

Hence, it follows that the sequence of $F(x_k)$ is downward convergent to a limit, since $F(x)$ is a bounded below on $W(x_0)$ by assumption. If relation (8a) does not hold for almost all indices, then there is an infinite subsequence satisfying relation (8b). Let K be the Lipschitz constant for $F'(x)$, then we get

$$\begin{aligned} G(x_k, t_k) &= F'(x_k - \theta_k t_k (F'(x_k) y_k) y_k) y_k = \\ &= F'(x_k) y_k + (F'(x_k - \theta_k t_k (F'(x_k) y_k) y_k) - F'(x_k)) y_k \geq \\ &\geq F'(x_k) y_k - K t_k F'(x_k) y_k = (1 - K t_k) F'(x_k) y_k \geq q F'(x_k) y_k \\ &\text{for } t_k \leq (1 - q)/K, \text{ where } 0 \leq \theta_k \leq 1. \end{aligned}$$

Thus, relation (8a) holds for all $k \geq n$, since $t_k \rightarrow 0$, by (8b). Since, $t_k = t_n$ for $k \geq n$, it results from (9) that the sequence of $F'(x_k) y_k$ converges to zero. Hence, relation (5) holds in virtue of (2), (3).

Remark. Theorem 1 can also be obtained for this method under the additional assumption that $F'(x)$ is bounded on $W(x_0)$.

We shall now apply the condition from [1] which is sufficient for the convergence of the sequence of approximate solutions to a stationary point. This condition assures also the uniqueness of the stationary point.

THEOREM 3. *Let us assume that there exists a continuous increasing function $f(s) > 0$ if $s > 0$ and $f(0) = 0$ such that*
(10) $\|F'(x) - F'(y)\| \geq f(\|x - y\|)$ *for arbitrary x, y of $W(x_0)$. If the hypotheses of any of Theorems 1, 2 are fulfilled, then there exists a unique element z of X such that $F'(z) = 0$. In case of Theorem 1 the sequence of x_k determined by (1) or its subsequence satisfying relation (4b) converges to z . In case of Theorem 2 the sequence of x_k determined by (7) converges to z . If $F(x)$ is convex, then $F(z)$ is a global minimum.*

Proof. By (10) relation (5) implies the convergence of x_k to some z of X and $F'(z) = 0$. The uniqueness of z results from (10).

REFERENCES

- [1] Altman M., *Generalized Gradient Methods of Minimizing a Functional*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. et Phys., 14, 313-318 (1966).

Received 9. V. 1966.

*Hommage au Professeur TIBERIU POPOVICIU
à l'occasion de son 60-e anniversaire*

QUELQUES RECHERCHES ACTUELLES CONCERNANT L'ÉQUATION DE CH. DE LA VALLÉE POUSSIN RELATIVE AU PROBLÈME POLYLOCAL DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par

O. ARAMĂ et D. RIPIANU

à Cluj

Considérons une équation différentielle linéaire et homogène

$$(1) \quad L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions continues dans un intervalle $[a, b]$.

CH. J. de la VALLÉE-POUSSIN a montré dans un mémoire célèbre [27] que si h_0 est la racine comprise dans l'intervalle $(0, b - a)$ de l'équation

$$(2) \quad m_n(L, h) \frac{h^n}{n!} + m_{n-1}(L, h) \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + m_1(L, h) \frac{h}{1!} - 1 = 0$$

où

$$(3) \quad m_s(L, h) = \max_{a \leq x \leq a+h} |a_s(x)|, \quad s = \overline{1, n}, \quad 0 < h < b - a,$$

alors de quelque manière que l'on choisisse n noeuds $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ de $[a, a+h_0]$ et n ordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$, l'équation différentielle admet une solution (et une seule pour le choix fait des x_s et des y_s , $s = 1, \dots, n$), qui vérifie les relations

$$(4) \quad y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, \dots, y(x_n) = y_n.$$

Si l'équation (2) n'a pas de racine dans l'intervalle $(0, b - a)$, alors on prendra $h_0 = b - a$, et la propriété d'interpolation ci-dessus aura lieu dans l'intervalle $[a, b]$.

Nous désignerons dans ce qui suit la propriété d'interpolation des solutions de l'équation (1) par $I_n[a, h_0]$ et nous dirons qu'un opérateur différentiel L (linéaire ou non) jouit de la propriété $I_n[\alpha, \beta]$ si l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $L[y] = 0$ jouit de la propriété $I_n[\alpha, \beta]$.

L'équation (2) de De la Vallée-Poussin a fait l'objet de nombreuses recherches. Dans la bibliographie placée en fin d'article sont cités quelques-uns des résultats qui sont en rapport plus direct avec ceux présentés dans ce travail.

Un premier problème qui se pose aujourd'hui dans ce domaine est le problème suivant :

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ un système de nombres non-négatifs et considérons l'équation analogue à l'équation (2)

$$(5) \quad \lambda_n m_n(L, h) h^n + \lambda_{n-1} m_{n-1}(L, h) h^{n-1} + \dots + \lambda_1 m_1(L, h) h - 1 = 0,$$

où L est un opérateur quelconque de la classe $\mathcal{L}_n$ des opérateurs de la forme (1), à coefficients continus dans $[a, b]$. Soit $h(L; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ la racine comprise dans l'intervalle $[0, b - a]$ de l'équation (5), au cas où cette équation en admet une; au cas contraire on prendra $h(L; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = b - a$.

Nous dirons qu'un système de n coefficients non-négatifs $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ est admissible si quelque soit l'opérateur $L \in \mathcal{L}_n$, cet opérateur jouit de la propriété I_n dans l'intervalle $[a, a + h(L; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]$.

Le théorème de Ch. de la Vallée-Poussin fournit un tel système admissible: c'est $\lambda_s = \frac{1}{s!}$ ($s = 1, \dots, n$). Ainsi qu'on verra par la suite, ce système admissible n'est pas „le meilleur”, en ce sens qu'il existe des systèmes admissibles dont toutes les composantes sont respectivement plus petites que celles du système de Ch. de la Vallée-Poussin.

Le problème que nous nous proposons de poser est le suivant :

Déterminer tous les systèmes admissibles de l'ordre n , avec n nombre naturel donné.

Supposons — le résolu, il s'en présente un autre: Séparer du domaine $\mathcal{A}_n$ des systèmes admissibles, les systèmes „optimaux”. Le sens de ce terme est à choisir en fonction des exigences du problème polylocal respectif. Les systèmes optimaux déterminés jusqu'à présent sont situés sur la frontière du domaine des systèmes admissibles. Il en résulte la nécessité de la détermination de cette frontière. À notre connaissance, ce problème n'a pas été résolu que dans quelques cas particuliers. Nous allons en pré-

senter quelques résultats, en relevant plus spécialement quelques — uns de ceux obtenus à L'INSTITUT DE CALCUL DE CLUJ.

Au cas $n = 2$, divers auteurs ont déterminé des systèmes admissibles de coefficients. Ainsi, le résultat classique de DE LA VALLÉE-POUSSIN [27] conduit au système $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Ce résultat a également été obtenu par E. PICARD [20], qui l'a amélioré par la suite [21], en donnant le système $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{8}$. F. LETTENMAYER [15] a donné le système $\lambda_1 = \frac{4}{\pi^2}, \lambda_2 = \frac{1}{\pi^2}$. PH. HARTMAN et A. WINTNER [12], en utilisant une autre méthode, ont déterminé le système $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{6}$. Dans le travail [19], Z. OPÍAL

obtient le système admissible $\lambda_1 = \frac{2}{\pi^2}, \lambda_2 = \frac{1}{\pi^2}$. Ce système est dans un certain sens, *optimal* (c'est-à-dire que λ_2 a la plus petite valeur possible et que λ_1 a aussi la plus petite valeur possible relative à la valeur prise par λ_2).

Une partie des résultats ci-dessus s'étendent aussi aux équations non-linéaires de la forme

$$y'' = F(x, y, y'),$$

où la fonction $F(x, y, y')$ vérifie une condition de Lipschitz par rapport à y et y' , uniformément par rapport à x .

Nous tenons à rappeler que dans le cas de l'équation non-linéaire du second ordre, des résultats plus complets ont été obtenus par W. J. COLES et T. L. SHERMAN [9], et par P. BAILEY et P. WAITMAN [6].

En revenant au cas de l'équation linéaire du second ordre, nous mentionnerons que D. RIPIANU [22] a déterminé le domaine $\mathcal{A}_2$ de tous les systèmes admissibles, en obtenant les équations de la courbe-frontière de ce domaine, par conséquent, l'expression explicite de tous les systèmes „minimaux”, ainsi que la possibilité de déterminer les systèmes $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ qui rendent minimum une fonction de deux variables, $f(\lambda_1, \lambda_2)$ donnée, en particulier le système dont le point représentatif (λ_1, λ_2) est le plus près de l'origine des axes $O\lambda_1\lambda_2$ du plan. Le domaine respectif est convexe.

A. LASOTA [13] a donné pour $n = 3$ le système admissible

$$(7) \quad \lambda_1 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\pi^2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2\pi^2},$$

lui aussi meilleur que celui de Ch. de la Vallée-Poussin. La question reste non tranchée si ce système donne un point intérieur du domaine $\mathcal{A}_3$ ou un point de sa frontière, donc optimal.

Au cas général (n quelconque) les problèmes sus-énoncés n'ont pas été résolus. Les recherches effectuées jusqu'à présent ont seulement permis

d'obtenir des systèmes admissibles meilleurs que ceux donnés par le théorème de Ch. de la Vallée-Poussin.

Nous citerons à cet égard un travail de G. A. BESSMERTNYCH et A. YU. LÉVINE [8] où on donne le système admissible.

$$(8) \quad \lambda_s = \frac{n-s}{s!n} \quad (s = 1, \dots, n-1), \quad \lambda_n = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!n^n}.$$

Ce résultat s'obtient à l'aide du théorème suivant, établi dans le même travail: Si $\varphi(x) \in C^{(n)}[\alpha, \beta]$ s'annule au moins n fois dans $[\alpha, \beta]$, extrémités comprises, alors

$$|\varphi(x)| \leq \frac{(n-1)^{n-1}}{n!n^n} \mu, \quad |\varphi^{(s)}(x)| \leq \frac{s}{(n-s)!n} \mu \quad (s = 1, \dots, n-1)$$

où $\mu = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\varphi^{(n)}(x)|$. Les coefficients ci-dessus sont les plus petits possibles.

Dans les travaux [1, 4, 5] O. ARAMĂ a étendu ces résultats de G. A. Bessmertnych et A. Yu. Lévine aux opérateurs de la forme.

$$(9) \quad \Lambda = L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 + A_1(x) L_{n-1} L_{n-2} \dots L_2 L_1 + \dots + A_{n-1}(x) L_1 + A_n(x) E,$$

où $L_1, L_2, \dots, L_n$ sont des opérateurs différentiels linéaires et homogènes d'ordres $k_1, k_2, \dots, k_n$ respectivement, jouissant respectivement des propriétés d'interpolation $I_{k_1}[a, b], I_{k_2}[a, b], \dots, I_{k_n}[a, b]$; E représente l'opérateur identique. On suppose de plus que $A_1(x), \dots, A_n(x) \in C[a, b]$, et que les opérateurs L_s ($s = \overline{1, n}$) ont comme coefficients des fonctions dérivables un nombre suffisamment grand de fois pour que l'opération Λ de (9) ait un sens. On considère l'équation en l'inconnue h :

$$(10) \quad m_n(h) M(L_n L_{n-1} \dots L_1; a, a+h) + m_{n-1}(h) M^*(L_n L_{n-1} \dots L_2; a, a+h) + \dots + m_1(h) M^*(L_n; a, a+h) - 1 = 0.$$

Ici

$$(11) \quad m_s(h) = \max_{a \leq x \leq a+h} |A_s(x)| \quad (s = \overline{1, n}) \quad (0 \leq h \leq b-a)$$

et les nombres $M(L_n L_{n-1} \dots L_s; \alpha, \beta)$ et $M^*(L_n L_{n-1} \dots L_s; \alpha, \beta)$ ($s = \overline{1, n}$) où $a \leq \alpha < \beta < b$ sont définis comme suit:

Considérons l'opérateur $\Pi_s = L_n L_{n-1} \dots L_s$ de l'ordre $\tau_s = k_s + k_{s+1} + \dots + k_n$. On démontre que dans ces conditions il jouit de la propriété $I_{\tau_s}[a, b]$. Désignons par

$$N(x; \Pi_s; \underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_p; \underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_{\tau_s-p})$$

la solution de l'équation différentielle linéaire, non-homogène, de l'ordre τ_s :

$$(12) \quad \Pi_s[Y] = 1$$

qui vérifie les conditions polylocales:

$$(13) \quad \begin{cases} Y(\alpha) = Y'(\alpha) = \dots = Y^{(p-1)}(\alpha) = 0 \\ Y(\beta) = Y'(\beta) = \dots = Y^{(\tau_s-p-1)}(\beta) = 0 \end{cases} \quad (\tau_s \text{ conditions}).$$

L'existence et l'unicité d'une telle solution résulte, au cas où $\alpha, \beta \in [a, b]$, de la propriété $I_{\tau_s}[a, b]$ de l'opérateur Π_s . On définit ensuite les nombres

$$(14) \quad M(\Pi_s; \alpha, \beta) = \max_{p=1, \dots, \tau_s-1} \{ \max_{x \in [\alpha, \beta]} |N(x; \Pi_s; \underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_p; \underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_{\tau_s-p})| \}$$

$$(15) \quad M^*(\Pi_s; \alpha, \beta) = \max_{p=0, 1, \dots, \tau_s} \{ \max_{x \in [\alpha, \beta]} |N(x; \Pi_s; \underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}_p; \underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_{\tau_s-p})| \}.$$

Le résultat principal de [1, 4, 5], relativement aux problèmes qui intéressent la présente exposition, s'énonce comme suit: Soit h_0 la racine comprise dans l'intervalle $[0, b-a]$ de l'équation (10) (si une telle racine n'existe pas, on prendra $h_0 = b-a$). Dans les conditions ci-dessus, l'opérateur de (9) possède la propriété $I_{k_1+k_2+\dots+k_n}$ dans l'intervalle $[a, a+h_0]$.

La méthode de démonstration s'appuie sur l'utilisation de certains théorèmes de point fixe et par conséquent présente un caractère constructif.

Ce résultat est étendu dans [5] aux opérateurs différentiels non-linéaires. À l'aide du théorème ci-dessus on montre que par un arrangement convenable d'un opérateur différentiel linéaire et homogène sous la forme (9) on peut obtenir des intervalles d'interpolation plus grands que ceux qui seraient donnés par l'application directe du théorème de Ch. de la Vallée-Poussin ou des résultats de G. A. Bessmertnych et A. Yu. Lévine.

Pour établir les résultats ci-dessus on a effectué [4] une étude préalable concernant certaines délimitations „optimales” des fonctions dérivables dans un intervalle donné, qui s'annulent un certain nombre de fois dans l'intervalle respectif.

Pour certains types particuliers d'interpolation, l'abord des deux problèmes formulés au début peut s'avérer plus facile. Considérons, à titre d'exemple, à la place des conditions (4), les conditions

$$(16) \quad \begin{cases} y(x_1) = \alpha_0, y'(x_1) = \alpha_1, \dots, y^{(n-2)}(x_1) = \alpha_{n-2}, \\ y^{(n-1)}(x_2) = \beta_0 \end{cases}$$

où x_1, x_2 sont deux nombres distincts de l'intervalle $[a, b]$ et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \beta_0$ des nombres quelconques. Ainsi que l'a montré N. A. KASTCHÉEV [17], le problème (1), (16) admet une solution et ceci quels que soient x_1, x_2 et

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \beta_0$, si le théorème des inégalités différentielles de l'ordre $n-1$ (voir [14]) s'applique à l'opérateur respectif. Dans le travail [3], O. ARAMĂ a démontré que pour obtenir l'ensemble $\mathcal{A}_n^{(n-1)}$ des systèmes admissibles de coefficients relatifs au problème (1), (16), il suffit de se borner à la sous-classe $\mathcal{L}_n^*$ de $\mathcal{L}_n$, composée des opérateurs à coefficients constants. On démontre dans [3], à l'aide de ce résultat, que le domaine $\mathcal{A}_n^{(n-1)}$ est convexe et que pour déterminer les systèmes (admissibles) de $\mathcal{A}_n^{(n-1)}$ il suffit de déterminer les extrémums d'une fonction réelle de n variables complexes.

Dans [23] D. RIPIANU a déterminé le domaine $\mathcal{A}$ relatif au problème (1), (16) à coefficients constants et au cas $n=2$. Pour $n>2$, le problème reste à aborder.

Dans le travail [3] O. ARAMĂ indique également un système admissible de coefficients relatifs au problème (1) et aux conditions polylocales

$$(17) \quad \begin{cases} y(x_1) = \alpha_0, y'(x_1) = \alpha_1, \dots, y^{(n-2)}(x_1) = \alpha_{n-2} \\ y^{(v)}(x_2) = \beta_v \end{cases}$$

où $0 \leq v \leq n-2$. C'est le système

$$(18) \quad \begin{aligned} a_s^{(v)} &= \frac{1}{s!} \quad (s=1, \dots, n-1-v); \quad a_{n-v}^{(v)} = \frac{(n-1-v)^{n-1-v}}{(n-v)! (n-v)^{n-v}} \\ a_s^{(v)} &= \frac{v-n+s}{s! (n-v)} \quad (s=n-v+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Si l'on se borne à la classe $\mathcal{L}_n^{(v)}$ des opérateurs de la forme (1) pour lesquels

$$(19) \quad a_1(x) \equiv a_2(x) \equiv \dots \equiv a_{n-1-v}(x) \equiv 0,$$

alors, de même qu'au cas du problème (1), (16), pour obtenir l'ensemble $\mathcal{A}_n^{(v)}$ des systèmes de coefficients admissibles relatifs au problème (1), (17), (19), il suffit de se borner à la sous-classe de $\mathcal{L}_n^{(v)}$, composée d'opérateurs à coefficients constants (voir [3]). Il en résulte facilement que le domaine $\mathcal{A}_n^{(v)}$ est convexe.

Au cas où dans (17) $v=0$, les résultats obtenus relativement à la classe $\mathcal{L}_n^{(v)}$ peuvent s'étendre à toute la classe $\mathcal{L}_n$ d'opérateurs de la forme (1), sans qu'il faille faire l'hypothèse (19) (avec $v=0$). Nous allons présenter un résultat dans cette direction. Pour $v=0$, les conditions (17) s'écrivent

$$(20) \quad \begin{cases} y(x_1) = \alpha_0, y'(x_1) = \alpha_1, \dots, y^{(n-2)}(x_1) = \alpha_{n-2} \\ y(x_2) = \beta_0 \end{cases}$$

Dans [17] il a été démontré par N. A. KASTCHÉEV que le problème (1), (20) admet une solution — toujours quels que soient $x_1, x_2; \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \beta_0$ — si le théorème des inégalités différentielles de l'ordre zéro s'applique à l'opérateur respectif. Désignons par $\mathcal{A}_n^{(0)}$ le domaine des systèmes de coefficients admissibles, relatifs au problème (1), (20). On peut démontrer que ce domaine coïncide avec le domaine $\bar{\mathcal{A}}_n^{(0)}$ des systèmes de coefficients admissibles relatifs aux conditions (20) et à la classe $\bar{\mathcal{L}}^*$ des opérateurs de la forme $\bar{L}^*[y] = y^{(n)} + A_1|y^{(n-1)}| + A_2|y^{(n-2)}| + \dots + A_n|y| = 0$, avec A_s ($s=1, n$) constantes non-négatives. Ce résultat s'établit à l'aide de la proposition suivante, établie par A. LASOTA et Z. OPIAL [14]; Attachons à l'équation (1) l'équation différentielle suivante:

$$(21) \quad \bar{L}^*[y] = y^{(n)} + A_1|y^{(n-1)}| + A_2|y^{(n-2)}| + \dots + A_n|y| = 0$$

où A_s ($s=1, n$) sont des constantes telles que

$$(22) \quad |a_s(x)| \leq A_s, \quad (s=1, \dots, n); \quad x \in [a, b].$$

Désignons par $\varphi(x)$, respectivement $\bar{\varphi}(x)$ des solutions des équations (1), respectivement (21), qui vérifient au point $x=a$ les conditions de Cauchy

$$(23) \quad y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-2)}(a) = 0, \quad y^{(n-1)}(a) = 1$$

et par r , respectivement $\bar{r}$, les racines les plus petites de l'intervalle (a, b) , des solutions $\varphi(x)$, respectivement $\bar{\varphi}(x)$. (S'il n'y en a pas, on prendra $r=b$, respectivement $\bar{r}=b$). Dans ces conditions, on a

$$(24) \quad r \geq \bar{r}.$$

Ce résultat s'établit dans [14] à l'aide du principe du maximum de Pontriaguine.

Nous rappellerons, dans le même ordre d'idées, l'extension donnée par O. ARAMĂ [2] à l'équation de De la Vallée Poussin, relative aux problèmes d'interpolation du type (20) et aux équations différentielles de la forme (9).

Les deux problèmes énoncés au début de l'exposition, avaient trait à l'aspect suivant du problème polylocal: l'équation considérée (1) est déterminée et les conditions polylocales (4), ou (16), ou (17), ou (20) sont variables.

On peut aborder cependant d'autres aspects de ce même problème. Nous allons en citer, à titre d'exemple, l'aspect suivant:

L'équation (1) est variable, dans ce sens qu'elle peut être une équation quelconque, prise dans une certaine classe d'équations différentielles, et les conditions polylocales (qui remplacent les conditions (4), ou les autre

conditions) sont fixes, par exemple sont des conditions de Cauchy. Dans ce cas, on cherche l'intervalle de longueur maximum, à l'origine donnée, dans lequel les solutions des équations de la classe donnée, remplissent une certaine condition.

Nous rappellerons à ce propos le résultat suivant, obtenu par D. RIPIANU [24], en suivant une idée de A. LASOTA et Z. OPIAL [14]:

Considérons la classe $\mathcal{LD}$ des opérateurs de la forme (1), qui satisfont aux conditions suivantes:

1. Quelque soit l'opérateur $L \in \mathcal{LD}$, ses coefficients $a_s(x)$, $s = 1, \dots, n$ appartiennent à la classe $C^{(n)}[0, \infty)$.

2. Les dérivées $a'_s(x)$ sont uniformément bornées pour toute la classe $\mathcal{LD}$ dans l'intervalle $[0, \infty)$ ($s = 1, \dots, n$).

3. Lorsque x décrit cet intervalle, le point de coordonnées $\beta_s = a_s(x)$ ($s = 1, \dots, n$) de l'espace euclidien n -dimensionnel, rapporté aux axes $O\beta_1\beta_2\dots\beta_n$, se trouve dans un domaine fermé et borné D , dont la frontière S possède en chaque point un plan tangent unique.

Dans ces conditions soit L un opérateur quelconque de la classe $\mathcal{LD}$. On désigne par $\varphi_L(x)$ la solution de l'équation $L[y] = 0$, qui satisfait à des conditions de Cauchy données:

$$\varphi_L^{(s)}(0) = l_s \quad (s = 0, \dots, n-1),$$

avec l_s ($s = 0, \dots, n-1$) donnés, non tous nuls. On choisit un nombre p de la suite $0, 1, \dots, n-1$ et on désigne par $(0, h_{p,D})$ l'intervalle de longueur maximum dans lequel $\varphi_L^{(p)}(x) \neq 0$, quel que soit l'opérateur L choisi dans la classe $\mathcal{LD}$. Le problème qui se pose est la détermination du nombre (positif) $h_{p,D}$. Dans les notes [24], [25] on établit un système d'équations différentielles (en général non linéaires) et des conditions initiales auxquelles satisfait la fonction-vecteur $a_p(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$, qui fournit l'équation (1), dont la solution qui satisfait aux conditions ci-dessus a comme première racine positive le nombre $h_{h,D}$ cherché. Notons par $\psi(x)$ cette solution. En supposant que l'on puisse obtenir par cette voie la fonction-vecteur $a_p(x)$, la solution $\psi(x)$ s'obtient à l'aide d'une simple quadrature. On aborde aussi dans les mêmes notes le cas particulier où le domaine D est une hypersphère de centre l'origine des axes $O\beta_1\beta_2\dots\beta_n$ et de rayon donné R . En ce cas, pour $n=2$, $p=0$ on peut donner l'expression explicite du nombre $h_{h,D}$. Au cas $n \geq 3$, $p=0$, la détermination du nombre $h_{h,D}$ est réduite à l'intégration d'une équation différentielle non linéaire de l'ordre $n-2$ et à une quadrature. Au cas $1 \leq p \leq n-2$, la même détermination est réduite à l'intégration d'une équation intégrale différentielle du même ordre. Au cas $p=n-1$, on a pour déterminer le même nombre un système de n équations différentielles non-linéaires.

Nous croyons intéressant de mentionner en conclusion un résultat de M. SVEC [26], qui constitue une extension du résultat de De la Vallée

Poussin aux systèmes de n équations linéaires du premier ordre. Considérons le système

$$(25) \quad y'_i(x) = \sum_{s=1}^n a_{i,s}(x) y_s(x) \quad (i = \overline{1, n})$$

où $a_{i,s}(x)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$ et les conditions

$$(26) \quad y_i(x) = y_i \quad (i = \overline{1, n})$$

où x_i ($i = \overline{1, n}$) sont des noeuds de $[a, b]$, et y_i ($i = \overline{1, n}$) des nombres donnés.

Le principal résultat de [19] affirme que si les noeuds x_i ($i = \overline{1, n}$) sont compris dans un sous-intervalle de $[a, b]$ de longueur moindre que $\frac{1}{\rho}$, où ρ est la première racine non-négative de l'équation suivante en l'inconnue r ;

$$\Delta_n(r) = \begin{vmatrix} r - M_{1,1} & -M_{1,2} & \dots & -M_{1,n-1} & -M_{1,n} \\ -M_{2,1} & r - M_{2,2} & \dots & -M_{2,n-1} & -M_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -M_{n,1} & -M_{n,2} & \dots & -M_{n,n-1} & r - M_{n,n} \end{vmatrix}$$

et $M_{i,s} = \max_{a \leq x \leq b} |a_{i,s}(x)|$, alors le problème (25), (26) admet une solution et une seule.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aramă O., *Intervale de neoscilație la ecuații diferențiale liniare*. Studii și cercet. de Matem. (Cluj), XIII, 213-239 (1962).
- [2] — *Despre aplicabilitatea teoremei inegalităților diferențiale a lui S. A. Ciaplișchin în cazul ecuațiilor diferențiale liniare*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), XIV, 7-33 (1963).
- [3] — *O problemă de interpolare lacunară cu soluții ale ecuațiilor diferențiale*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), XIV, 203-234 (1963).
- [4] — *Asupra unor evaluări ale funcțiilor derivabile cu aplicații la studiul problemei polilocale (I)*. Studii și cercet. matem. (București), 17, 653-678 (1965).
- [5] — *Asupra unor evaluări ale funcțiilor derivabile cu aplicații la studiul problemei polilocale (II)*. Studii și cercet. matem. (București) 18, 8, 1261-1274 (1965).
- [6] Bailey P. and Waitman P., *On the distance between consecutive zeros for second order differential equations*. Journ. of. mathem. analysis and applic., 14, 23-30 (1966).

- [7] Ballieu R., *Sur l'unicité de l'intégrale d'une équation différentielle*. Académie Royale de Belgique, Bull. Cl. Sc. (5), 33, 725–742 (1948).
- [8] Бессмертных Г. А., Левин А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной*. Доклады Акад. Наук СССР, 144, 3, 471–474 (1962).
- [9] Coles W. J. and Scherman T. L., *Two-point problem for non-linear second order ordinary differential equations*. Raport 513 (Math. Research Center, Univ. of Wash, 1964).
- [10] Foiaş C., Gussi G., Poenaru V., *Despre problema polilocală la ecuații diferențiale lineare de ordinul al doilea*. Bul. Științ. al Acad. R.P.R., Secția de Științe Matematice și Fizice, VII, 699–721 (1955).
- [11] — *Observații asupra problemei polilocale la ecuația $y'' + g(x)y = 0$* . Studii și cercet. de matem. (Cluj), XII, 53–58 (1961).
- [12] Hartman Ph. Wintner A., *On an oscilation criterion of de la Vallée-Poussin*. Quarterly of applied mathematics, 13, 3, 330–332 (1955).
- [13] Lasota A., *Sur la distance entre les zéros de l'équation différentielle linéaire du troisième ordre*. Ann. Polonici Mathematici, 13, 2, 129–132 (1963).
- [14] Lasota A., Opial Z., *L'application du principe de Pontriaguine à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites*. Bull. de l'Acad. Polon. des Sci., Ser. sci. math. astr. et phys., XI, 2, 41–46, (1963).
- [15] Lettenmeyer F., *Über die von einem Punkt ausgehenden Integralkurven einer Differentialgleichung 2. Ordnung*. Deut. Math. 7, 56–74 (1944).
- [16] Левин А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемой функции*. Доклады Акад. Наук СССР, 138, № 1, 37–38 (1961).
- [17] Кашеев Н. А., *Точная граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина для линейного уравнения*. Доклады Акад. Наук СССР, 111, № 5, 937–940 (1956).
- [18] Moldovan E., *Applications des fonctions convexes généralisées*. Mathematica (Cluj), 1 (24), 281–286 (1959).
- [19] Opial Z., *Sur une inégalité de Ch. de la Vallée-Poussin dans la théorie de l'équation différentielle du second ordre*. Annales Polonici Mathematici, 6, 87–91 (1959).
- [20] Picard E., *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*. Journ. Math. 9, 217–271 (1893).
- [21] — *Traité d'Analyse*. Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [22] Ripianu D., *Asupra inegalității lui de la Vallée-Poussin în cazul ecuațiilor diferențiale de ordinul al doilea*. Studii și cercet. de Matem. (Cluj), XIV, 123–150, 399–403 (1963).
- [23] Ripianu D., *O problemă de minimum în teoria interpolării*. Studii și cercet. de matem. (Cluj), XIV, 365–397 (1963).
- [24] — *Asupra problemei bilocale pentru ecuații diferențiale lineare (I)*. Studii și cercet. matematice (București), 17, 8, 1281–1295 (1965).
- [25] — *Asupra problemei bilocale pentru ecuații diferențiale lineare (II)*. Studii și cercet. matematice (București), 17, 9, 1391–1403 (1965).
- [26] Sveč M., *K problému jednoznačnosti integrálov Systému lineárných diferenciálních rovnic*. Matematicko-fyzikální sborník Slovenskei Akad. Vied a Umení (Bratislava), II, 1–2, 3–22 (1952).
- [27] Vallée Poussin Ch. J. (de la), *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n*. Journ. de math. pures et appl. 8 (9), 125–144 (1929).

Reçu le 3. XI. 1965.

A Monsieur TIBERIU POPOVICIU
à l'occasion de son 60-e anniversaire

SUR LES COURBES FERMÉES SIMPLES TRACÉES SUR UNE SURFACE FERMÉE ORIENTABLE

par

G. CĂLUGĂREANU

à Cluj

Dans le „5-me Complément à l'Analysis situs”, H. POINCARÉ [1] pose le problème des courbes fermées simples que l'on peut tracer sur une surface fermée orientable, de genre $p > 1$, de R^3 . Ce problème intéresse la théorie des noeuds, car un noeud quelconque de R^3 peut être tracé sur une surface fermée orientable de genre suffisamment grand [3]. On admet que la surface est „en position normale” dans R^3 ; donc, c'est une sphère à anses, et ces anses ne sont pas nouées, ni enlacées entre elles. On peut même tracer un noeud quelconque sur une telle surface, de genre suffisamment grand, de manière que le noeud décompose la surface en deux domaines dont il est la frontière commune.

Toute courbe fermée, simple ou non, tracée sur une telle surface, appartient à une classe d'homotopie, élément du groupe fondamental π_1^p de la surface de genre p . Parmi ces classes d'homotopie on doit distinguer des classes qui contiennent des courbes simples, que nous appellerons „classes simples”. Les classes simples sont celles qui contiennent des noeuds, et chaque noeud N appartient à une telle classe au moins, si p est pris assez grand. Il existe une valeur minima de p pour laquelle N appartient à une classe de π_1^p , valeur que nous appelons le „genre normal” du noeud N .

Après les recherches approfondies de Dehn, Nielsen, Göritz, Baer, qui utilisent des méthodes différentes de celle de Poincaré, ce problème, qui consiste dans la détermination des classes simples d'un groupe fondamental π_1^p , a été repris en 1962 par B. L. REINHARDT [2], qui a donné un