46E
65M
41A
41A

MATHEMATICA VOL. 8 (31), 2, 1966, pp. 199 – 216

Hommage au Professeur TIBERIU POPOVICIU
à l'occasion de son 60-e anniversaire

SUR UNE CLASSE DE NOMOGRAMMES À ÉCHELLES DE TYPE DONNÉ

par

L. BAL et M. MIHOC

à Cluj

L'étude et l'utilisation des nomogrammes à points alignés occupent une place importante en nomographie et dans ses applications à la technique, étant donné qu'ils présentent d'importants avantages pour ce qui regarde leur construction et leur utilisation. Parmi ces nomogrammes, les nomogrammes à échelles rectilignes projectives et régulières se font remarquer par la précision de leurs résultats et la simplicité de leur construction.

On connaît ce résultat que les équations à trois variables du troisième ordre nomographique

$$F(u,v,w) = Af(u)g(v)h(w) + B_1g(v)h(w) + B_2f(u)\,h(w) + B_3f(u)g(v) + C_1f(u) + C_2g(v) + C_3h(w) + D = 0 \tag{1}$$

peuvent être représentées par des nomogrammes à points alignés, à échelles rectilignes disposées sur les côtés d'un triangle, ou bien sur trois droites concurrentes, selon que $\Delta > 0$, ou $\Delta = 0$, où

$$\Delta = (B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3 + AD)^2 - 4(B_2B_3 - AC_1)(C_2C_3 - B_1D)$$

est le discriminant de l'équation. Si $\Delta<0$, il n'existe pas une représentation de ce genre, dans laquelle les équations des échelles s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions $f(u)$, $g(v)$, $h(w)$ avec des coefficients réels.

Dans le présent travail, nous étudierons la représentation de l'équation (1) à l'aide des nomogrammes à points alignés à échelles rectilignes (du genre zéro) projectives et régulières. Nous déterminerons le nombre des nomogrammes projectivement distincts et les éléments des échelles de ces nomogrammes, dans différents cas.

Dans cette étude, nous tiendrons compte du fait que trois droites présentent deux positions projectivement distinctes et quatre positions affinement distinctes.

1. Considérons, pour commencer, le cas où toutes les échelles du nomogramme sont des échelles projectives. L'équation de Soreau correspondente à ce nomogramme est [4]

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{a_1u+b_1}{u+c_1} & \dfrac{a_2u+b_2}{u+c_1} & 1 \\
\dfrac{d_1v+e_1}{v+g_1} & \dfrac{d_2v+e_2}{v+g_1} & 1 \\
\dfrac{f_1w+h_1}{w+m_1} & \dfrac{f_2w+h_2}{w+m_1} & 1
\end{vmatrix} = 0, \tag{2}
$$

où $(u+c_1)(v+g_1)(w+m_1) \neq 0$

En considérant deux échelles du nomogramme sur les axes de coordonnées et la troisième sur une droite quelconque l'équation (2) prend la forme plus simple

$$
\begin{vmatrix}
0 & \dfrac{au+b}{u+c} & 1 \\
\dfrac{dv+e}{v+g} & 0 & 1 \\
\dfrac{fw+h}{w+m} & \dfrac{nw+p}{w+m} & 1
\end{vmatrix} = 0 \tag{2'}
$$

ou, l'équation équivalente

$$
\begin{vmatrix}
0 & au+b & u+c \\
dv+e & 0 & v+g \\
fw+h & nw+p & w+m
\end{vmatrix} = 0, \tag{2''}
$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, m, n$ et p sont les paramètres des échelles du nomogramme. L'équation (2') peut être considérée comme l'équation corres-pondante au nomogramme obtenu par une transformation affine convenable à partir du nomogramme de l'équation (2).

Pour simplifier le problème nous prendrons $h = p = 1$ et nous dévelloperons le déterminant du premier membre de l'équation. Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & (dn+af-ad)uvw + (cdn+bf-db)vw + (agf+en-ae)uw + \\
& + (d+a-adm)uv + (e+ag-aem)u + (cd+b-bdm)v + \\
& + (cen+bfg-be)w + ce + bg - bem = 0
\end{aligned}
$$

une équation du troisième ordre nomographique, dans laquelle les fonctions $f(u)$, $g(v)$ si $h(w)$ sont les fonctions identiques u, v, et w.

Le problème qui nous intéresse est la détermination des paramètres des trois échelles projectives du nomogramme, qui représentent une équation du troisième ordre nomographique donnée

$$
Auvw + B_1vw + B_2uw + B_3uv + C_1u + C_2v + C_3w + D = 0. \tag{4}
$$

Ce problème conduit à la résolution du système

$$
\begin{array}{llll}
 & dn + af - ad = A & & e + ag - aem = C_1 \\
 & cdn + bf - bd = B_1 & & cd + b - bdm = C_2 \\
(5) & en + agf - ae = B_2 & & cen + bfg - be = C_3 \\
 & d + a - adm = B_3 & & ce + bg - bem = D
\end{array}
$$

Du système (5) nous obtenons un système plus simple, qui contient au moins les solutions du système (5)

$$
\begin{array}{lrr}
 & d(b-ac) = B_3b - C_2a & en(b-ac) = B_2b - C_3a \\
 & (1-dm)(b-ac) = C_2 - B_3c & (gf-e)(b-ac) = C_3 - B_2c \\
(6) & dn(b-ac) = Ab - B_1a & e(b-ac) = C_1b - Da \\
 & (f-d)(b-ac) = B_1 - Ac & (g-em)(b-ac) = D - C_1c
\end{array}
$$

À l'aide de ce système on obtient les valeurs des paramètres du nomogramme cherché

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{e} = \frac{Ab - B_1a}{B_2b - C_3a} = \frac{B_3b - C_2a}{C_1b - Da}; \\
& c = \frac{B_1(C_1C_2 - B_3D) + (B_3C_3 - B_1C_1 + B_3C_1C_2 - B_3^2D)b}{A(C_1C_2 - B_3D) + (B_2B_3 - AC_1)b + (AD - B_2C_2)a} + \\
& \quad + \frac{(B_1D - C_2C_3 - C_1C_2^2 + B_3C_2D)a}{A(C_1C_2 - B_3D) + (B_2B_3 - AC_1)b + (AD - B_2C_2)a}; \\
(7)\qquad & d = \frac{B_3b - C_2a}{b - ac}; \; e = \frac{C_1b - Da}{b - ac}; \; f = \frac{B_1 - Ac + B_3b - C_2a}{b - ac} \\
& g = \frac{D - C_1c}{b - ac} + \frac{C_1b - Da}{b - ac} \cdot \frac{B_3c + b - ac - C_2}{B_3b - C_2a}; \; m = \frac{B_3c + b - ac - C_2}{B_3b - C_2a} \\
& n = \frac{Ab - B_1a}{B_3b - C_2a} = \frac{B_2b - C_3a}{C_1b - Da}
\end{aligned}
$$

Les dénominateurs des rapports qui interviennent dans la détermination des coefficients ne peuvent pas être nuls. Dans le cas où les dénominateurs sont nuls, il faut réexaminer la résolution du système (5). Une solution du système (5) est un système de valeurs des paramètres qui déterminent un nomogramme correspondant à l'équation (4) et par conséquent l'étude des solutions de ce système est l'étude de la représentation de l'équation (4) par des nomogrammes du genre zéro dont toutes les échelles sont projectives.

En vue de la simplification de l'écriture, nous introduirons les notations suivantes:

$$I_1 = B_2B_3 - AC_1 \qquad I_2 = B_1B_3 - AC_2 \qquad I_3 = B_1B_2 - AC_3$$
$$K_1 = C_2C_3 - B_1D \qquad K_2 = C_1C_3 - B_2D \qquad K_3 = C_1C_2 - B_3D$$

et Δ, le discriminant de l'équation (4) $\Delta = I^2 - 4I_1 \cdot K_1$.

Des formules (7) il résulte que les paramètres des échelles du nomogramme se calculent à l'aide des paramètres a et b, donnés par les solutions de l'équation

$$I_1 b^2 + Iab + K_1 a^2 = 0 \tag{8}$$

Cette équation nous donne deux valeurs pour le rapport $\frac{b}{a}$ $\left(\text{ou bien } \frac{a}{b}\right.$, selon que $a \neq 0$, ou $\left. b \neq 0\right)$. A chaque rapport correspond un ensemble infini de valeurs pour les paramètres a, b et, selon (7) aussi pour les autres paramètres. La solution $a = 0$, $b = 0$, ne correspond pas au problème parce que en ce cas le nomogramme correspondant ne possède pas l'échelle de la variable u.

Dans la discussion des solutions se présentent de nombreux cas, que nous systématiserons en donnant seulement les valeurs des paramètres a et b, les valeurs des autres paramètres devant être calculées à l'aide des formules (7).

1.1. $\Delta = (B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3 + AD)^2 - 4(B_2B_3 - AC_1)(C_2C_3 - B_1D) > 0$.

1.1.1. $I_3 \cdot K_3 \neq 0$. L'équation (4) admet deux ensembles infinis de représentations par des nomogrammes à points alignés à échelles projectives qui correspondent aux deux valeurs du paramètre $\frac{b}{a}$ $\left(\text{ou bien } \frac{a}{b}\right)$ données par l'équation (8). On démontre que les éléments de chaque ensemble sont projectivement équivalents, nous pouvons estimer par conséquent que cette représentation admet seulement deux nomogrammes projectivement distincts. On rencontre plusieurs sous-cas. Les échelles des

nomogrammes sont situées sur trois droites qui forment un triangle ou bien deux droites sont parallèles.

Si $I_1 \neq 0$, $K_1 \neq 0$, nous avons $a_1 = \lambda \neq 0$, $b_1 = \frac{-I + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot I_1} \lambda$ et $a_2 = \lambda \neq 0$, $b_2 = \frac{-I - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot I_1} \lambda$.

Si $I_1 \neq 0$ et $K_1 = 0$, nous obtenons $a_1 = \lambda \neq 0$, $b_1 = 0$, et $a_2 = \lambda \neq 0$, $b_2 = -\frac{I}{I_1} \lambda$.

Si $I_1 = 0$, et $K_1 \neq 0$, alors nous obtenons $a_1 = 0$, $b_1 = \lambda \neq 0$ et $a_1 = \lambda \neq 0$, $b_2 = -\frac{K_1}{I} \lambda$.

Si $I_1 = 0$ et $K_1 = 0$, alors on a $a_1 = 0$, $b_1 = \lambda \neq 0$, et $a_2 = \lambda \neq 0$, $b_2 = 0$.

1.1.2. $I_3 \cdot K_3 = 0$, $I_3 + K_3 \neq 0$. Dans ce cas, l'équation (4) admet deux ensembles infinis de représentations nomographiques par des nomogrammes à points alignés, à échelles rectilignes projectives. Les éléments de chaque ensemble son projectivement équivalents.

Si $I_3 = 0$, $K_3 \neq 0$ et $I_1 \neq 0$, alors nous obtenons $a_1 = \lambda \neq 0$, $b_1 = \frac{B_2C_2 - AD}{I_1}$ et $a_2 = \lambda \neq 0$, $b_2 = \frac{C_3}{B_2} \lambda$ $(B_2 \neq 0)$.

Si $I_3 \neq 0$, $K_3 = 0$ et $I_1 \neq 0$, alors nous avons $a_1 = \lambda \neq 0$, $b_1 = -\frac{B_1C_1 - B_3C_3}{I_1} \lambda$ et $a_2 = \lambda \neq 0$, $b_2 = \frac{D}{C_1} \lambda$ $(C_1 \neq 0)$.

Si $I_1 = 0$ et $I_3 + K_3 \neq 0$, alors nous obtenons $a_1 = \lambda \neq 0$, $b_1 = \frac{C_3}{B_2} \lambda$ (si $I_3 = 0$, $B_2 \neq 0$, ou bien $a_1 = \lambda \neq 0$, $b_1 = \frac{D}{C_1} \lambda$ (si $K_3 = 0$, $C_1 \neq 0$ et $a_2 = 0$, $b_2 = \lambda \neq 0$.

1.1.3. $I_3 = K_3 = 0$.

Si $I_1 \cdot K_1 \neq 0$, l'équation (4) admet deux représentations nomographiques de cette sorte où $a_1 = \lambda \neq 0$, $b_1 = \frac{C_3}{B_2} \lambda$ et $a_2 = \lambda \neq 0$, $b_2 = \frac{D}{C_1} \lambda$, $(B_2 \cdot C_1 \neq 0,\ b \neq a)$.

Si $I_1 = K_1 = 0$, en ce cas, on ne peut affirmer que l'équation donnée admet ou n'admet pas, de représentation nomographique de ce type, on doit étudier le système initial (5).

1.2. $\Delta = 0$

1.2.1. $I_3 \,.\, K_2 \neq 0$. Pour l'équation (4) il existe un ensemble infini de représentations nomographiques, par des nomogrammes à points alignés, échelles rectilignes projectives, situées sur trois droites concurrentes ou arallèles. Ces nomogrammes sont projectivement équivalents.

Si $I_1 \neq 0$ et $K_1 \neq 0$, nous obtenons $a = \lambda \neq 0$, $b = \frac{-I}{2I_1}\lambda$.

Si $I_1 \neq 0$ et $K_1 = 0$, nous avons $a = \lambda \neq 0$, $b = 0$.

Si $I_1 = 0$ et $K_1 \neq 0$, alors nous obtenons $a = 0$, $b = \lambda \neq 0$.

Si $I_1 = 0$, $K_1 = 0$ il résulte également $I = 0$, a et b restent arbitraires, équation (8) étant indentiquement vérifiée. En ce cas l'équation (4) n'adnet pas une représentation nomographique de ce type, le polynome du remier membre de l'équation (4) est un produit de facteurs qui contiennent ne ou deux variables.

1.2.2. $I_3 \cdot K_3 = 0$; $I_3 + K_3 \neq 0$. L'équation (4) possède également un nsemble infini de représentations nomographiques par des nomogrammes points alignés formes par trois échelles rectilignes projectives, situées ur trois droites concurrentes ou parallèles. Les nomogrammes sont proectivement équivalents.

Si $I_1 \neq 0$, alors nous obtenons $a = \lambda \neq 0$, $b = \frac{B_2C_2 - AD}{I_1}\lambda = \frac{C_3}{B_2}\lambda$

si $I_3 = 0$,) ou bien $a = \lambda \neq 0$, $b = \frac{B_3C_3 - B_1C_1}{I_1}\lambda = \frac{D}{C_1}\lambda$ (si $K_3 = 0$).

Si $I_1 = 0$ nous ne pouvons pas affirmer si l'équation donnée admet u n'admet pas, de représentation nomographique de ce type, on doît tudier le système initial (5).

1.2.3. $I_3 = K_3 = 0$.

En ce cas l'équation (4) n'admet pas une représentation nomographiue de ce type, le polynôme du premier membre de l'équation est un prouit de facteurs qui contiennent une ou deux variables.

1.3. $\Delta < 0$.

En ce cas, l'équation du troisième ordre nomographique (4) n'admet as de représentation nomographique par des nomogrammes à points aligés à trois échelles rectilignes parce que les valeurs des paramètres des échels qui s'obtiennent en ce cas sont des nombres complexes.

Une étude analogue peurrait être également fait dans les hypothèses elon lesquelles l'échelles de la variable v ou w serait située sur l'axe Ox.

Exemples: 1. Pour l'équation du troisième ordre nomographique

$$uvw + 3vw + 2uw + 2uv + u + v + 2w + 1 = 0$$

ous avons $\Delta = 16 > 0$, $I_3 = 4$, $K_3 = -1$, $I_1 = 3$. C'est le cas $I_3 \cdot K_3 \neq 0$,

$I_1 \neq 0$. Les paramètres des échelles du nomogramme d'après les formules (7) sont:

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \frac{b}{a} = -\frac{1}{3}$$

$a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = -2$, $d_1 = \frac{1}{3}$, $e_1 = 0$, $f_1 = 2$, $g_1 = 1$, $m_1 = -2$, $n_1 = -2$; $a_2 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{2}{9}$, $d_2 = 3$, $e_2 = \frac{12}{5}$, $f_2 = -2$, $g_2 = \frac{1}{5}$, $m_2 = \frac{2}{3}$, $n_2 = 2$.

Les équations de Soreau correspondentes sont:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{u+1}{u-2} & 1 \\ \frac{1}{3}\frac{v}{v+1} & 0 & 1 \\ \frac{2w+1}{w-2} & \frac{-2w+1}{w-2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{3u-1}{9u+2} & 1 \\ \frac{5v+4}{5v+1} & 0 & 1 \\ \frac{-2w+1}{3w+2} & \frac{2w+1}{3w+2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Pour l'équation

$$uvw + 3vw + uw + 4uv + 2u + 8v + w + 2 = 0$$

nous avons $\Delta = 0$, $I_3 = 2$, $K_3 = 9$, $I_1 = 2$. C'est le cas $I_3 \cdot K_3 \neq 0$, et $I_1 \neq 0$. Les paramètres des échelles du nomogramme sont:

$$\frac{b}{a} = 1,\ a = 1,\ c = -3,\ d = -1,\ e = 0,\ f = -\frac{1}{2},\ g = 2,\ m = 4,\ n = \frac{1}{2}.$$

En ce cas l'équation de Soreau est:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{u+1}{u-3} & 1 \\ \frac{-v}{v+2} & 0 & 1 \\ \frac{-\frac{1}{2}w+1}{w+4} & \frac{\frac{1}{2}w+1}{w+4} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Nous étudierons maintenant la représentation de l'équation (4) par des nomogrammes à points alignés à échelles rectilignes, dont une régulière et deux projectives. En cette sorte de représentation il nous fait prendre en considération tous le quatres types de nomogrammes distincts au point de vue affine, parce que la transformation projective ne conserve pas les échelles régulières.

L'équation de Soreau correspondant au nomogramme à une échelle régulière sur l'axe Ox, une échelle projective sur l'axe Oy et à une deuxième échelle projective sur une droite quelconque

$$\begin{vmatrix} 0 & u+a & 1 \\ \frac{bv+c}{v+d} & 0 & 1 \\ \frac{ew+h}{w+g} & \frac{kw+m}{w+g} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

contient neuf paramètres.

En tennant compte que au moins l'un des paramètres b, c ou e, h est différent de zéro, et en développant le premier membre de l'équation (9), dans l'hypothèse $b = 1$ nous obtenons

$$\begin{aligned} &(e-1)uvw + (k + ae - a)vw + (de - c)uw + (h - g)uv + \\ &+ (dh - cg)u + (m + ah - ag)v + (ck + adc - ac)w + \\ &+ cm + adh - acg = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

La détermination des nomogrammes du type considéré, pour l'équation (4) conduit à la résolution du système

$$\begin{aligned} &e - 1 = A & & dh - cg = C_1 \\ &k + a(e-1) = B_1 & & m + a(h-g) = C_2 \\ &de - c = B_2 & & ck + a(dc - c) = C_3 \\ &h - g = B_3 & & cm + a(dh - cg) = D \end{aligned} \tag{11}$$

À l'aide de ce système on obtient les valeurs des paramètres du nomogramme cherché

$$\begin{aligned} &c = \frac{C_3 - B_2 a}{B_1 - Aa} = \frac{D - C_1 a}{C_2 - B_3 a} \\ &d = \frac{1}{1+A}\left[B_2 + \frac{C_3 - B_2 a}{B_1 - Aa}\right], \quad e = 1 + A, \quad k = B_1 - Aa \\ &g = \frac{(C_1 + AC_1 - B_2B_3)(B_1 - Aa) - B_3(C_3 - B_2 a)}{B_2(B_1 - Aa) - A(C_3 - E_2 a)}, \quad m = C_2 - B_3 a \\ &h = B_3 + \frac{(C_1 + AC_1 - B_2B_3)(B - Aa) - B_3(C_3 - B_2 a)}{B_2(B_1 - Aa) - A(C_3 - B_2 a)} \end{aligned} \tag{12}$$

Il résulte de ce système que les paramètres des échelles du nomogramme s'expriment à l'aide du paramètre a donné par l'équation

$$I_1 a^2 + Ia + K_1 = 0 \tag{13}$$

Dans tous les calculs effectués avec les formules (12) il faut supposer que les dénominateurs sont différents de zéro. Au cas où l'un de ces dénominateurs s'annulerait il faudrait réexaminer la résolution du système initial. Pour la discussion des solutions on procède de manière analogue à celle du cas précédent.

2.1. $\Delta > 0$

2.1.1. $I_3 \cdot K_3 \neq 0$. L'équation (4) est représentable nomographiquement par deux nomogrammes distincts au point de vue affine situés sur trois droites qui déterminent un triangle, de telle manière que la variable u ait une échelle régulière et les autres variables, deux projectives.

Si $I_1 \neq 0$, $K_1 \neq 0$, les paramètres des deux nomogrammes sont calculés à l'aide des formules (12) où $a_1 = \frac{-I + \sqrt{\Delta}}{2I_1}$ et $a_2 = \frac{-I - \sqrt{\Delta}}{2I_1}$.

Si $I_1 \neq 0$, $K_1 = 0$, l'équation (4) admet deux représentations nomographiques de ce type où $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{I}{I_1}$.

Si $I_1 = 0$, $K_1 \neq 0$, l'équation (4) admet une seule représentation nomographique par un nomogramme à deux échelles projectives et une régulière, situées sur deux droites parallèles et sur une sécante. Les paramètres des échelles du nomogramme sont donnés par les formules (12) où $a = -\frac{K_1}{I}$.

Si $I_1 = 0$, $K_1 = 0$, l'équation (4) admet une seule représentation nomographique à deux échelles projectives et une échelle régulière disposées sur deux droites parallèles et une sécante, les paramètres des échelles du nomogramme s'obtiennent à l'aide des formules (12), en tenant compte que $a = 0$

2.1.2. $I_3 \cdot K_3 = 0$, $I_3 + K_3 \neq 0$. L'équation (4) admet deux représentations nomographiques de cette sorte où le paramètre a a les valeurs

$$a_1 = \frac{B_2C_2 - AD}{I_1} \text{ et } a_2 = \frac{B_1}{A} \text{ si } I_1 \neq 0,\ K_3 = 0,\ I_3 = 0, A \neq 0 \text{ ou bien}$$

$$a_1 = \frac{B_3C_3 - B_1C_1}{I_1} \text{ et } a_2 = \frac{C_2}{B_3} \text{ si } I_1 \neq 0,\ K_3 = 0,\ I_3 \neq 0,\ B_3 \neq 0.$$

Si $I_1 = 0$, alors nous avons $a = \frac{B_1}{A}$ (si $I_3 = 0$, $A \neq 0$) ou bien $a = \frac{C_2}{B_3}$ (si $K_3 = 0$, $B_3 \neq 0$). L'équation (4) admet une seule représentation nomographique, à deux échelles projectives et une échelle régulière disposées sur deux droites parallèles et une sécante.

2.1.3. $I_3 = K_3 = 0$.

Si $I_1 \cdot K_1 \neq 0$, alors l'équation donnée admet deux représentations nomographiques de ce type, où $a_1 = \frac{B_1}{A}$ et $a_2 = \frac{C_2}{B_3}$, $(A \cdot B_3 \neq 0.)$

Si $I_1 = K_1 = 0$. En ce cas on ne peut pas affirmer catégoriquement que l'équation (4) admet ou n'admet pas de représentation nomographique de ce type, on doit étudier le système initial (11).

2.2. $\Delta = 0$.

2.2.1. $I_3 \cdot K_3 \neq 0$. L'équation (4) admet une seule représentation nomographique à deux échelles projectives et une échelle régulière, disposées sur trois droites concurrentes.

Si $I_1 \neq 0$, $K_1 \neq 0$ alors les paramètres des échelles du nomogramme se calculent à l'aide des formules (12), avec les mêmes restrictions qu'au cas $\Delta > 0$.

Si $I_1 = 0$, $K_1 \neq 0$, l'équation (4) n'admet pas de représentation nomographique de ce genre.

Si $I_1 = 0$ et $K_1 = 0$, il résulte aussi $I = 0$, l'équation (13) étant identiquement satisfaite et le paramètre a restant arbitraire. En ce cas, l'équation (4) n'admet pas une représentation nomographique de ce type, le polynôme du premier membre de l'équation est un produit de facteurs qui contiennent une ou deux variables.

2.2.2. $I_1 \cdot K_3 = 0$, $I_2 + K_3 \neq 0$. L'équation admet une seule représentation nomographique à deux échelles projectives et une échelle régulière, disposées sur trois droites concurrentes.

Si $I_1 \neq 0$, alors la valeur du paramètre a est $a = \frac{B_2C_2 - AD}{I_1} = \frac{B_1}{A}$ (si $I_3 = 0$), ou bien $a = \frac{B_3C_3 - B_1C_1}{I_1} = \frac{C_2}{B_3}$ (si $K_3 = 0$).

Si $I_1 = 0$, nous ne pouvons pas affirmer que l'équation doneé admet ou n'admet pas de représentation nomographique de ce geure, on doit étudier la système initial (11).

2.2.3. $I_3 = K_3 = 0$. En ce cas, l'équation donnée n'admet pas une représentation nomographique de ce type, le polymône du premier membre de l'équation est un produit des facteurs qui contiennent une ou deux variables.

2. 3. $\Delta < 0$.

En ce cas, l'équation du troisieme ordre nomographique (4) n'admet pas de représentation nomographique par des nomogrammes à points alignés à trois échelles rectilignes, parce que les valeurs des paramètres des échelles qui s'obtiennent en ce cas sont des nombres complexes.

Les nomogrammes considérés, ayant une échelle régulière qui ne se conserve pas par une transformation projective, il est nécessaire d'étudier par le cas aussi où les trois echelles du nomogramme sont situées sur trois droites parallèles.

L'équation de Soreau correspondante est:

$$\begin{vmatrix} 0 & u & 1 \\ 1 & \frac{v+b}{v+c} & 1 \\ d & \frac{ew+f}{w+g} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

Elle conduit à l'équation:

$$\begin{aligned} &(d-1)uvw + (e-d)vw + c(d-1)uw + g(d-1)uv + \\ &+ cg(d-1)u + (f-dg)v + (ce-bd)w + fc - bdg = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Pour la représentation de l'équation (4) par un tel nomogramme, il est nécessaire de résoudre le système

$$\begin{aligned} d - 1 &= A & cg(d-1) &= C_1 \\ e - d &= B_1 & f - dg &= C_2 \\ c(d-1) &= B_2 & ce - bd &= C_3 \\ g(d-1) &= B_3 & fc - bdg &= D \end{aligned} \tag{15}$$

qui nous donne les valeurs des paramètres des échelles

$$\begin{aligned} &b = \frac{B_2 + AB_2 + B_1B_2 - AC_3}{A(1+A)} \qquad c = \frac{B_2}{A} \qquad d = 1 + A \\ &e = 1 + A + B_1 \qquad f = C_2 + (1+A)\frac{B_3}{A} \qquad g = \frac{B_3}{A} \end{aligned} \tag{16}$$

Ce système est compatible dans les conditions:

$$I_1 = 0 \quad I = 0, \ \Delta = 0 \tag{17}$$

Il résulte de l'étude du système (15) que si les conditions (17) sont remplies, alors l'équation (4) se représente par un seul nomogramme à deux échelles projectives et à une échelle régulière, situées sur trois droites parallèles, les valeurs des paramètres étant données par (16), $A(1+A) \neq 0$ parce que $A = 0$ et $A = -1$ correspondent aux cas $d = 1$ et $d = 0$. En ces cas les nomogrammes correspondants ont les supports de deux échelles confondus.

L'étude de la représentation nomographique de l'équation (4) par des nomogrammes à deux échelles projectives et à une échelle régulière a été faite dans l'hypothèse que l'échelle de la variable u est l'échelle régulière, tandis que les échelles des variables v et w sont des échelles projectives.

Si nous changeons ces échelles de toutes les manières possibles, nous pouvons obtenir pour la même équation (4) d'autres nomogrammes affinement distincts, les paramètres de leurs échelles peuvent se déterminer de manière tout à fait analogue. Nous n'allons cependant pas présenter d'une manière détaillée ces cas, parce qu'ils sont analogues au cas considéré.

Exemples. 1. Pour l'équation du troisième ordre nomographique

$$3uvw - vw + 2uw + uv + 4u - v - 2w + 2 = 0$$

nous avons $\Delta = 196 > 0, I_3 = 4, K_3 = -6, I_1 = -10$. C'est le cas $I_3 . K_3 \neq 0$ et $I_1 \neq 0$. Les paramètres des échelles du nomogramme, d'après les formules (12) sont :

$$a_1 = 1,\ c_1 = 1,\ d_1 = \frac{3}{4},\ e_1 = 4,\ g_1 = -13,\ h_1 = -12,\ k_1 = -4,\ m_1 = -2;$$

$$a_2 = -\frac{2}{5},\ c_2 = -6,\ d_1 = -1,\ e_2 = 4,\ g_2 = 1,\ h_2 = 2,\ k_2 = \frac{1}{5},\ m_1 = -\frac{3}{5}.$$

Les équations de Soreau correspondentes sont :

$$\begin{vmatrix} 0 & u+1 & 1 \\ \frac{v+1}{4v+3} & 0 & 1 \\ \frac{w-3}{w-13} & \frac{-4w-2}{w-13} & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 0 & 5u-2 & 1 \\ \frac{v-6}{v-1} & 0 & 1 \\ 2\frac{2w+1}{w+1} & \frac{w-3}{w+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Pour l'équation

$$uvw - vw + 2uw - 2uv - 4u - v - w - 3 = 0$$

nous avons $\Delta > 0, I_3 = -1, K_3 = -2, I_1 = 0$. Les paramètres des échelles du nomogramme sont:

$$a = 2,\ c = \frac{5}{3},\ d = \frac{11}{6},\ e = 2,\ h = -4,\ g = -2,\ k = -3,\ m = 3 \text{ et}$$

l'équation de Soreau correspondente :

$$\begin{vmatrix} 0 & u+2 & 1 \\ \frac{3v+5}{6v+11} & 0 & 1 \\ 1 & -3\frac{w-1}{w-2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Soit l'équation du troisième ordre nomographique

$$uvw - 2vw + 2uw - uv - 2u + 3v + 4w - 2 = 0$$

On a $\Delta = 0,\ I_1 = 0,\ I = 0$

Les paramètres des échelles du nomogramme sont $b = -2$, $c = 2$, $d = 2$ $e = 0$, $f = 1$, $g = -1$ et l'équation du Soreau

$$\begin{vmatrix} 0 & u & 1 \\ 1 & \frac{v-2}{v+2} & 1 \\ 2 & \frac{1}{w-1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Enfin nous étudierons la représentation de l'équation (4) par un nomogramme à une échelle projective et à deux échelles régulières. En ce cas, l'équation de Soreau est

$$\begin{vmatrix} a_1u + b_1 & a_2u + b_3 & 1 \\ c_1v + d_1 & c_2v + d_2 & 1 \\ \frac{e_1w + f_1}{g_1w + k_1} & \frac{e_2w + f_2}{g_1w + k_1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

À l'aide d'une certaine transformation affine, l'équation (18) peut se ramener à l'une des formes

$$\begin{vmatrix} 0 & u+a & 1 \\ v+b & 0 & 1 \\ \frac{cw+d}{ew+k} & \frac{fw+h}{ew+k} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{19}$$

où les trois échelles sont disposées sur trois droites qui forment un triangle, dont deux côtés sont situés sur les axes de coordonnées ;

$$\begin{vmatrix} 0 & u+a & 1 \\ v+b & 0 & 1 \\ \frac{cw+d}{ew+k} & m\frac{cw+d}{ew+k} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{20}$$

quand les échelles sont disposées sur trois droites concurrentes dont deux sont situées sur les axes de coordonnées ;

$$\begin{vmatrix} 0 & u+a & 1 \\ v+b & 0 & 1 \\ h & \frac{cw+d}{ew+k} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

où deux échelles sont disposées sur des droites parallèles

$$\begin{vmatrix} 0 & u & 1 \\ a & v & 1 \\ c & \dfrac{dw+e}{gw+k} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

aux échelles disposées sur trois droites parallèles.

L'équation de Soreau (19) conduit à une équation du troisième ordre nomographique de la forme

$$\begin{aligned} &euvw + (ae-f)vw + (be-c)uw + kuv + (bk-d)u + \\ &+ (ak-h)v + (abe-bf-ac)w + (abk-bh-ad) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Une équation du troisième ordre nomographique peut se représenter par un nomogramme à points alignés, à deux échelles régulières et à une échelle projective, si on peut déterminer les paramètres des échelles a, b, c, d, e, f, h, k en fonction des coefficients de l'équation (4). Les valeurs des paramètres sont données par les solutions du système

$$\begin{aligned} e &= A & bk-d &= C_1 \\ ae-f &= B_1 & ak-h &= C_2 \\ be-c &= B_2 & abe-bf-ac &= C_3 \\ k &= B_3 & abk-bh-ad &= D \end{aligned} \tag{24}$$

qui résulte de l'identification des premiers nombres des équations (4) et (23).

La résolution de ce système conduit aux formules

$$\begin{aligned} &b = \frac{C_3 - B_2 a}{B_1 - Aa} = \frac{D - C_1 a}{C_2 - B_3 a}, \qquad d = \frac{(B_2B_3 - AC_1)a + (B_1C_1 - B_3C_3)}{Aa - B_1} \\ &c = \frac{B_1B_2 - AC_3}{Aa - B_1}\ e = A,\ f = Aa - B_1,\quad h = B_3 a - C_2,\quad k = GB_3 \end{aligned} \tag{25}$$

à l'aide desquelles on peut trouver les solutions. Le paramètre a est donné par les solutions de l'équation

$$I_1 a^2 + Ia + K_1 = 0 \tag{26}$$

Au cas où les dénominateurs du système des solutions (25) sont nuls ces formules ne sont plus valables. En ce cas on revient au système initial, et on le résout d'une autre manière.

3.1. $\Delta > 0$

3.1.1. $I_3 \cdot K_3 \neq 0$. Pour l'équation donnée, il existe des nomogrammes à points alignés à échelles disposées sur les côtés d'un triangle, les paramètres des échelles se calculent à l'aide des formules (25).

Si $I_1 \neq 0$, $K_1 \neq 0$, l'équation (4) admet deux représentations nomographiques de ce genre, par deux nomogrammes affinement distincts où $a_1 = \dfrac{-I + \sqrt{\Delta}}{2I_1}$ et $a_2 = \dfrac{-I - \sqrt{\Delta}}{2I_1}$.

Si $I_1 = 0$, $K_1 \neq 0$, l'équation donnée admet une seule représentation nomographique par un nomogramme à deux échelles parallèles. Pour le paramètre a on obtient $a = -\dfrac{K_1}{I}$.

Si $K_1 = 0$, $I_1 \neq 0$, pour l'équation donnée il existe deux nomogrammes distincts, les paramètres se calculent à l'aide des formules (25) où $a_1 = 0$ et $a_2 = -\dfrac{I}{I_1}$.

Si $I_1 = K_1 = 0$, l'équation (4) admet une seule représentation nomographique de ce type, à deux échelles disposées sur deux droites parallèles, les paramètres des échelles du nomogramme se calculent à l'aide des formules (25) où $a = 0$.

3.1.2. $I_3 \cdot K_3 = 0$, aussi, $I_3 + K_3 \neq 0$. L'équation donnée admet deux représentations nomographiques par un nomogramme aux échelles disposées sur les côtés d'un triangle.

Si $I_3 = 0, K_3 \neq 0, I_1 \neq 0$, nous avons pour les valeurs du paramètre a

$$a_1 = \frac{B_2C_2 - AD}{I_1} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{B_1}{A} \qquad (A \neq 0)$$

Si $K_3 = 0$, $I_3 \neq 0$, $I_1 \neq 0$ nous obtenons

$$a_1 = \frac{B_3C_3 - B_1C_1}{I_1} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{C_2}{B_3} \qquad (B_3 \neq 0)$$

Si $I_1 = 0$, l'équation donnée admet une seule représentation nomographique par un nomogramme à deux échelles disposées sur deux droites parallèles, où le paramètre a est $a = \dfrac{B_1}{A}$ (si $I_3 = 0$, $A \neq 0$), ou bien $a = \dfrac{C_2}{B_3}$ (si $K_3 = 0$, $B_3 \neq 0$).

3.1.3. $I_3 = K_3 = 0$.

Si $I_1 \cdot K_1 \neq 0$, il existe pour l'équation (4) deux représentations nomographiques de cette sorte, où $a_1 = \dfrac{B_1}{A}$ et $a_2 = \dfrac{C_2}{B_3}$. (A $\cdot$ $B_3 \neq 0$)

Si $I_1 = 0$, il résulte $K_1 = 0$. En ce cas, il faut réexaminer la résolution du système (24). Il peut éxister ou non, pour l'équation donnée, une représentation nomographique du type considéré.

3.2. $\Delta = 0$

3.2.1. $I_3 \cdot K_3 \neq 0$. Pour l'équation donnée il existe une seule représentation nomographique par un nomogramme dont les échelles sont situées sur trois droites concurrentes ou parallèles.

Si $I_1 \neq 0$, le nomogramme correspondant à l'équation donnée a toutes les échelles concurrentes et en ce cas les paramètres des échelles du nomogramme se calculent à l'aide des formules (25).

Si $I_1 = 0$, alors l'équation (4) n'admet pas de représentation nomographique de ce genre si $K_1 \neq 0$, ou bien elle n'admet pas une représentation nomographique de ce type, le polynôme du premier membre de l'équation est un produit de facteurs qui contiennent une ou deux variables, si $K_1 = 0$.

3.2.2. $I_3 \cdot K_3 = 0$, $I_3 + K_3 \neq 0$. L'équation (4) admet une seule représentation nomographique du type considéré.

Si $I_1 \neq 0$ nous avons pour le paramètre a

$$a = \frac{B_2C_2 - AD}{I_1} = \frac{B_1}{A} \text{ (si } I_3 = 0), \text{ ou bien } a = \frac{B_3C_3 - B_1C_1}{I_1} = \frac{C_1}{B_3} \text{ (si } K_3 = 0).$$

Si $I_1 = 0$, on ne peut affirmer que l'équation (4) admet ou n'admet pas de représentation nomographique de cette sorte; on doît etudier le système initial (24).

3.2.3. $I_3 = K_3 = 0$

En ce cas, l'équation du troisième ordre nomographique (4) n'admet pas de représentation nomographique de ce type, le polynôme du premier membre de l'équation est un produit de facteurs qui contiennent une ou deux variables.

3.3. $\Delta < 0$

En ce cas, l'équation du troisième ordre nomographique (4) n'admet pas de représentation nomographique par des nomogrammes à points alignés à trois échelles rectilignes parce, que les valeurs des paramètres des échelles qui s'obtiennent en ce cas sont des nombres complexes.

Le cas où toutes les droites du nomogramme sont parallèles doit être considéré séparément, parce que les échelles réguliéres ne sont pas conservées pour une transformation projective. L'équation de Soreau correspondante est (22) où $g = 1$ qui conduit à l'équation :

$$cvw + (a - c)uw + (a - c)ku + ckv - adw - ae = 0 \tag{26}$$

et au système des valeurs des paramètres :

$$a = B_1 + B_2 \quad c = B_1, \quad d = -\frac{C_3}{B_1 + B_2}, \quad e = -\frac{D}{B_1 + B_2}, \quad k = \frac{C_1}{B_2} \tag{27}$$

Les conditions $A = 0$, $B_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $B_1 \neq -B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$ sont remplies, alors l'équation (4) se représente par un seul nomogramme à une échelle projective, et deux échelles régulières situées sur trois droites parallèles.

Exemples. 1. Soit l'équation

$$-uvw - vw + 2uw + uv - u + 2v + 2w + 1 = 0$$

où $\Delta = 16$, $I_3 = 0$, $K_3 = 1$, $I_1 = 1$. Nous avons le cas $\Delta > 0$, $I_3 \cdot K_3 = 0$ $I_1 \neq 0$.

Les paramètres des échelles des nomogrammes sont :

$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ c_1 = -4,\ d_1 = 3,\ e_1 = -1,\ f_1 = 0,\ h_1 = -1,\ k_1 = 1$

$a_2 = 5,\ b_2 = -2,\ c_2 = 0,\ d_2 = -1,\ e_2 = -1,\ f_2 = -4,\ h_2 = 3,\ k_2 = 1$

Les équations du Soreau correspondantes sont

$$\begin{vmatrix} 0 & u + 1 & 1 \\ v + 2 & 0 & 1 \\ \dfrac{-4w + 3}{-w + 1} & \dfrac{-1}{-w + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & u + 5 & 1 \\ v - 2 & 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{-w + 1} & \dfrac{-4w + 3}{-w + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Pour l'équation

$$2uvw + 3vw + uw + uv + u + v + 2w + 1 = 0$$

nous avons $\Delta = 0$, $I_3 = 1$, $K_3 = 0$, $I_1 = -1$.

Les paramètres du nomogramme sont :

$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 0, \quad e = 2, \quad f = -1, \quad h = 0, \quad k = 1$

L'équation de Soreau correspondante est :

$$\begin{vmatrix} 0 & u + 1 & 1 \\ v + 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{w}{2w + 1} & \dfrac{-w}{2w + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si dans l'équation générale donnée (4) on change le rôle de la variable u par celui de la variable w, dans le déterminant (19) nous avons l'échelle u projective, les formules dans tous les sous-cas les mêmes, à la différence près qu'à la place de B_1, C_1 on écrit B_3 et C_3. Par conséquent, à la place des invariants I_3, K_3, nous avons les invariants I_1, K_1, toute la discussion dans les sous-cas respectifs se répète telle quelle. De manière entièrement analogue on discute le cas où l'échelle de la variable v serait projective.

Ces remarques restent valables aussi aux cas considérés précédemment, c'est-à-dire quand l'équation du troisième ordre nomographique se représente soit par un nomogramme à trois échelles projectives, soit par un nomogramme à deux échelles projectives et une échelle régulière.

Tous les cas d'exception qui interviennent dans la discussion doivent être examinés directement sur le système initial, correspondant au type du nomogramme considéré.

Dans ce travail on a considéré seulement les nomogrammes à échelles projectives et régulières, ce qui a entraîné la considération des seules équations à trois variables de la forme (4). Les résultats obtenus peuvent s'étendre aussi aux nomogrammes à échelles fonctionnelles et à échelles projectivement fonctionnelles, qui conduisent à l'équation à trois variables du troisième ordre nomographique ayant la forme générale

$$\begin{aligned} &A\varphi_1(u)\varphi_2(v)\varphi_3(w) + B_1\varphi_2(v)\varphi_3(w) + B_2\varphi_1(u)\varphi_3(w) + \\ &+ B_3\varphi_1(u)\varphi_2(v) + C_1\varphi_1(u) + C_2\varphi_2(v) + C_3\varphi_3(w) + D = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

On peut également constater qu'il existe une grande diversité de représentations nomographiques pour ces types d'équations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bal L., Radó F., Lecţii de nomografie. Ed. Tehnică Bucureşti 1956.

[2] Джемс Л. Е., Казмин В. В, ,,*Номограммы с равномерными прямолинейными шкалами*. Номографический сборник, Москва, **2**. (1962).

[3] Глаголдев Н. А., Курс номографии, Изд. 2-е, М. Гос изд-во. ,,Высшая школа'', 1961.

[4] Pleskot V., Nomografické metody. Sbornik teoretickych stati a praktych aplikaci. Praha, 1962.

[5] Vrănceanu, G., Geometrie analitică proiectivă şi diferenţială. Ed. did. şi pedag., Bucureşti, 1962.

[6] Waerden B. L., van der, Moderne Algebra, Springer Verlag Berlin, 1930.

Reçu le 25. VII. 1966.

MATHEMATICA VOL. 8 (31), 2, 1966, pp. 217–233

Herrn Prof. TIBERIU POPOVICIU
Zum 60. Geburtstag gewidmet

ÜBER ABBILDUNGEN MIT KONVEXITÄTSERHALTENDER INVERSION

von

E. DEÁK

Budapest

§.1. Einleitung

(1.1) Es seien einige durchwegs verwendete Bezeichnungen vorausgeschickt:

Alle Zahlen und Funktionen sind reell.

VR: Vektorraum (reeller linearer Raum).

TVR: Topologischer VR (Hausdorffsch).

LKR: Lokalkonvexer TVR.

Der Ausdruck ,,euklidischer Raum'' wird mit dem Ausdruck ,,endlichdimensionaler TVR'' sinngleich gebraucht. Das ,,Mass'' einer Menge eines euklidischen Raumes ist das Lebesguesche Mass derselben. R ist der Raum der reellen Zahlen.

Für eine Menge E eines VR-es L wird durch $M_L(E)$ die kleinste E enthaltende lineare Mannigfaltigkeit, durch $L(E)$ der kleinste E enthaltende lineare Teilraum und durch $L_E^{\#}$ die Menge der auf E nichtkonstanten Linearformen auf L bezeichnet. $L^{\#}$ ist der algebraisch duale Raum von L.

Für zwei Punkte x_1, x_2 eines VR-es bedeutet $[x_1, x_2]$ bzw. (x_1, x_2) die durch x_1 und x_2 bestimmte abgeschlossene bzw. offene gerade Strecke dieses Raumes.

Eine Menge E eines VR-es wird p-konvex für eine Zahl $0 < p < 1$ gennant, wenn aus $x_1, x_2 \in E$

$$px_1 + (1 - p)x_2 \in E$$