

où A vérifie les hypothèses précédentes, L_r désigne un élément régulier de $\mathcal{A}$, les τ_r sont distincts et dénombrables sur $[a, b]$. On suppose :

$$\sum_r \|B_r\| < \infty \text{ ou } B_r = L_r^{-1} - e$$

On cherche une solution $X(t)$ „pseudo absolument continue” c'est à dire somme d'une intégrale de Bochner et d'une partie singulière de saut. Dans un espace muni de la propriété (D), cela équivaut à chercher X sous forme de la somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction de saut. (les points de discontinuités de X étant les τ_i et X étant (par exemple) supposée continue à droite. Posant :

$$F(t) = - \int_a^t A(s) ds + \sum_1^\infty B_i(t)$$

on forme $\Pi_r^b(dF) = X^*(t)$, dont on a vu que c'est une solution du système étudié. On peut montrer que $X^*(t)$ est bien pseudo absolument continue et qu'il y a unicité de la solution.

Tout ceci permet d'étudier le problème non homogène :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + y, \\ x(t_0) = \lambda \\ x(\tau_r^+) = L_r x(\tau_r^-) + M_r, \quad \{r = 1, 2, \dots\} \end{cases}$$

où $x, y \in \mathcal{X}$, x pseudo absolument continue, y intégrable Bochner, $A(t) : t \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ intégrable Bochner, $L_r, M_r \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et en particulier la façon dont x dépend des „conditions initiales” $A, y, L_r, M_r, \{\tau_r\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Pham Daniel, *Techniques du Calcul matriciel*. pp. 232 et suiv. (Dunod, Paris).
- [2] Mac Nerney J. S., *Continuous products in linear spaces*. Journal of the Elisha Mitchell Society. Nov. 1955, pp. 185-200.
- [3] Hildebrandt, *Introduction to the theory of integration*. pp. 27 et suiv (Academic Press).
- [4] Dunford-Schwartz, *Linear operators*. tome 1, pp. 98 (Intersciences Publishers).
- [5] Bochner-Taylor, *Linear functionals on certain spaces of abstract valued functions*. Annales of mathematics, vol. 39, pp. 914-915 (1938).
- [6] Bourbaki, livre III - chap. 9, pp. 150 et suiv.
- [7] Massera-Schaefter, *Linear differential equations and functional analysis I*. pp. 520-522.

Reçu le 18. VI. 1966.

Hommage à TIBERIU POPOVICIU

PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES INTERPOLATOIRES COMPARABLES PAR RAPPORT À LEUR n -VALENCE

par

ELENA POPOVICIU - MOLDOVAN

à Cluj

1. Dans les travaux [4] [5] nous avons étudié quelques propriétés des ensembles des fonctions, qui sont interpolatoires d'un ordre n et n - valents par rapport à un ensemble qui est aussi interpolatoire d'ordre n . En ce qui suit nous nous occuperons de certaines applications et conséquences des résultats obtenus en [4] et [5].

Nous rappelons les définitions et les notations qui interviendront.

Les ensembles interpolatoires dont nous parlons sont des ensembles de fonctions réelles, d'une variable réelle et continues sur un intervalle fini et fermé qui sera précisé plus loin.

Les ensembles F et G étant interpolatoires d'ordre n sur $[a, b]$, nous disons que F est n -valent par rapport à G si tous les éléments de F sont n -valents par rapport à l'ensemble G . Nous utilisons pour la relation de n -valence (qui est symétrique), entre F et G la notation $F \times^n G$. On suppose que $n \geq 1$.

Si l'ensemble F est interpolatoire d'ordre n sur $[a, b]$, nous disons pour simplifier le langage qu'il est du type $I_n[a, b]$.

F étant un ensemble donné du type $I_n[a, b]$, nous allons employer, comme dans les travaux [4] [5], la notation $\mathcal{U}(F)$ pour l'ensemble de tous les ensembles n -valents par rapport à l'ensemble F .

Nous avons démontré que, si l'on a

$$F \times^n G$$

alors les fonctions d'un quelconque des ensembles F, G sont ou bien toutes convexes ou bien toutes concaves, par rapport à l'autre ensemble [4]. Si les éléments de l'ensemble F sont G -concaves, alors ceux de G sont F -convexes sur $[a, b]$ et nous disons que F est un ensemble sous- G et G est un ensemble sur- F . Nous utilisons alors la notation

$$F \prec G.$$

2. Considérons un ensemble F du type $I_n[a, b]$ et l'ensemble $\mathcal{O}(F)$ correspondant. Pour chaque élément $G \in \mathcal{O}(F)$, on peut considérer l'ensemble correspondant $\mathcal{O}(G)$. Pour chaque élément H de $\mathcal{O}(G)$ on peut considérer l'ensemble $\mathcal{O}(H)$ et ainsi de suite.

Définition 1. La réunion de l'ensemble $\mathcal{O}(F)$ avec F et tous les ensembles $\mathcal{O}(H)$, obtenus comme plus haut, s'appelle arbre de n -valence attaché à l'ensemble F et nous utilisons pour cet arbre la notation $\mathcal{A}(F)$.

Définition 2. L'ensemble F étant donné, nous appelons noeud principal, un ensemble G qui appartient à l'arbre $\mathcal{A}(F)$ et est en même temps élément de l'ensemble $\mathcal{O}(F)$.

Définition 3. L'ensemble F étant donné, nous appelons noeud secondaire un ensemble H qui appartient à l'arbre $\mathcal{A}(F)$ et qui n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{O}(F)$.

Définition 4. Nous disons qu'un noeud secondaire H de l'arbre $\mathcal{A}(F)$ est de premier ordre s'il existe un noeud principal G de l'arbre $\mathcal{A}(F)$, tel que H est ou bien sur- G ou bien sous- G . Le noeud secondaire H est de l'ordre $k \geq 2$ s'il existe un noeud L de $\mathcal{A}(F)$, d'ordre $k - 1$, tel que H est ou bien sous- L ou bien sur- L .

Il faut remarquer, qu'en partant de l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré n et en utilisant des procédés analogues à ceux que nous avons indiqués en [4] et [5], pour obtenir les éléments de $\mathcal{O}(\mathcal{P}_n)$ et compte tenant des propriétés des fonctions convexes ou concaves d'ordre n , on peut construire un arbre qui contient des noeuds d'ordre $k \geq 1$.

3. THÉORÈME 1. Si l'ensemble G est un noeud principal de l'arbre $\mathcal{A}(F)$, alors l'arbre $\mathcal{A}(G)$ est égal à l'arbre $\mathcal{A}(F)$.

Pour la démonstration il suffit de remarquer que l'ensemble F , sous les hypothèses de l'énoncé du théorème 1, est un noeud principal de l'arbre $\mathcal{A}(G)$. En effet nous avons $F \in \mathcal{O}(G)$.

THÉORÈME 2. Si l'ensemble G est un noeud secondaire de premier ordre de l'arbre $\mathcal{A}(F)$, alors l'arbre $\mathcal{A}(G)$ coïncide avec l'arbre $\mathcal{A}(F)$.

Pour la démonstration, remarquons que des hypothèses faites il résulte qu'il existe un noeud principal H de l'arbre $\mathcal{A}(F)$, qui vérifie la relation $H \in \mathcal{O}(G)$. Ceci signifie, par suite du théorème 1 que l'arbre $\mathcal{A}(G)$ contient tous les éléments de l'arbre $\mathcal{A}(F)$. Mais, en même temps, l'arbre $\mathcal{A}(H)$ qui est égal à $\mathcal{A}(F)$ contient tous les éléments de l'arbre $\mathcal{A}(G)$. Le théorème 2 est donc démontré.

On observe facilement qu'on peut généraliser l'énoncé du théorème 2 en remplaçant le noeud secondaire d'ordre premier G , par un noeud d'ordre $k \geq 2$ quelconque.

4. Un des problèmes qui se posent est celui de décider de la coïncidence de deux arbres $\mathcal{A}(F)$ et $\mathcal{A}(G)$, F et G étant deux ensembles quelconques du type $I_n[a, b]$. Comme conséquence des théorèmes énoncés on peut formuler les propositions suivantes.

Proposition 1. F et G étant des ensembles du type $I_n[a, b]$, pour que l'on ait $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ il est suffisant que l'arbre $\mathcal{A}(F)$ ait un élément n -valent par rapport à G .

Proposition 2. F et G étant des ensembles du type $I_n[a, b]$, pour que l'on ait $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ il est suffisant que l'arbre $\mathcal{A}(F)$ ait un élément n -valent par rapport à un noeud secondaire d'ordre fini de l'arbre $\mathcal{A}(G)$.

5. Comme application de la théorie des fonctions d'ordre n (convexes, nonconcaves, polynomiales, nonconvexes, concaves) par rapport à un ensemble interpolatoire d'ordre n (linéaire ou non) on a étudié le comportement de certaines classes de fonctionnelles [1, 2, 3, 6]. Il sera intéressant de faire quelques remarques concernant ce problème, en remplaçant les ensembles interpolatoires isolés, par des ensembles de n -valence, $\mathcal{O}(F)$, pour F donné.

Soit $A[f]$ une fonctionnelle définie sur l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Soit F un ensemble du type $I_n[a, b]$, $n \geq 1$.

Définition 5. On dit que la fonctionnelle $A[f]$ est F -exacte si pour chaque $f \in F$, on a $A[f] = 0$.

Définition 6. On dit que la fonctionnelle $A[f]$ est F -simple si elle est F -exacte et pour chaque fonction f qui est F -convexe ou F -concave on a $A[f] \neq 0$.

On peut remarquer qu'une fonctionnelle $A[f]$ peut être F -exacte sans être F -simple.

L e m m e 1. Si l'ensemble F est du type $I_n[a, b]$, H est un ensemble du type $I_{n+1}[a, b]$ qui contient l'ensemble F et $A[f]$ une fonctionnelle F -simple, alors $A[f]$ ne peut pas être H -exacte.

Pour démontrer le lemme 1 il suffit de remarquer que les éléments de l'ensemble H qui ne font pas partie de F , sont des fonctions ou bien F -convexes ou bien F -concaves [6]. Autrement, nous sommes en contradiction avec l'hypothèse que l'ensemble H est du type $I_{n+1}[a, b]$.

THÉORÈME 3. Si F est un ensemble du type $I_n[a, b]$, $n \geq 1$, G un élément de l'ensemble $\mathcal{O}(F)$ et la fonctionnelle $A[f]$ est en même temps F -exacte et G -exacte, alors $A[f]$ ne peut pas être ni F -simple ni G -simple.

Pour la démonstration, on peut remarquer que de l'hypothèse $G \in \mathcal{O}(F)$ il résulte que l'on a ou bien $F \prec G$ ou bien $G \prec F$.

THÉORÈME 4. Si la fonctionnelle $A[f]$ est en même temps F -simple et H -simple, F et H étant du type $I_n[a, b]$, alors quelles que soient les fonctions $f \in F$ et $h \in H$, la différence $f(x) - h(x)$ doit s'annuler sur au moins $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$.

En effet s'il existe une fonction $h \in H$, n -valente par rapport à l'ensemble H , alors $A[h] \neq 0$ et nous sommes en contradiction avec la H -simplicité de la fonctionnelle $A[f]$.

THÉORÈME 5. Si F et G sont des ensembles du type $I_n[a, b]$, si $F \not\prec G$, si la fonctionnelle $A[f]$ est F -exacte et G -exacte, alors $A[f]$ ne peut être H -simple pour aucun H qui est un noeud principal, ou bien un noeud secondaire de premier ordre de l'arbre $\mathcal{A}(F)$.

La démonstration résulte comme une conséquence du théorème 2 et du théorème 5.

Les théorèmes 3, 4 et 5 ont des applications à la théorie du reste dans les procédés d'approximation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Popoviciu T., *Asupra formei restului în unele formule de aproximatie ale analizei*. Lucrările Ses. Gen. Sti. ale Acad. R.P.R. din 1950, 183–185.
- [2] — *Asupra restului în formulele de derivare numerică*. Studii și Cerc. Matem. (Cluj), 3, 53–122 (1952).
- [3] — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica, 1 (24), 1, 95–142 (1959).
- [4] Popoviciu-Moldovan E., *Introduction à l'étude comparative des ensembles de fonctions interpolatoires*. Mathematica, 6 (29), 1, 145–155 (1964).
- [5] — *Sur les classes d'ensembles interpolatoires qui sont comparables par rapport à leur n -valence*. Mathematica, 7 (30), 2, 319–325 (1965).
- [6] — *Sur une généralisation des fonctions convexes*. Mathematica, 1 (24), 1, 49–80 (1959).

Reçu le 2. VI. 1966

ОЦЕНКА НОРМЫ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ФЕЙЕРА И СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОЛНЫМИ И ЧАСТНЫМИ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ

М. К. ПОТАПОВ

Москва

Для периодических функций многих переменных известна связь между полными и частными наилучшими приближениями (см. [2], [8], [9], [10]). В этой заметке доказываются аналогичные результаты для непериодических функций $f(x_1, \dots, x_k)$, заданных на всем k -мерном пространстве. Доказательство проводится при помощи оценки нормы обобщенного интеграла Фейера. Частично результаты этой заметки анонсированы в [10].

I. Как обычно, будем говорить, что измеримая функция $f(x) \in \mathcal{L}_p(-\infty, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, если для $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а для $p = \infty$

$$\|f\|_p = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| < \infty.$$

Для любого фиксированного θ из промежутка $0 \leq \theta < 1$, любого фиксированного $T > 0$ и любой измеримой функции $f(x) \in \mathcal{L}_p(-\infty, \infty)$ рассмотрим обобщенный интеграл Фейера (см. [1], стр. 217):

$$\sigma_T(x; f; \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \Phi(u; \theta; T) du,$$