2, auquel cas (49) et (66) donnent

$$f_{37}(s_6) = f_{53}(a_2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}\,a_1a_2}\{4a_1^4 + 4a_1^2a_2 - (1 - a_1)^2a_2^2 +$$

$$(79)\qquad \begin{aligned} &+[2a_1^2+(1+a_1)a_2]\sqrt{4a_1^4+4a_1^2(1-a_1)a_2+(1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\,\}^{\frac{1}{2}}+\\ &+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}\,(a_2-a_1)}\{2a_1^3+(1-a_1^2)a_2-2a_2^2+\\ &+(1-a_1)\sqrt{4a_1^4+4a_1^2(1-a_1)a_2+(1-6a_1+a_1^2)a_2^2}\,\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or, (79) et (78) donnent

$$f_{53}(1-2a_1)=f_{37}(s_6)\Big|_{M\text{ sur }\overline{M_1M_7}}<0\,;\ f_{53}(f_{40}(a_1))=f_{37}(s_6)\Big|_{M\text{ sur }\widehat{M_1M_6}}>0$$

$$(80)\qquad f_{53}(a_1)=f_{37}(s_6)\Big|_{M\text{ sur }\overrightarrow{M_4M_5}}\geqslant 0$$

Dans (80) s_6 figure non comme racine de $f'_{37}(s)$, car si M est sur $\overline{M_1M_7}$, $\widehat{M_1M_0}$ ou $\overrightarrow{M_4M_5}$, $f'_{37}(s)$ n'a pas deux racines positives, mais comme une valeur de s de (78). D'ailleurs ces inégalités peuvent se déduire directement, car (79) donne

$$f_{54}(a_1)=f_{53}(1-2a_1)=-\frac{(1-a_1)\sqrt{-1+4a_1}}{2a_1(1-2a_1)}+\operatorname{arctg}\frac{1-a_1}{1-3a_1}\sqrt{-1+4a_1}$$

$$f'_{54}(a_1)=-\frac{(1-a_1)(-1+4a_1)}{2a_1^2(1-2a_1)^2}\sqrt{-1+4a_1}<0,\ \text{donc pour}$$

$$\frac{1}{4}<a_1<\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}<\frac{1}{3},\ \text{on a}\ f_{54}(a_1)<f_{54}\left(\frac{1}{4}\right)=0,$$

$$f_{55}(a_1)=f_{53}(f_{40}(a_1))=-\frac{1+\sqrt{a_1}}{2a_1}\sqrt{-1+2\sqrt{a_1}}+\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{a_1}}{1-\sqrt{a_1}}\sqrt{-1+2\sqrt{a_1}},$$

$$f'_{55}(a_1)=\frac{(1+\sqrt{a_1})(-1+2\sqrt{a_1})\sqrt{-1+2\sqrt{a_1}}}{2a_1^2(-1+2\sqrt{a_1}+a_1)}>0,$$

de sorte que pour $\frac{1}{4}<a_1<1$ on a

$$f_{55}(a_1)>f_{55}\left(\frac{1}{4}\right)=0,\ f_{56}(a_1)=f_{53}(a_1)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a_1}}\geqslant 0\ \text{pour}\ a_1\geqslant\frac{4}{\pi^2}.$$

On fera en (49) et (66) $a_2=\frac{4}{\pi^2}$ et on y considérera s_6 comme une fonction de a_1 et $f_{37}(s)$ comme une fonction de a_1 et se s : $f_{37}(s)=f_{57}(a_1, s)$.

En ce cas (79) donne

$$f_{53}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)=f_{57}(a_1, s_6)=f_{58}(a_1)\ \text{et}\ f'_{58}(a_1)=\frac{\partial f_{57}(a_1, s)}{\partial a_1}\Big|_{s=s_6}+$$

$$+f'_{37}(s_6)\frac{ds_6}{da_1}=\partial\frac{f_{57}(a_1, s)}{\partial a_1}\Big|_{s=s_6}=\frac{s_6}{a_2(1+s_6^2)}\left(1-\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2+a_2s_6^2}}\right)>0,$$

de sorte que si M est sur le segment (ouvert aux extrémités) $\overline{M_7M_4}$ (fig. 4), on a

$$(81)\qquad f_{53}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)=f_{58}(a_1)<f_{58}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)=f_{56}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)=0.$$

On considérera s_6 donné par (66) comme une fonction de a_2 et on posera dans (49) $f_{37}(s)=f_{59}(a_2, s)$, auquel cas (79) donne

$$f'_{53}(a_2)=\frac{\partial f_{59}(a_2, s)}{\partial a_2}\Big|_{s=s_6}+f'_{37}(s_6)\frac{ds_6}{da_2}=\frac{\partial f_{59}(a_2, s)}{\partial a_2}\Big|_{s=s_6}=$$

$$=\frac{s_6(1+s_6^2)}{2[2a_1^2+a_2(1+s_6^2)+2a_1\sqrt{a_1^2+a_2(1+s_6^2)}]\sqrt{a_1^2+a_2(1+s_6^2)}}>0.$$

On en déduit à l'aide de (80) et (81) les tableaux (39) et (40).

Tableau 39

a_2	$1-2a_1$		$\bar{\alpha}(a_1)$		$f_{40}(a_1)$
$f_{53}(a_2)$	$f_{53}(1-2a_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{53}(f_{40}(a_1))$

Tableau 40

a_2	$\frac{4}{\pi^2}$		$\bar{\alpha}(a_1)$		$f_{40}(a_1)$
$f_{53}(a_2)$	$f_{53}\left(\frac{4}{\pi_2}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{53}(f_{40}(a_1))$

valables respectivement pour $\frac{1}{4}<a_1\leqslant\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}$ et $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}<a_1<\frac{4}{\pi^2}$, ce qui avec (78) indique que ;

(82) $\left\{\begin{array}{l}\textit{si le polynome caractéristique de l'équation (1) a des racines com-}\\ \textit{plexes, alors au cas où } 0 < a_1 \leqslant \frac{1}{4}, \textit{ ou } a_1 \geqslant \frac{4}{\pi^2} \textit{ on a } f_{37}(s) > 0 \textit{ pour}\\ \textit{tout } s > 0; \textit{ au cas } \frac{1}{4} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}, \textit{ si } 1 - 2a_1 \leqslant a_2 < \bar{\alpha}(a_1), \textit{ pour}\\ \frac{1}{4} < a_1 \leqslant \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}, \textit{ respectivement si } \frac{4}{\pi^2} \leqslant a_2 < \bar{\alpha}(a_1) \textit{ pour } \frac{1}{2} -\\ - \frac{2}{\pi^2} < a_1 < \frac{4}{\pi^2}, \textit{ il existe des valeurs de } s > 0 \textit{ avec } f_{37}(s) < 0;\\ \textit{si } a_2 \geqslant \bar{\alpha}(a_1), f_{37}(s) > 0 \textit{ pour tout } s > 0; \bar{\alpha}(a_1) \textit{ est la racine}\\ \textit{plus grande que } 1 - 2a_1 \textit{ de la fonction de la variable } a_2 : f_{53}(a_2)\\ \textit{de (79).}\end{array}\right.$

Si $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, (53) donne $P_4(s) = \frac{(1-s)^4}{64} > 0$, donc pour $s \in (0, 1)$ $f_{36}(s) < f_{36}(1) = 0$, tandis que (66) devient

$$f'_{37}(s) = \frac{4s^4}{(1+s^2)[9+7s^2+(3+s^2)\sqrt{9+8s^2}]\sqrt{9+8s^2}} > 0,$$

par conséquent pour $s > 0$, $f_{37}(s) > f_{37}(0) = 0$, de sorte que selon (48) $\bar{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, ce qui, avec (65) et (82) démontre le point I du théorème.

II. Le point II est démontré par les tableaux 29, 39 et 40.

III. On fera dans (61) $a_2 = \bar{\alpha}(a_1)$, alors cette relation donne $E_1(a_1) + E_2(a_1) = 0$, où

$$E_1(a_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-4a_1^4 - 4a_1^2\bar{\alpha}(a_1) - (1 - a_1)^2\bar{\alpha}^2(a_1) +$$

$$+ [2a_1^2 + (1+a_1)\bar{\alpha}(a_1)]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)\bar{\alpha}(a_1) + (1-6a_1+a_1^2)\bar{\alpha}^2(a_1)}\}^{1/2}.$$

$$E_2(a_1) = a_1\bar{\alpha}(a_1) \ln 4a_1^3 - a_1\bar{\alpha}(a_1) \ln (2a_1^2(1 - a_1) +$$

$$+ (1 - 4a_1 - a_1^2)\bar{\alpha}(a_1) +$$

$$+ (1 - a_1)\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - a_1)\bar{\alpha}(a_1) + (1 - 6a_1 + a_1^2)\bar{\alpha}^2(a_1)} +$$

$$+ \sqrt{2}\{4a_1^4(1 - 2a_1 - a_1^2) + 4a_1^2(1 - a_1)(1 - 3a_1)\bar{\alpha}(a_1) +$$

$$+ (1 - 8a_1 + 14a_1^2 + a_1^4)\bar{\alpha}^2(a_1) +$$

$$+ (1 - a_1)[2a_1^2(1 - a_1) +$$

$$+ (1 - 4a_1 - a_1^2)\bar{\alpha}(a_1)]\sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1 - a_1)\bar{\alpha}(a_1) + (1 - 6a_1 + a_1^2)\bar{\alpha}^2(a_1)}\}^{1/2}).$$

Si l'on n'avait pas $\lim_{a_1 \to \infty} \bar{\alpha}(a_1) = \infty$, il existerait un nombre fixe M avec $\bar{\alpha}(a_1) < M$ pour tout $a_1 < \frac{1}{4}$.

D'autre part, selon (65), on a pour $a_1 < \frac{1}{4}$, $\bar{\alpha}(a_1) > \frac{1}{2}$, d'où l'on déduit $\lim_{a_1 \to 0} E_2(a_1) = 0$ et que pour a_1 suffisamment petit $E_1(a_1) > \frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon$, où $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est arbitraire, ce qui contredit la relation $E_1(a_1) + E_2(a_1) = 0$ et démontre le dernier point du théorème.

8. Nous allons présenter les théorèmes ci-dessus sans les démonstrations, qui sont identiques à celles des théorèmes analoques de la première partie (. 3—6).

THÉORÈME 7. *La paire minimale relative par rapport à a_2 est la paire $(2f_{22}(s), 4f_{23}(s))$ de (40), où s parcourt l'intervalle $(0,1)$ quand a_1 parcourt l'intervalle $\left(0, \frac{1}{4}\right)$; la paire $(2f_{24}(s), 4f_{25}(s)$ de (40) où s parcourt l'intervalle $(0, \pi)$, quand a_1 parcourt l'intervalle $\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{\pi^2}\right)$ et la paire $\left(a_1, \frac{4}{\pi^2}\right)$ quand a_1 parcourt l'intervalle $\left[\frac{4}{\pi^2}, \infty\right)$.*

Pour $a_1 = \frac{1}{4}$ la paire est $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

THÉORÈME 8. I. *La paire minimale relative par rapport à a_1, pour une valeur donnée de a_2, est la paire $(\bar{\beta}(a_2), a_2)$ où la fonction $\bar{\beta}(a_2)$ est définie comme suit :*

1° *Si $a_2 = \frac{4}{\pi^2}$, $\bar{\beta}(a_2) = \frac{4}{\pi^2}$.*

2° *Si $\frac{4}{\pi^2} < a_2 < \frac{1}{2}$, $\bar{\beta}(a_2)$ est la racine de la fonction de a_1 obtenue en considérant dans l'énoncé du théorème 6 l'expression $f_{53}(a_2)$ comme une fonction de a_1.*

3° *Si $a_2 = \frac{1}{2}$, $\bar{\beta}(a_2) = \frac{1}{4}$.*

4° *Si $a_2 > \frac{1}{2}$, $\bar{\beta}(a_2)$ est la racine de la fonction de a_1 obtenue en considérant dans l'énoncé du théorème 6 l'expression $f_{42}(a_2)$ comme une fonction de a_1.*

II. *La fonction $\bar{\beta}(a_2)$ est décroissante et $\lim_{a_2 \to \infty} \bar{\beta}(a_2) = 0$.*

THÉORÈME 9. *La paire minimale relative par rapport à a_1 est la paire $(2f_{24}(s), 4f_{25}(s))$ de (40) où s parcourt l'intervalle $[\pi, 0)$ quand a_2 parcourt l'intervalle $\left[\frac{4}{\pi^2}, \frac{1}{2}\right)$ et la paire $(2f_{24}(s), 4f_{23}(s))$ de (40) où s parcourt l'inter-*

valle $(1, 0)$ *quand* a_2 *parcourt l'intervalle* $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. *Pour* $a_2 = \frac{1}{2}$, *la paire est* $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

THÉORÈME 10. *La paire minimale relative à la fonction* $f^{[1]}(a_1, a_2) = a_1 a_2$ *est la paire* $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

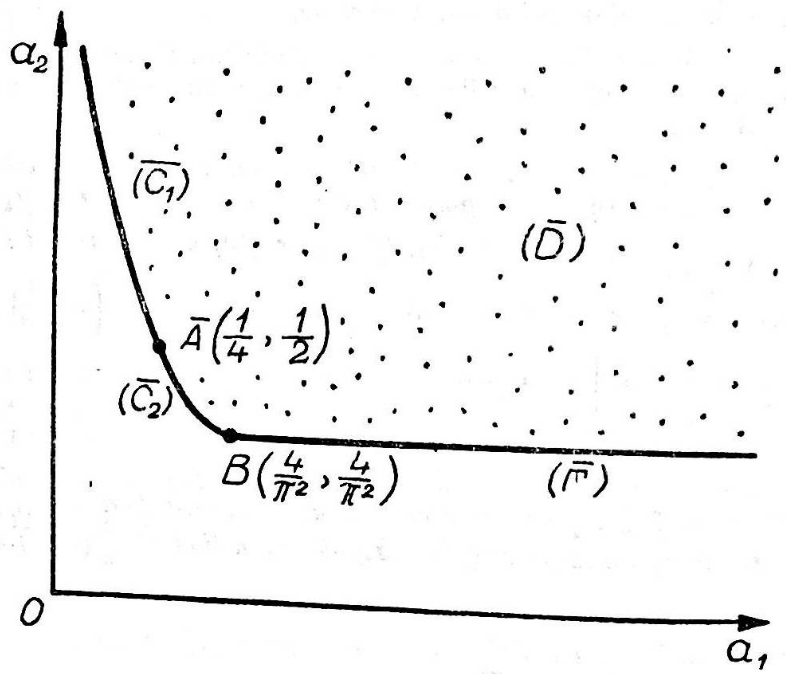

Fig. 5.

La courbe $(\bar{C})$ et le domaine $(\bar{D})$ correspondents de la courbe (C) et du domaine (D) de la fig. 1 de la première partie, sont figurés dans la fig. 5. Les équations paramétriques de $(\bar{C})$ sont: pour l'arc $(\bar{C}_1)$: $a_1 = 2f_{22}(s)$, $a_2 = 4f_{23}(s)$, $s \in (0, 1)$ (voir (40)), pour l'arc $(\bar{C}_2)$: $a_1 = 2f_{24}(s)$, $a_2 = 4f_{25}(s)$ $s \in (0, \pi)$ (voir (40)). La branche $(\bar{\Gamma})$ est une parallèle à l'axe $0a_1$.

L'équation cartésienne de l'arc $(\bar{C}_1)$ est $f_{42}(a_2) = 0$, et celle de l'arc $(\bar{C}_2)$ est $f_{53}(a_2) = o$ (théorème 6). Le théorème 10 indique que la paire minimale par rapport à la fonction $f^{[1]}(a_1, a_2) = a_1 a_2$ n'est plus, comme c'était le cas du théorème 5, la paire minimale par rapport à la fonction $f(a_1, a_2) = (a_2 - a_1)^2$, de sorte que les paires minimales par rapport aux fonctions de la forme $f^{[2]}(a_1, a_2) = a_1^m + a_2^m$ (m nombre naturel) sont — si

on en a besoin — à déterminer dans chaque cas. Nous nous bornerons à les déterminer dans les cas $m = 1$, et $m = 2$, en présentant, pour conclure, le

THÉORÈME 11. I. *La paire minimale par rapport à la fonction* $f^{[3]}(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ *est la paire* $\left(-\frac{\cos\sigma}{(1-\cos\sigma)(1-2\cos\sigma)}, \frac{1}{2(1+\cos\sigma)(1-2\cos\sigma)}\right)$, *où* σ *est la racine de l'intervalle* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *de l'équation* $s = 2 \sin s$.

II. *La paire minimale par rapport à la fonction* $f^{[4]}(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$ *est la paire* $(2f_{24}(s), 4f_{25}(s))$ de (40), *avec* $s = \varphi$, *où* φ *est la racine de l'intervalle* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *de l'équation*

$$s^3 - 2\,\frac{1-\cos s}{\sin s}\,s^2 + 4(1-\cos s)\,s - 4 \sin s\,(1 - \cos s) = 0.$$

Démonstration. I. Nous allons nous servir de la proposition (44), qui se conserve à la condition de remplacer dans (43) $f_{22}(s)$, $f_{23}(s)$, $f_{24}(s)$, $f_{25}(s)$ respectivement par $2f_{22}(s)$, $4f_{23}(s)$, $2f_{24}(s)$, $4f_{25}(s)$,

$$f\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \text{ par } f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \inf_{a_1 \geqq \frac{2}{\pi^2}} f\left(a_1, \frac{1}{\pi^2}\right) \text{ par } \inf_{a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}} f\left(a_1, \frac{4}{\pi^2}\right).$$

On posera donc

$$(83) \quad \begin{cases} f_{60}^{[i]}(s) = f^{[i]}(2f_{22}(s), \ 4f_{23}(s)), \ f_{61}^{[i]}(s) = f^{[i]}(2f_{24}(s), \ 4f_{25}(s)) \\ f_{62}^{[i]}(a_1) = f^{[i]}\left(a_1, \frac{4}{\pi^2}\right) (i = 3, 4). \end{cases}$$

$$\text{Si } f^{[3]}(a_1, a_2) = a_1 + a_2,$$

on déduit donc de (83) et de (41)

$$f_{60}^{[3]\prime}(s) = 2f_{63}(s)\,\frac{f'_{22}(s)}{\ln s}, \text{ avec } f_{63}(s) = \ln s + \frac{1-s^2}{s}.$$

Par conséquent $f'_{63}(s) = -\frac{1}{s^2}(1 - s + s^2) < 0$, $f_{63}(s) > f_{63}(1) = 0$,

$$f_{61}^{[3]\prime}(s) = 2\,\frac{s - 2\sin s}{s}\,f'_{24}(s),$$

auquel cas (42) donne $f_{60}^{[3]\prime}(s) < 0$, $f_{60}^{[3]}(s) > f_{60}^{[3]}(1) = f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(tableau 20), alors

$$\inf_{s\in(0,1)} f_{60}^{[3]}(s) = f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right). \tag{84}$$

Tableau 41

s	0		σ		π
$f_{61}^{[3]\prime}(s)$		$-$	0	$+$	
$f_{61}^{[3]}(s)$	$f_{61}^{[3]}(0)$	$\searrow$	$f_{61}^{[3]}(\sigma)$	$\nearrow$	$f_{61}^{[3]}(\pi)$

Au tableau 41 on a $f_{61}^{[3]}(0) = f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (tableau 21) et σ est la racine de l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ de l'équation $s = 2 \sin s$. On a en (83) $f_{62}^{[3]}(a_1) = a_1 + \frac{4}{\pi^2}$ donc $\inf\limits_{a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}} f_{62}^{[3]}(a_1) = \frac{8}{\pi^2} > \frac{3}{4} = f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. On en déduit à l'aide de (84) et du tableau 43 que la condition 2° (44) est remplie, auquel cas cette condition et le théorème donnent la paire minimale du premier point du théorème.

II. Si $f^{[4]}(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$, (83) et (40) donnent

$$\left\{\begin{aligned} f_{60}^{[4]\prime}(s) &= -4\frac{(1-s^2)f_{22}'(s)}{[1-s^2+(1+s^2)\ln s]\ln^3 s} f_{64}(s) \\ f_{64}(s) &= \frac{1}{s^2}(1-s)^3(1+s) + \frac{2}{s}(1-s)^2\ln s + 2\frac{1-s}{1+s}\ln^2 s + \ln^3 s \\ f_{61}^{[4]\prime}(s) &= -\frac{4\sin s}{s^3(\sin s - s\cos s)} f_{24}'(s) f_{65}(s) \\ f_{65}(s) &= s^3 - 2\frac{1-\cos s}{\sin s}s^2 + 4s(1-\cos s) - 4\sin s\,(1-\cos s). \end{aligned}\right. \tag{85}$$

Il est facile de constater que pour $s \in (0, 1)$ on a $f_{60}^{[4]}(s) > f^{[4]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, car (40) et (85) donnent

$$f_{60}^{[4]}(s_7) = f_{66}(s_7), \quad f_{61}^{[4]}(s_{12}) = f_{67}(s_{12}) \tag{86}$$

où $s_7 - s_{12}$ sont respectivement des racines éventuelles de $f_{64}(s)$, $f_{65}(s)$ et

$$\left\{\begin{aligned} f_{66}(s) &= -\frac{(1-s)^4}{s^2\ln^4 s}\,\frac{1-s^2+2s\ln s}{1-s^2+(1+s^2)\ln s} \\ f_{67}(s) &= 4\frac{(1-\cos s)^2(s-\sin s)}{s^4(\sin s - s\cos s)} \end{aligned}\right. \tag{87}$$

Ainsi donc

$$f_{68}(s) = s^2\frac{[1-s^2+(1+s^2)\ln s]^2\ln^5 s}{2(1-s^2)^3} f_{66}'(s) = 2\frac{(1-s)^3}{s(1+s)} +$$

$$+\frac{(1-s)^2(7+10s+7s^2)}{2s(1+s)^2}\ln s + \frac{(1-s)(1+7s+8s^2+7s^3+s^4)}{s(1+s)^3}\ln^2 s + \ln^3 s,$$

$$f_{69}(s) = \frac{s^2(1+s)^4}{(1-s)^2(1+3s+10s^2+3s^3+s^4)} f_{68}'(s) =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{(1-s^2)^2}{1+3s+10s^2+3s^3+s^4} - \frac{3}{2}\,\frac{(1-s)(1+s)^3}{1+3s+10s^2+3s^3+s^4}\ln s - \ln^2 s.$$

$$f_{70}(s) = -\frac{2s(1+3s+10s^2+3s^3+s^4)^2 f_{69}'(s)}{4+21s+56s^2+159s^3+384s^4+159s^5+56s^6+21s^7+4s^8} =$$

$$= 3(1-s^2)\frac{1+8s+41s^2+44s^3+41s^4+8s^5+s^6}{4+21s+56s^2+159s^3+384s^4+159s^5+56s^6+21s^7+4s^8} + \ln s.$$

$$f_{70}'(s) = \frac{\begin{gathered}(1-s)^4\,16(1+s^{12}) + 265s(1+s^{10}) + 2477s^2(1+s^8) + \\ + 13047s^3(1+s^6) + 43552\,s^4(1+s^4) + 95552s^5(1+s^2) + 125638s^6]\end{gathered}}{s(4+21s+56s^2+159s^3+384s^4+159s^5+56s^6+21s^7+4s^8)^2} > 0.$$

Par conséquent, pour $s \in (0, 1)$

$$f_{70}(s) < f_{70}(1) = 0,\ f_{69}'(s) > 0,\ f_{69}(s) < f_{69}(1) = 0,$$

$$f_{68}'(s) < 0,\ f_{68}(s) > f_{68}(1) = 0,\ f_{66}'(s) < 0,\ f_{66}(s) > f_{66}(1) = \frac{1}{2}.$$

En particulier, pour une éventuelle racine $s_7 \in (0, 1)$ de $f_{64}(s)$, on a $f_{66}(s_7) > \frac{1}{2}$. Or, selon (42), $f_{60}^{[3]}(s)$ de (83) est continue dans l'intervalle (0, 1) et $\lim\limits_{s\to 0} f_{60}^{[3]}(s) = \infty$ (tableau 20), de sorte que pour $s \in (0, 1)$ on a donc

$$f_{60}^{[3]}(s) > f_{60}^{[3]}(1) = f^{[3]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}. \tag{88}$$

On déduit encore de (87)

$$(89)\quad \begin{cases} f_{71}(s) = s^5 \dfrac{(\sin s - s\cos s)^2}{4\sin^3 s} f'_{67}(s) = 4 \sin\ s\ \dfrac{1-\cos s}{1+\cos s} - \\ \quad - s\dfrac{(1-\cos s)(5+7\cos s)}{1+\cos s} + s^2\dfrac{(1-\cos s)(3+7\cos s+2\cos^2 s)}{\sin s(1+\cos s)} - s^3 \\ f_{72}(s) = \dfrac{(1+\cos s)^2}{(1-\cos s)(4+3\cos s+2\cos^2 s)} f'_{71}(s) = \\ = \dfrac{3\sin^2 s}{4+3\cos s+2\cos^2 s} + 3s\dfrac{(1+\cos s)\sin s}{4+3\cos s+2\cos^2 s} - s^2 \\ f'_{72}(s) = \dfrac{\begin{matrix}3\sin s\,(7+19\cos s+8\cos^2 s+2\cdot \mathrm{os}^3 s) - \\ - s(35+24\cos s+20\cos^2 s+21\cos^3 s+8\cos^4 s)\end{matrix}}{(4+3\cos s+2\cos^2 s)^2} < 0 \end{cases}$$

pour $s \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, car si $\cos s \in (-1, 0)$, on a évidemment

$$3(7 + 19\cos s + 8\cos^2 s + 2\cos^3 s) < 35 + 24\cos s + 20\cos^2 s + $$
$$+ 21\cos^3 x + 8\cos^4 s,$$

et

$$35 + 24\cos s + 20\cos^2 s + 21\cos^3 s + 8\cos^4 s =$$
$$= (1+\cos s)(35 - 11\cos s) + \cos^2 s(31 + 21\cos s + 8\cos^2 s) > 0.$$

Ainsi donc, pour $s \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ on a

$$f_{72}(s) < f_{72}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{3}{2}\pi - \pi^2\right) < 0,$$

$$f'_{71}(s) < 0, f_{71}(s) < f_{71}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \frac{5}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi^2 - \frac{\pi^3}{8} < 0,$$

$$f'_{67}(s) < 0,\ f_{67}(s) < f_{67}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{32}{\pi^4}(\pi - 2) < \frac{1}{2}.$$

En particulier, pour une éventuelle racine $s_{12} \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ de $f_{65}(s)$, on a $f_{67}(s_{12}) < \dfrac{1}{2}$. Par conséquent, la valeur de s qui donne l'éventuel minimum de $f^{[4]}(a_1, a_2)$ se trouve parmi les éventuelles racines de $f_{65}(s)$.

Or, (85) donne

$$(90)\quad \begin{cases} f_{73}(s) = \dfrac{1+\cos s}{1+3\cos s} f'_{65}(s) = s^2 + 4s\dfrac{\sin s\cos s}{1+3\cos s} - 8\dfrac{\sin^2 s\cos s}{1+3\cos s} \\ f_{74}(s) = \dfrac{(1+3\cos s)^2 f'_{73}(s)}{2(1+\cos s)(-1+7\cos s+6\cos^2 s)} = \\ \qquad = s + 2\sin s\dfrac{2+\cos s-3\cos^2 s-12\cos^3 s}{(1+\cos s)(-1+7\cos s+6\cos^2 s)} \\ f'_{74}(s) = \dfrac{(1-\cos s)(1+3\cos s)P_{12}(\cos s)}{(1+\cos s)(-1+7\cos s+6\cos^2 s)^2}, \end{cases}$$

avec $P_{12}(x) = 27 - 5x + 110x^2 + 180x^3 + 48x^4$, de sorte que $P_{12}(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$

Tableau 42

u	0		u_1		u_2		1
$P''_{13}(u)$		+	0	−			
$P'_{13}(u)$	5	↗	$P'_{13}(u_1)$	↘	0	↘	−123
$P_{13}(u)$	27	↗			$P_{13}(u_2)$	↘	10

et

$$P_{13}(u) = P_{12}(-u) = 27 + 5u + 110u^2 - 180u^3 + 48u^4,$$

auquel cas le tableau 42 donne $P_{12}(x) > 0$ pour $x \in [-1, 0]$. On désignera par $\bar{s}_7 = \arccos \dfrac{1}{3} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, auquel cas (90) donne $f_{74}(\pi - \bar{s}_7) = = \pi - \bar{s}_7 - \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$. Or, $\cos \bar{s}_7 = \dfrac{1}{3} > \cos 71° = 0{,}3256\ldots$, donne donc $\bar{s}_7 < \dfrac{71\pi}{180°}$, par conséquent

$$(91)\qquad f_{74}(\pi - \bar{s}_7) > \frac{109}{180}\pi - \frac{4}{3}\sqrt{2} > 0.$$

On en déduit les tableaux 43 et 44 dans lesquels

$$s_8 = \arccos\frac{-7+\sqrt{73}}{12} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Tableau 43

s	0	s_8	$\frac{\pi}{2}$	s_9	s_{10}	$\pi - \bar{s}_7$	s_{11}	π
$f'_{74}(s)$		$+$		0				
$f_{74}(s)$	$0 \nearrow$	$\pm\infty \nearrow$		0	$\nearrow$	$f_{74}(\pi - \bar{s}_7) \searrow$	0	$\searrow -\infty$
$f'_{73}(s)$		$+$		0	$-$		$0+$	
$f_{73}(s)$	$0 \nearrow$			$f_{73}(s_9) \searrow$	$0 \searrow$	$\mp\infty \searrow$	$f_{73}(s_{11}) \nearrow$	π^2
$f'_{65}(s)$		$+$			0		$-$	

Tableau 44

s	0	$\frac{\pi}{2}$	s_{10}	s_{12}	π
$f'_{65}(s)$		$+$	0	$-$	
$f_{65}(s)$	0	$\nearrow$	$f_{65}(s_{10}) \searrow$	0	$\searrow -\infty$
$f_{61}^{[4]\prime}(s)$		$-$		0	$+$
$f_{61}^{[4]}(s)$	$f_{61}^{[4]}(0) = f^{[4]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$	$\searrow$		$f_{61}^{[4]}(s_{12}) \nearrow$	$f_{61}^{[4]}(\pi) = \frac{32}{\pi^4}$

Au tableau 43 on a $f_{73}(s_{11}) > 0$, ce qui se déduit immédiatement en remarquant que (90) donne

$$f_{73}(s_{11}) = \frac{4(1 - \cos s_{11})^2}{(1 + \cos s_{11})} \frac{P_{14}(- \cos s_{11})}{(-1 + 7 \cos s_{11} + 6 \cos^2 s_{11})^2} \tag{92}$$

avec $P_{14}(x) = 4 - 10x - 5x^2 + 137x^3 - 244x^4 + 168x^5$, de sorte que le tableau 45 donne pour $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

$$P'_{14}(x) \geqq P'_{14}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{59}{3}, \quad P_{14}(x) \geqq P_{14}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{232}{81}$$

Tableau 45

x	$\frac{1}{3}$		$\bar{x}$		1
$\frac{1}{2} P_{14}^{(3)}(x)$		$-$	0	$+$	
$P_{14}^{(2)}(x)$	$\frac{568}{9}$	$\searrow$	$P_{14}^{(2)}(\bar{x})$	$\nearrow$	1244

$$\bar{x} = \frac{122 + \sqrt{499}}{420}, \quad P_{14}^{(2)}(\bar{x}) = \frac{474671904 - 335328\sqrt{499}}{7408800} > 0,$$

auquel cas (92) donne au tableau 43 $f_{73}(s_{11}) > 0$. D'autre part, dans notre cas on a en (83) $f_{62}^{[4]}(a_1) = \frac{16}{\pi^4} + a_1^2$, de sorte que $\inf_{a_1 \geqq \frac{4}{\pi^2}} f_{62}^{[4]}(a_1) = \frac{32}{\pi^4} > \frac{5}{16} = f^{[4]}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, ce qui à l'aide du tableau 44 et de (88) indique que la deuxième condition de (44) est remplie, auquel cas cette condition, et le théorème 7 donnent la paire minimale du second point du théorème.

On peut, comme au 6, considérer la paire minimale du second point du théorème, comme la paire „la plus petite„ de l'ensemble $\bar{\mathcal{A}}$. La distance du point correspondant à l'origine de plan P, c'est-à-dire le nombre $f_{67}(s_{12})$ de (86), peut se calculer soit à l'aide de (87), soit par la formule $f_{67}(s_{12}) = f_{75}(s_{12})$, avec

$$f_{75}(s) = \frac{\sin s\,(1 + \cos s)(s - \sin s)}{2 \sin^2 s(1 + \cos s + 2\cos^2 s) - s \sin s\,(1 + 2\cos s + 5\cos^2 s) + s^2 \cos^2 s(1 - \cos s)}$$

qui se déduit de suite de (87) et (85).

On peut remarquer, comme au 6, qu'en ce cas encore le théorème 7 semble être d'un emploi plus commode que le théorème 6, pour aborder certaines questions à résoudre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aramă O., *O problemă de interpolare lacunară cu soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), XV, 1. (1963).

[2] Hartmann Ph. and Wintner A., *On an oscillation criterium of de la Vallée-Poussin.* Quarterly of Applied Mathematics 13, 330–332 (1955).

[3] Opial Z., *Sur une inégalité de C. de la Vallée-Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire du second ordre.* Annales polonici Mathematici XVI, 87–91 (1959).

[4] De la Vallée-Poussin Ch., *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre.* Journal de math. pures et appliquées. X, 125–144 (1929).

Reçu le 19. XI. 1963