

LEGĂTURA FORMULEI DE DERIVARE NUMERICĂ A LUI V. N. FADEEVA, CU DIFERENȚELE DIVIZATE

de

D. V. IONESCU

*Comunicare prezentată la prima Sesiune științifică a Institutului pedagogic de 3 ani,
Baia Mare, în ziua de 13 februarie 1965*

Să considerăm o funcție $f(x)$ de clasa C^6 pe intervalul $[a, b]$ și nodurile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică cu rația h , luate pe acest interval. V. N. Fadeeva [1] a pus în evidență formula de derivare numerică

$$\Delta^2 f(x_1) = f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1) = \frac{h^2}{12} [f''(x_1) + 10f''(x_2) + f''(x_3)] + O(h^6) \quad (1)$$

pe care a aplicat-o în unele probleme de fizică matematică, la integrarea numerică a unor ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea cu condiții la limită.

V. N. Fadeeva a demonstrat formula (1), arătând că ea se obține din dezvoltarea lui $f(x+h)$, $f(x+2h)$ după puterile lui h , făcându-se grupări convenabile de termeni.

În această lucrare vom da o nouă demonstrație pentru formula (1) punând în evidență originea ei și determinând restul ei sub formă de integrală definită. În același timp vom stabili o legătură între formula (1) și diferențele divizate, din care va rezulta posibilitatea unor noi extinderi ale formulei (1).

1. Am demonstrat [2] că diferența divizată a funcției $f(x)$ pe nodurile x_1, x_2, x_3 luate oricum pe intervalul $[a, b]$ se poate reprezenta printr-o integrală definită

$$[x_1, x_2, x_3; f] = \int_{x_1}^{x_3} \varphi(x) f''(x) dx \quad (2)$$

unde, în cazul $x_1 < x_2 < x_3$, funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, cu funcțiile

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x_3 - x}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \quad (3)$$

Funcția $\varphi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_1, x_3) . Aplicînd la membrul al doilea al formulei (2), o formulă de cuadratură relativă la funcția $f''(x)$, cu nodurile simple x_1, x_2, x_3 obținem formula

$$[x_1, x_2, x_3; f] = A_1 f''(x_1) + A_2 f''(x_2) + A_3 f''(x_3) + R \quad (4)$$

care este de tipul formulei (1).

Coeficienții A_1, A_2, A_3 , din formula (4) sînt

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) - (x_2 - x_3)^2}{12(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ A_2 &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) - (x_3 - x_1)^2}{12(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ A_3 &= \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_2)^2}{12(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

iar restul R este exprimat printr-o integrală definită

$$R = \int_{x_1}^{x_3} \psi(x) f^5(x) dx \quad (6)$$

în care funcția $\psi(x)$ coincide pe intervalele $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, cu funcțiile $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ care sînt soluțiile ecuațiilor diferențiale

$$\psi_1'''(x) = \varphi_1(x), \quad \psi_2'''(x) = \varphi_2(x) \quad (7)$$

care satisfac la condițiile la limită

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1) &= 0, & \psi_1'(x_1) &= 0 \\ \psi_2(x_2) &= \psi_1(x_2), & \psi_2'(x_2) &= \psi_1'(x_2) \\ \psi_2(x_3) &= 0, & \psi_2'(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Este ușor să se integreze sistemul de ecuații diferențiale (7) cu condițiile (8). Ținînd seama de condițiile la limită din nodurile x_1 și x_3 avem

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \int_{x_1}^x \frac{(x-s)^2}{2} \varphi_1(s) ds + \lambda \frac{(x-x_1)^2}{2} \\ \psi_2(x) &= \int_{x_3}^x \frac{(x-s)^2}{2} \varphi_2(s) ds + \mu \frac{(x-x_3)^3}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

unde λ și μ sînt două constante oarecare.

Scriind că și condițiile la limită din nodul x_2 sînt îndeplinite avem un sistem de ecuații care determină pe λ și μ . Se obține

$$\lambda = -A_1, \quad \mu = A_3 \quad (10)$$

Deducem astfel că $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ sînt date de formulele

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{(x-x_1)^4}{24(x_1-x_2)(x_1-x_3)} - A_1 \frac{(x-x_1)^2}{2} \\ \psi_2(x) &= -\frac{(x-x_3)^4}{24(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + A_3 \frac{(x-x_3)^2}{2},\end{aligned}\quad (11)$$

unde coeficienții A_1 , A_3 sînt dați de formulele (5).

Graficul funcției ψ' pe intervalul $[x_1, x_3]$ depinde de poziția nodului x_2 față de intervalul $[\xi, \xi']$, unde nodurile ξ , ξ' sînt date de formulele

$$\xi - x_1 = x_3 - \xi' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (x_3 - x_1) \quad (12)$$

Este important să observăm că dacă se descrie un cerc cu centrul în x_3 și rază $x_3 - x_1$ se notează cu P_1 nodul x_1 și cu M_1 punctul luat pe cerc astfel ca $P_1 M_1$ să fie latura decagonului regulat înscris în cerc și cu P'_1 simetricul lui P_1 în raport cu M_1 , atunci nodul ξ este proiecția punctului P'_1 pe axa Ox. Nodul ξ' este simetricul lui ξ în raport cu mijlocul intervalului (x_1, x_3) .

Dacă nodul x_2 este situat pe intervalul $(x_1, \xi]$ funcția $\psi(x)$ este pozitivă pe intervalul (x_1, x_3) , iar dacă nodul x_2 este situat pe intervalul $[\xi', x_3]$ funcția $\psi(x)$ este negativă pe intervalul (x_1, x_3) . Dacă nodul x_2 este situat pe intervalul (ξ, ξ') funcția $\psi(x)$ se anulează o dată pe intervalul (x_1, x_3) . Formula (4) are gradul de excitație 4, pentru orice x_2 din intervalul (x_1, x_3) , afară de cazul $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{3}$. În acest caz graficul funcției $\psi(x)$ este simetric față de mijlocul intervalului (x_1, x_3) și prin urmare avem

$$\int_{x_1}^{x_3} \psi(x) dx = 0 \quad (13)$$

Să construim formula de derivare numerică (4) pentru $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, să demonstrăm că gradul ei de exactitate este egal cu 5 și că în acest caz ea coincide cu formula (1).

2. Pentru aceasta să observăm că în cazul $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, în formula (2) avem

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_1}{2h^2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x - x_3}{2h^2} \quad (14)$$

La membrul al doilea al formulei (2) să aplicăm o formulă de caudrată cu nodurile simple x_1 , x_3 și nodul dublu x_2 . Vom obține o formulă de forma

$$\int_{x_1}^{x_3} \varphi(x) f''(x) dx = B_1 f''(x_1) + B_2 f''(x_2) + B_3 f''(x_3) + \int_{x_1}^{x_3} \psi(x) f^{(6)}(x) dx \quad (15)$$

în care funcția $\psi(x)$ coincide pe intervalele $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, cu funcțiile $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ care sînt soluțiile ecuațiilor diferențiale

$$\psi_1^{(4)}(x) = \frac{x - x_1}{2h^2}, \quad \psi_2^{(4)}(x) = -\frac{x - x_3}{2h^2} \quad (16)$$

și care verifică condițiile la limită

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1) &= 0, & \psi_1'(x_1) &= 0, & \psi_1''(x_1) &= 0 \\ \psi_2(x_2) &= \psi_1(x_2), & \psi_2'(x_2) &= \psi_1'(x_2), & \psi_2''(x_2) &= \psi_1''(x_2) \\ \psi_2(x_3) &= 0, & \psi_2'(x_3) &= 0, & \psi_2''(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

În formula (15), avem

$$B_1 = -\psi_1'''(x_1), \quad B_2 = \psi_1'''(x_2) - \psi_2'''(x_2), \quad B_3 = \psi_2'''(x_3) \quad (18)$$

Soluțiile ecuațiilor diferențiale (16) care verifică condițiile la limită (17) din nodurile x_1 și x_3 sînt

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2h^2} \int_{x_1}^x \frac{(x-s)^3}{3!} (s-x_1) ds + \lambda \frac{(x-x_1)^3}{3!} \\ \psi_2(x) &= -\frac{1}{2h^2} \int_{x_3}^x \frac{(x-s)^3}{3!} (s-x_3) ds + \mu \frac{(x-x_3)^3}{3!} \end{aligned} \quad (19)$$

unde λ și μ sînt constante oarecare.

Ținînd seama că

$$\int_{x_1}^x \frac{(x-s)^3}{3!} (s-x_1) ds = \frac{(x-x_1)^5}{5!}, \quad \int_{x_3}^x \frac{(x-s)^3}{3!} (s-x_3) ds = \frac{(x-x_3)^5}{5!}$$

ecuațiile (14) se reduc la

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2h^2} \frac{(x-x_1)^5}{5!} + \lambda \frac{(x-x_1)^3}{3!} \\ \psi_2(x) &= -\frac{1}{2h^2} \frac{(x-x_3)^5}{5!} + \mu \frac{(x-x_3)^3}{3!} \end{aligned} \quad (20)$$

Scriind că funcțiile $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ verifică condițiile la limită (17) din nodul x_2 , avem ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h^2} \frac{(x_2-x_1)^5}{5!} + \lambda \frac{(x_2-x_1)^3}{3!} &= \frac{1}{2h^2} \frac{(x_3-x_2)^5}{5!} - \mu \frac{(x_3-x_2)^3}{3!} \\ \frac{1}{2h^2} \frac{(x_2-x_1)^4}{4!} + \lambda \frac{(x_2-x_1)^2}{2!} &= -\frac{1}{2h^2} \frac{(x_3-x_2)^4}{4!} + \mu \frac{(x_3-x_2)^2}{2!} \\ \frac{1}{2h^2} \frac{(x_2-x_1)^3}{3!} + \lambda \frac{x_2-x_1}{1!} &= \frac{1}{2h^2} \frac{(x_3-x_2)^4}{4!} - \mu \frac{x_3-x_2}{1!} \end{aligned}$$

care, din cauză că $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, se reduc la

$$\lambda + \mu = 0, \quad \lambda - \mu = -\frac{1}{12},$$

și vom avea deci

$$\lambda = -\frac{1}{24}, \quad \mu = \frac{1}{24}.$$

ecuațiile (20) sînt prin urmare

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2h^2} \frac{(x-x_1)^5}{5!} - \frac{1}{24} \frac{(x-x_1)^3}{3!} \\ \psi_2(x) &= -\frac{1}{2h^2} \frac{(x-x_3)^5}{5!} + \frac{1}{24} \frac{(x-x_3)^3}{3!} \end{aligned} \quad (21)$$

Observăm că mai putem scrie

$$\psi_1(x) = \frac{(x-x_1)^3}{240h^2} \left[(x-x_1)^2 - \frac{5}{3} h^2 \right], \quad \psi_2(x) = \frac{(x_3-x)^3}{240h^2} \left[(x_3-x)^2 - \frac{5}{3} h^2 \right] \quad (21')$$

de unde rezultă că funcția $\psi(x)$ este negativă pe intervalul (x_1, x_3) .

Formulele (18) arată că

$$B_1 = \frac{1}{24}, \quad B_2 = \frac{5}{12}, \quad B_3 = \frac{1}{24} \quad (22)$$

Deoarece nodurile x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică cu rația h , avem

$$[x_1, x_2, x_3 : f] = \frac{\Delta^2 f(x_1)}{2! h^2} = \frac{1}{2h^2} [f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)] \quad (23)$$

O dată obținute formulele (21), (22), (23), din formulele (2), (15) deducem că

$$f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1) = \frac{h^2}{12} [f''(x_1) + 10f''(x_2) + f''(x_3)] + R, \quad (24)$$

unde

$$R = 2h^2 \int_{x_1}^{x_3} \psi(x) f^{(6)}(x) dx \quad (25)$$

Am obținut astfel formula de derivare numerică (24), adică formula (1), utilizată de V. N. Fadeeva și în care am precizat restul prin formula (25). Formula (24) are gradul de exactitate egal cu 5, deoarece am demonstrat că funcția $\psi(x)$ este negativă pe intervalul (x_1, x_3) .

Fără greutate se arată că

$$2h^2 \int_{x_1}^{x_3} \psi(x) dx = -\frac{h^6}{240}$$

de unde rezultă că restul R se mai scrie sub forma

$$R = -\frac{h^6}{240} f^{(6)}(\xi) \quad (25')$$

unde $\xi \in (x_1, x_3)$. Deducem evaluarea restului

$$|R| \leq \frac{h^6}{240} M_6, \quad M_6 = \sup_{(x_1, x_3)} |f^{(6)}(x)| \quad (26)$$

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Fadeeva, *La méthode des droites appliquée à quelques problèmes aux limites* (en russe). „Trudi mat. In-ta“ 28, 1949, p. 73—103.
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice* (cap. III). Editura tehnică, București, 1957.
3. D. V. Ionescu, *Généralisation d'une formule de dérivation numérique de V. N. Fadeeva*. „Annales Polonici Mathematici“ XIV (1964), p. 169—181.

СВЯЗЬ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В. Н. ФАДЕЕВОЙ С РАЗНОСТНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ

(Резюме)

В работе устанавливается связь формулы численного дифференцирования (1) с формулой (2), дающей представление разностных отношений $[x_1, x_2, x_3; f]$ посредством определенного интеграла.

Применив к интегралу из формулы (2) формулу квадратуры с простыми узлами x_1, x_2, x_3 , получается формула (4) с коэффициентами (5) и остатком (6). График функции ψ в интервале $[x_1, x_3]$ зависит от положения узла x_2 по отношению к интервалу $[\xi, \xi']$, где узлы ξ, ξ' даны формулами (12). Функция ψ сохраняет свой знак в интервале (x_1, x_2) , если $x_2 \in (x_1, \xi]$ или $x_2 \in [\xi', x_3)$, однако изменяет свой знак, когда $x_2 \in (\xi, \xi')$. Для любого $x_2 \neq \frac{x_1 + x_3}{2}$ формула (4) имеет степень точности равную 4.

Для $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ степень точности формулы (4) равна 5 и формула (4) становится формулой Н(1)В. Н. Фадеевой. В работе остаток формулы (1) выражается в виде определенного интеграла и дается его оценка при помощи неравенства (26).

LA RELATION DE LA FORMULE DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE DE V.N. FADEEVA
AVEC LES DIFFÉRENCES DIVISÉES

(R é s u m é)

L'auteur établit une relation entre la formule de dérivation numérique (1) et la formule (2) qui donne la représentation de la différence divisée $[x_1, x_2, x_3; f]$ par une intégrale définie.

En appliquant à l'intégrale de la formule (2) une formule de quadrature à noeuds simples x_1, x_2, x_3 , on obtient la formule (4) avec les coefficients (5) et le reste (6). Le graphique de la fonction ψ dans l'intervalle x_1, x_3 , dépend de la position du noeud x_2 par rapport à l'intervalle $[\xi, \xi']$, où les noeuds ξ, ξ' sont donnés par les formules (12). La fonction ψ garde son signe dans l'intervalle (x_1, x_3) si $x_2 \in (x_1, \xi)$ ou $x_2 \in [\xi', x_3)$, mais elle change de signe quand $x_2 \in (\xi, \xi')$. Pour tout $x_2 \neq \frac{x_1 + x_3}{2}$, la formule (4) a un degré d'exactitude égal à 4.

Pour $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, le degré d'exactitude de la formule (4) est égal à 5 et la formule (4) devient la formule (1) de V. N. Fadeeva. L'auteur met le reste de la formule (1) sous forme d'intégrale définie et donne son évaluation par l'inégalité (26).