

I
B-85

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

**ТРУДЫ
ТРЕТЬЕГО ВСЕСОЮЗНОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
СЪЕЗДА**

Москва, июнь — июль 1956

Том IV

**КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ СЕКЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ
ДОКЛАДЫ ИНОСТРАННЫХ УЧЕНЫХ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва · 1959

есть особенность $f(z)$ на дуге A . Тогда $f(z)$ принимает в окрестности P сколь угодно часто каждое значение круга $|w| < 1$, за исключением, может быть, некоторого множества логарифмической емкости нуль.

Непосредственным следствием теоремы является следующая классическая теорема Р. Неванлинны.

Теорема 4. Пусть $w = f(z)$ мероморфна на конечной плоскости z , за исключением, быть может, множества точек E логарифмической емкости нуль. Тогда в окрестности каждой точки E функция $f(z)$ принимает сколь угодно часто любое значение в w -плоскости, кроме, быть может, только множества емкости нуль.

Другие результаты и дальнейшее развитие методов даются в цитированной литературе.

Лит.: Lohwater A. J., Duke Math. J., 19 (1952), 243—252; C. R. Acad. Sci., 237 (1953), 16—18; Michigan Math. J., 2 (1954); Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 79—83; C. R. Acad. Sci., 242 (1956), 2278—2281; Ann. Acad. Scient. Fennicae, AI 229 (1956), 1—18.

Т. Попович (Румыния)

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В НЕКОТОРЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ФОРМУЛАХ АНАЛИЗА

1. Во многих аппроксимационных формулах анализа остаточный член представляется в форме линейного функционала $R[f]$ (аддитивного и однородного), который в общем случае определен в пространстве непрерывных функций или же только дифференцируемых данное конечное или бесконечное число раз в конечном и замкнутом интервале $[a, b]$.

В последующем, если не оговорено обратное, мы будем предполагать, что f есть функция действительного переменного, а остаток есть линейный функционал.

2. Важной характеристикой остаточного члена является *степень приближения*. Говорят, что остаток $R[f]$ (или соответствующая аппроксимационная формула, или просто функционал $R[f]$) дает приближение в точности степени n , если

$$R[1] = R[x] = \dots = R[x^n] = 0, \quad R[x^{n+1}] \neq 0. \quad (1)$$

Мы предположили для простоты, что $R[1] = 0$, так что $n > 0$.

Обычно удается надлежащим образом выразить остаток $R[f]$ с помощью $(n+1)$ -й производной $f^{(n+1)}$ функции f , предполагая, конечно, что эта производная существует. Таким путем проблема остатка сначала в частных случаях, а потом в случаях все более и более общих изучалась сначала А. А. Марковым [3], потом Г. Д. Биркгофом [1], Г. Ковалевским [2], Ж. Радоном [7] и другими. Недавно Е. Ремез [8] вновь изучил проблему с общей точки зрения, рассматривая $R[f]$ как линейный функционал $(n+1)$ -й производной $f^{(n+1)}$.

3. Исследования выпуклых функций высшего порядка [5] приводят к новой форме остаточного члена, форме, которая способна объединить полученные до сих пор результаты, придавая некоторым из них более общую форму [и уточняя структуру остаточного члена].

Хорошо известные свойства разделенных конечных разностей побуждают нас искать для линейного функционала $R[f]$, удовлетворяющего условиям (1), выражение следующего вида:

$$R[f] = K[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f], \quad (2)$$

где

а) $K \neq 0$ — число, не зависящее от функции f ;

б) $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ — определенные точки интервала $[a, b]$, вообще говоря, зависящие от функции f ;

в) символ $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$ означает разделенную конечную разность порядка $n+1$ функции f на узлах $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$. Эти разделенные разности определяются, например, рекуррентной формулой

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = \frac{[x_2, x_3, \dots, x_{n+2}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]}{x_{n+2} - x_1}, \quad [x; f] = f(x). \quad (3)$$

Если возможно найти такое число n , что равенство (2) имеет место, мы скажем, что функционал $R[f]$ простой формы. В этом случае n определяется единственным образом и мы имеем

$$K = R[x^{n+1}].$$

4. Далее, напомним, что выпуклой порядка n в интервале $[a, b]$ называется функция f , определенная на этом интервале, причем

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] > 0. \quad (4)$$

для любого множества $n+2$ точек $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n+2$.

Тогда мы имеем следующую теорему. Для того чтобы остаток $R[f]$ был простой формы, необходимо и достаточно, чтобы $R[f] \neq 0$ для всякой функции f выпуклой порядка n (и которая, очевидно, принадлежит полю определения функционала).

С помощью различных свойств аппроксимации выпуклых функций высшего порядка получают критерии, по которым, в некоторых случаях, можно сделать заключение, простой ли формы остаточный член.

Например, при определенных условиях, впрочем не очень ограниченных, если иметь в виду наиболее употребительные аппроксимационные формулы, достаточно, чтобы функционал $R[\psi_\lambda]$ не менял знака, если

$$\psi_\lambda = \left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2} \right)^2, \quad \lambda \in [a, b]. \quad (5)$$

Аналогичным образом, свойство (см. [4]) полиномов С. Н. Бернштейна сохранять выпуклость различных порядков функции может также служить для формулировки подобных критериев.

Много хорошо известных аппроксимационных формул имеет остаток простой формы. Остаточные члены интерполяционной формулы Лагранжа (в частности формулы Тейлора), формул численного дифференцирования А. А. Маркова, формул численного интегрирования Котса и Гаусса, многих формул, найденных и использованных Ш. Е. Микеладзе, и т. д., являются остаточными членами простой формы.

5. Если выполняются условия (1), то при достаточно общих предположениях можно найти два неотрицательных числа A и B , не зависящих от функции f , так, чтобы было

$$R[f] = A[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] - B[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+2}; f], \quad (6)$$

причем точки ξ_i с одной стороны, и η_i с другой стороны, дискретны. Имеем, очевидно, $A - B = R[x^{n+1}]$ и $R[f]$ — простой формы, если можно положить $A = 0$ или $B = 0$.

Этот результат имеет место, в частности, если функционал $R[f]$ удовлетворяет некоторым свойствам непрерывности, например, если он обладает свойством равномерной непрерывности порядка $k < n-1$, т. е. если он непрерывен по отношению к норме формы

$$\sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x)| \quad (k < n-1).$$

Подобные условия всегда выполняются в наиболее употребительных формулах численного дифференцирования и интегрирования.

Формула (6) может рассматриваться как обобщение разложения линейного функционала на разность двух линейных и положительных функционалов, данного Ф. Риссом [9].
Наименьшие значения постоянных A, B получаются из формул

$$A^* = \inf A = \sup_{f \in (D)} R[f], \quad B^* = \inf B = A^* - R[x^{n+1}],$$

где (D) есть множество функций, $(n+1)$ -разделенные конечные разности которых остаются заключенными между 0 и 1 (можно предположить $A > 0$, рассматривая, если надо, $-R[f]$ вместо $R[f]$).

6. Легко также получить хорошо известные оценки с помощью $(n+1)$ -й производной функции f , если эта производная существует.

Имеем

$$|R[f]| \leq \frac{A^* + B^*}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}|,$$

что следует из формулы о среднем значении Коши:

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}, f] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (7)$$

где ξ находится внутри самого малого интервала, содержащего точки x_i , $i = 1, 2, \dots, n+2$.

Мы обобщили, впрочем, (7) формулой, вскрывающей связь между свойствами дифференцируемости различных порядков функции [6] и уточняющей, таким образом, структуру остаточного члена, когда функция обладает достаточным количеством производных.

7. Формулы и свойства разделенных конечных разностей часто дают нам возможность уточнить структуру остаточного члена. Я ограничусь одним критерием. Рассмотрим так называемую формулу Харди:

$$\int_0^6 f(x) dx = 0,28(f_0 + f_6) + 1,62(f_1 + f_5) + 2,2f_3 + R[f] \quad (f_i = f(i)).$$

Остаток может быть записан в форме

$$R[f] = -63[0, 0, 1, 1, 3, 3, 5, 5; \varphi] + 109,8[0, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 6; \varphi] - 63[1, 1, 3, 3, 5, 5, 6, 6; \varphi],$$

$$\varphi = \int_c^x f(x) dx, \quad c \in (0, 6)$$

(смысл разделенных разностей с повторяющимися узлами хорошо известен).

Остаток здесь не имеет простой формы. Различными преобразованиями, учитывая формулу (7), находим

$$R[f] = \frac{9}{700} \left\{ f^{(6)}(\xi) - \frac{5(63+\mu)}{9 \times 72} f^{(8)}(\eta) \right\}, \quad \xi, \eta \in (0, 6),$$

если существует 8-я производная.

Здесь μ — неотрицательное число $< 32,4$. Взяв $\mu = 1,8$, находим для значения коэффициента число $\frac{1}{2}$, которое можно найти во всех современных руководствах, где идет речь о формуле Харди. Однако, можно также положить $\mu = 0$, и тогда для коэффициента при $\frac{35}{72} < \frac{1}{2}$ находим $f^{(8)}(\eta)$.

Если предположить только, что функция f непрерывна в $[0, 6]$, остаточный член формулы Харди может быть записан как

$$R[f] = \frac{9}{700} \left\{ 6! [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7; f] - \frac{5(63+\mu)}{9 \times 72} 8! [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_8; f] \right\}.$$

причем разделенные разности образованы на некоторых узлах, расположенных внутри интервала $[0, 6]$.

Аналогичному рассмотрению можно подвергнуть другие формулы численного интегрирования.

8. Определение степени приближения с помощью соотношений (1) может быть обобщено, если рассматривать функционалы $R[f]$, обращающиеся в нуль на конечном множестве

$$f_0, f_1, \dots, f_n \quad (8)$$

функций. Вышеизложенная теория, которая соответствует случаю $f_i = x^i$, $i = 0, 1, \dots, n$ обобщается, по крайней мере при выполнении определенных условий, практически достаточно широким, если ввести понятие выпуклости по отношению к функциям (8).

Лит.: 1. Birkhoff G. D., Trans. Amer. Math. Soc., 7 (1906), 107—136. 2. Kowalewski G., Interpolation and genäherte Quadratur, 1932. 3. Markoff A. A., Differenzenrechnung, 1896. 4. Popoviciu R., Mathematica, 10 (1934), 49—54. 5. Popoviciu T., Lucr. ses. gen. Acad. RPR, (1950) 183—186. 6. Popoviciu T., A Magyar Tud. Acad. III oszt. Közl., IV (1954), 353—356. 7. Radon J., Monatch. f. Math. u. Phys., 42 (1935), 389—396. 8. Remez E. E. Ya., Rec. trav. Inst. math. Acad. Ukraine, № 3 (1939), 21—62; № 4 (1940), 47—82. 9. Riesz F., Congr. Bologna, 3 (1930), 143—148.