

L'INSTITUT DE CALCUL DE CLUJ ET LES RECHERCHES D'ANALYSE NUMÉRIQUE

PAR

TIBERIU POPOVICIU

DIRECTEUR DE L'INSTITUT DE CALCUL DE CLUJ

1. Les mathématiciens de partout s'intéressent de plus en plus aux problèmes liés à l'utilisation des machines rapides de calcul.

Chez nous aussi, il y a déjà dix ans, a été créé un Institut de Calcul. Dès 1951, une section de recherches mathématiques a fonctionné à Cluj dans le cadre de la Filiale de notre Académie. Des problèmes concernant la théorie de l'approximation des fonctions, de l'interpolation, la nomographie, etc., ont été abordés avec beaucoup d'élan par nos chercheurs.

En 1957 a été créé l'Institut de Calcul de Cluj. Aujourd'hui cet Institut fonctionne avec trois sections : Théorie constructive des fonctions et Analyse numérique, Transformation des espaces métriques et Analyse fonctionnelle et Machines de calcul, avec respectivement 3, 2 et 4 secteurs.

2. Par suite de l'apparition des machines modernes rapides de calcul, le domaine d'applicabilité des mathématiques a augmenté considérablement. Les méthodes et certains résultats mathématiques s'imposent de plus en plus avec vigueur dans la médecine, la biologie, l'économie, la linguistique et dans bien d'autres branches des recherches théoriques et des activités pratiques. Par suite de l'essor des recherches d'analyse numérique, les mathématiques sont devenues un utile instrument pour la production. La planification de la production, l'interprétation juste des phénomènes naturels et des phénomènes économiques ne sont pas possibles sans l'utilisation de méthodes avancées de calcul.

En partant de ces considérations, les mathématiciens et les ingénieurs de l'Institut de Calcul de Cluj étudient les multiples aspects des problèmes figurant dans notre plan de recherches.

L'Institut de Calcul de Cluj, d'après son profil, prévoit dans son plan des recherches théoriques fondamentales, dans la direction de l'analyse numérique, la théorie constructive des fonctions, l'analyse fonction-

nelle, la théorie qualitative des équations différentielles, la programmation linéaire, etc. Ces directions de recherches doivent être regardées dans leur interdépendance.

3. Pour mieux connaître les résultats obtenus par les chercheurs de l'Institut de Calcul de Cluj, nous exposerons quelques-unes de nos réalisations dans la période 1957–1965.

Une fonction réelle f de la variable réelle x est dite non concave (convexe) d'ordre n si sa différence divisée $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$ d'ordre $n+1$ reste non négative (positive) sur tout groupe de $n+2$ points distincts $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ de l'ensemble de définition de la fonction. Une série de recherches antérieures [18, 25] nous ont permis de préciser le reste d'une large catégorie de formules linéaires d'approximation de l'analyse. Si $A[f]$ est une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) définie sur un ensemble linéaire de fonctions continues définies sur un intervalle donné, qui contient les polynômes et qui vérifie les propriétés suivantes :

$$1^\circ. A[1] = A[x] = \dots = A[x^n] = 0, A[x^{n+1}] \neq 0,$$

$$2^\circ. A[f] \neq 0 \text{ pour toute } f \text{ convexe d'ordre } n, \text{ alors nous avons}$$

$$(1) \quad A[f] = K[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]$$

où K est une constante absolue ($= A[x^{n+1}]$) et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$ sont $n+2$ points distincts de l'intervalle de définition des fonctions f (et dépendant en général de f). Lorsque seule la condition 1° est vérifiée, sous des hypothèses très générales, nous avons

$$(2) \quad A[f] = K[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] + K'[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}; f]$$

les deux termes du second membre étant analogues au second membre de (1).

La plupart des formules usuelles de dérivation et d'intégration numérique ont le reste de la forme (2) et même de la forme simple (1).

Il est clair qu'une étude approfondie du calcul des différences divisées a été nécessaire et a été élaborée dans plusieurs travaux en partant de certains résultats antérieurs [17, 25]. Les formules générales de la moyenne [20] ont ici une importance toute particulière.

J'ai complété ces résultats et les ai généralisés en remplaçant la base 1, $x, \dots, x^{n+1}$ par une suite de fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ vérifiant certaines propriétés interpolatoires [22].

On a généralisé la forme simple (1) de $A[f]$ en introduisant la notion de convexité par rapport à un ensemble interpolatoire de fonctions [9]. Un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$ est interpolatoire d'ordre n si pour toute $f: [a, b] \rightarrow R$ et tout groupe de n points distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $[a, b]$, il existe un élément de $\mathcal{F}$ et un seul, prenant les mêmes valeurs que f sur les points x_i . Nous pouvons désigner par $L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \dots, x_n; f|x)$ cet élément de $\mathcal{F}$.

La convexité par rapport à l'ensemble $\mathcal{F}$ s'introduit par la conservation du signe de la différence

$$(3) \quad f(x_{n+1}) - L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \dots, x_n; f|x_{n+1}),$$

où $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$. On introduit les fonctions $\mathcal{F}$ -convexes, respectivement $\mathcal{F}$ -concaves, suivant que la différence (3) reste positive, respectivement négative.

Soit alors $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ des ensembles de fonctions continues sur $[a, b]$, interpolatoires d'ordre n , respectivement $n+1$ et $U[f]$ une fonctionnelle (non pas nécessairement linéaire) définie sur un ensemble linéaire de fonctions continues de $[a, b]$, contenant $\mathcal{F}_{n+1}$ et qui vérifie les conditions

$$1^\circ. U[f] = 0 \text{ pour } f \in \mathcal{F}_n$$

$$2^\circ. U[f] \neq 0 \text{ pour toute } f \text{ qui est } \mathcal{F}_n\text{-convexe ou } \mathcal{F}_n\text{-concave, alors si } U[g] = 0 \text{ il existe } n+1 \text{ points distincts } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1} \text{ de } [a, b] \text{ tels que}$$

$$U[L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}; g|x)] = 0$$

C'est un théorème de la moyenne très général. Les résultats précédents s'appliquent en particulier aux fonctions convexes par rapport à l'ensemble des intégrales d'une équation différentielle de la forme

$$(4) \quad y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

sous certaines conditions.

On a élaboré une théorie comparative des ensembles interpolatoires et on a précisé le comportement de l'élément de meilleure approximation d'une fonction convexe par rapport à des ensembles comparables [26]. On a aussi étendu la notion de convexité aux distributions [27].

4. Il nous est impossible d'exposer dans un espace nécessairement limité les nombreux autres résultats obtenus à l'Institut de Calcul. Nous nous bornerons à de très brèves indications.

Pour l'équation (4) on a étudié la longueur maximum de l'intervalle sur lequel l'ensemble des intégrales est interpolatoire d'ordre n .

On a en particulier obtenu des résultats [1] concernant les équations linéaires à coefficients continus.

On a étudié la formule d'interpolation de Newton du point de vue de la précision du calcul numérique, dans le cas de l'application de cette formule, en donnant la justification théorique des diverses formules (de Bessel, Stirling, Gauss, etc.) employées dans la pratique [19]. On a étudié l'évaluation des erreurs qui s'accumulent, les calculs s'effectuant d'après un programme donné. On a étudié dans le même sens l'influence des erreurs commise dans le calcul approximatif de la table de différences divisées correspondantes [21]. Diverses formules d'interpolation pour les fonctions de deux et plusieurs variables ont été établies, étudiées et utilisées.

Le polynôme de S. N. Bernstein

$$(5) \quad \sum_{\alpha=0}^n f\left(\frac{\alpha}{n}\right) \binom{n}{\alpha} x^\alpha (1-x)^{n-\alpha}$$

jouit de la propriété importante de conserver toute allure de convexité de la fonction f dans l'intervalle $[0, 1]$ [16]. On a fait des recherches sur la conservation de l'allure de convexité par des polynômes d'interpolation de la même forme que (5) [23, 24, 29].

On a étudié de nouvelles formules de quadrature [3, 22] et de cubature. Elles ont été appliquées à l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires [5, 6] et des équations aux dérivées partielles du type parabolique [4].

On a effectué des recherches relatives à la résolution des équations opérationnelles dans les espaces de Banach et dans des espaces sémi-ordonnés [7].

Des conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenues afin qu'une fonction soit représentable par différentes superpositions de fonctions d'un nombre plus réduit de variables. Quelques classes d'équations fonctionnelles sous leur aspect géométrique et topologique liées à la nomographie ont été aussi étudiées [28]. Le premier traité de recherches de nomographie en roumain a été élaboré à l'Institut [2].

Les recherches portant sur la théorie générale des surfaces à développement réciproque ont comme objet d'application l'étude géométrique des engrenages [8].

On a fait des études comparatives ayant trait aux diverses méthodes de résolution des problèmes de transport [10] et on a traité des problèmes de programmation linéaire à conditions logiques [14, 15].

La majorité des résultats obtenus à l'Institut de Calcul ont été concrétisés en plus de 300 travaux originaux publiés en diverses revues de spécialité de notre pays et de l'étranger.

5. L'une des réalisations importantes de notre collectif de mathématiciens et d'ingénieurs est la mise en exploitation au cours de l'année 1964 de la machine électronique DACICC-1, construite à l'Institut sur la base d'un projet propre. Cette machine a été presque en entier construite avec des matériaux fabriqués dans notre pays. Elle est dotée d'une mémoire sur anneaux de ferrite qui assure une vitesse de 2000 opérations par seconde. C'est une machine électronique transistorisée. Cette machine occupe un espace restreint et peut fonctionner plusieurs jours de suite sans interruption, sans commettre d'erreurs de calcul et sans se détériorer. Elle est entrée en fonction en 1964 et a résolu de nombreux problèmes jusqu'à présent.

La machine DACICC-1 a été complétée par un dispositif d'enregistrement rapide. Le dispositif lit à l'aide d'un procédé photo-électrique les bandes perforées à une vitesse de 1200 caractères par seconde. Cette performance le situe parmi les appareils les plus perfectionnés du monde entier. On a également construit un dispositif d'extraction des données sur bandes perforées.

6. Dans le domaine de la théorie de la programmation aux machines électroniques de calcul, on a élaboré une méthode qui permet la programmation du produit de deux matrices [30], au cas où celles-ci ont la majorité de leurs éléments nuls, en utilisant une répartition judicieuse de la mémoire de la machine et en conservant seulement les éléments différents de zéro. On a également élaboré un algorithme de recherche automatique du dépassement de l'unité pour les machines à virgule fixe [13]. Conformément à cet algorithme la recherche peut s'effectuer d'une manière automatique, sans interrompre le travail de la machine. D'autres

résultats importants ont été obtenus dans le domaine de la programmation automatique, dans la vérification automatique des programmes et dans l'emploi des machines à la solution d'autres types de problèmes logiques [11, 12]. On a élaboré le système de programmation automatique DACICC-COD et des travaux qui fournissent de nombreuses contributions théoriques à l'élaboration et au contrôle des programmes. On a également élaboré les algorithmes de transformation des expressions algébriques rationnelles à l'aide des machines électroniques de calcul.

7. L'Institut de Calcul a toujours considéré comme un de ses devoirs fondamentaux la connexion de la théorie et de la pratique et l'orientation des recherches scientifiques dans le sens de servir l'activité productive en accordant une attention spéciale aux problèmes de calcul propres à ce domaine.

Cette orientation s'est cristallisée entre autres, par une large collaboration avec 30 entreprises et institutions de Cluj et d'autres localités du pays.

La collaboration de l'Institut de Calcul avec le secteur productif s'est concrétisée dans la période 1960-1965 par 27 conventions technico-scientifiques conclues, par plus de 30 protocoles remis aux entreprises, par 5 symposiums organisés par l'Institut concernant l'extension de la collaboration avec les unités du secteur productif de la région de Cluj, ainsi que par de nombreux déplacements dans ce secteur en vue de résoudre les problèmes le concernant.

Les résultats de cette collaboration ont été parachevés dans des protocoles dont l'efficacité économique comprend :

- 1°. La réalisation d'économies directes ;
- 2°. L'amélioration de la planification en vue de la réalisation d'économies ;
- 3°. L'amélioration de la qualité de certains produits ;
- 4°. L'allègement du travail de projet.

Nous donnons ci-dessous une liste des protocoles plus importants élaborés à l'Institut de Calcul dans l'intervalle 1960-1965 et qui ont été remis aux bénéficiaires.

Protocole concernant :

— Le calcul d'une table auxiliaire qui sera utilisée au projet des ouvertures d'éclairage.

— La construction d'une table numérique contenant la relation entre le facteur de puissance et le rapport de l'énergie respective à l'énergie active.

— La détermination de l'épaisseur de la pointe de la dent du couteau-roue et la détermination du nombre minimum de dents qu'on peut usiner, sans interférence avec le couteau-roue.

— La résolution du problème de mélange proposé par le Ministère des biens de consommation.

— Le turnus des locomotives sur le parcours Braşov—Predeal.

— Le calcul des charges les plus économiques pour des fourneaux à fondre la fonte.

— Le calcul des profils des fraises hélicoïdales pour l'usinage des roues au cliquet.

- Le calcul des constantes des réseaux cristallins à certains minerais de feldspath, mesurés par le diagramme Deby-Scherrer.
- Le calcul des charges les plus économiques aux fourneaux à fondre la fonte de la fabrique Tehnofrig Cluj dans les conditions des stocks incomplets.
- L'équilibre dynamique du compresseur 2 C_v — 4,5.
- Le calcul du profil d'une fraise hélicoïdale en vue de l'usinage par roulement de la denture à arêtes circulaires d'une roue à cliquet.
- Le calcul des roues d'échange du mécanisme différentiel d'une machine à fraiser.
- Le calcul des vérificatrices et des outils pour les pompes hélicoïdales à huile.
- L'équilibre dynamique du compresseur d'ammoniaque du type 8 A, 2U.20 à 560.000 calories.
- Le problème des codes superposés sur fiches bibliographiques.
- Le calcul géométrique du pignon planétaire et satellite du différentiel du camion Carpați SR 131, en vue de l'usinage par la méthode du brochage circulaire.
- La distribution du moteur S. R. 211 et la possibilité d'augmentation de la cronosection.
- La détermination de la durée optimale de la campagne de fabrication du sucre dans les conditions spécifiques de la République Socialiste de Roumanie.
- La résolution de certains systèmes d'équations linéaires utilisés dans la construction des silos à céréales.
- Les calculs nécessaires au plan du tracé du pont sur la rivière Someș de la localité Ilva Mică.
- L'influence de l'excentricité du piston sur la cinématique et la dynamique du mécanisme de bielle-manivelle aux moteurs à combustion interne.
- Le calcul de la variante optimale de la campagne de fabrication du sucre 1964—1965 dans les deux zones naturelles de culture de la betterave à sucre de notre pays.
- La détermination des paramètres géométriques des SDV nécessaires à l'usinage d'un outil spécial employé aux Usines Métallurgiques de Cugir.
- Le traitement mathématique de certaines mesures effectuées par l'Institut d'Hygiène de Cluj, nécessaires à l'étude de l'ionisation de l'air.
- Les calculs nécessaires à la triangulation de la ville de Cluj.
- L'exécution de certains calculs statistiques pour l'Institut Médico-Pharmaceutique de Cluj.
- La résolution de certains systèmes d'équations linéaires utilisées dans la construction des toits.
- Le calcul des spectres linéaires d'action sismique.
- Le calcul des coefficients de corrélation linéaire des données obtenues à la suite des expériences effectuées en l'année 1964—1965 par la Station Expérimentale Agricole de Turda.
- Le calcul de certains niveaux d'énergie dans les semi-conducteurs en fonction de certaines impuretés.
- Le calcul de certains paramètres des arbres et troncs cannelés.

3. Le nombre et l'importance des résultats scientifiques obtenus à l'Institut de calcul de Cluj ont rendu nécessaire l'organisation de trois colloques portant sur les domaines de recherche de l'Institut. Le premier colloque organisé par l'Institut de calcul intitulé : « Colloque d'analyse numérique » a eu lieu entre 8—14 décembre 1960 et a été pourvu de 5 sections de communications. Le second colloque intitulé « Colloque portant sur l'approximation des fonctions avec applications au calcul numérique » a eu lieu entre 15—19 novembre 1963 avec les sections suivantes :

- 1°. Théorie constructive des fonctions.
- 2°. Analyse numérique.
- 3°. Applications des mathématiques à l'économie.

Six rapports de l'Institut de Calcul y ont été présentés de même que 10 conférences générales et près de 100 communications.

Entre 1—3 juillet 1965 l'Institut de Calcul en collaboration avec la Société de Sciences mathématiques de la République Socialiste de Roumanie a organisé le colloque intitulé : « La théorie des fonctions convexes avec applications au calcul numérique » avec les sections suivantes :

- 1°. Fonctions convexes et procédés d'approximation de l'analyse.
- 2°. Analyse numérique.

3°. Machines à calculer et applications des mathématiques à l'économie.

Le but principal de ce colloque a consisté à débattre certains problèmes fondamentaux de la théorie de l'approximation des fonctions qui se sont présentés dans les dernières années, dans les conditions de l'emploi des machines rapides de calcul.

Dans le cadre des séances plénières 16 conférences ont été présentées, dont 7 rapports de l'Institut de Calcul. Dans les séances de communications, 139 communications et conférences ont été présentées, dont à peu près la moitié élaborées par les mathématiciens de Cluj.

A ces trois colloques ont participé de nombreux hommes de science du pays, académiciens, cadres didactiques de l'Enseignement supérieur, chercheurs des instituts de recherches de l'Académie, ingénieurs, etc. Une large participation internationale a également été enregistrée. Ainsi, par exemple, au dernier colloque ont pris part 23 mathématiciens étrangers, personnalités d'un prestige international. Les mathématiciens étrangers qui ont participé à ces colloques ont hautement apprécié les travaux présentés et ont exprimé le désir de consolider les liens de collaboration avec notre pays et particulièrement avec les chercheurs de l'Institut de Calcul de Cluj.

Reçu le 3 juin 1966

Institut de Calcul de l'Académie
de la République Socialiste de Roumanie, Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. ARAMĂ O., RÎPIANU D., *Asupra problemei polilocale pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți*, St. cerc. mat., Cluj, 1957, VIII, 37—74; 211—265.
2. BAL LASCU, RADÓ FRANCISC, *Leții de nomografie*, 1956, 180 p.
3. IONESCU D. V., *Cuadraturi numerice*, 1957, 340 p.

4. IONESCU D. V., *Formules de cubature : application à l'intégration numérique des équations aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique*. Mathematica, 1959, **1**, (24), 239–280.
5. — *Restul în formulele de integrare numerică a lui Nyström*, St. Cercet. Mat., Cluj, 1963, **XIV**, 43–48.
6. — *Restul în formulele de integrare numerică a lui Störmer*, *ibid.*, 1963, **XIV**, 49–56.
7. JANKO B., *Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare*. 1961.
8. MAROȘ D., *Cinematica roților dințate*. 1958, 327 p.
9. MOLDOVAN E., *Sur une généralisation des fonctions convexes*. Mathematica, 1959, **1**, (24), 49–80.
10. — *Asupra problemei transporturilor*. St. Cercet. Mat., Cluj, 1960, **XI**, fasc. anexă, 117–124.
11. MUNTEANU E., *Metod analiza graf-schemnith algorifmov*. Mathematica, 1963, **5**, (28), 247–260.
12. — *Анализ граф-схемных алгоритмов*. Leningrad, 1964.
13. MUNTEANU E., RUS T., *Corectarea automată a depășirii unității într-o mașină cu virgulă fixă*, St. Cercet. Mat., Cluj, 1962, **XIII**, fasc. anexă, 149–152.
14. NÉMETI L., *Probleme de planificare a lansării fabricației cu ajutorul programării liniare cu condiții logice*. Calculul Economic, 1964, 220–230.
15. NÉMETI L., RADÓ F., *Ein Wartereitproblem in der Programmierung der Produktion*, Mathematica, 1963, **5** (28), 65–95.
16. POPOVICIU T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica, 1934, **10**, 49–54.
17. — *Introduction à la théorie des différences divisées*. Bull. math. Soc. roumaine des sciences, 1940, **42**, 65–78.
18. — *Les fonctions convexes*. Actualités Scientifiques et industrielles, 1945, 75 p.
19. — *Considerații teoretice asupra utilizării practice a unor formule de interpolare*. Buletin științific Acad. R.P.R., 1951, **III**, 441–449.
20. — *Folytonos függvények középértéktételeiről*. A Nagy. Tud. Akad. III. oszt. Közleményaiből, 1954, **IV**, 353–356.
21. — *Despre precizia calculului numeric în interpolarea prin polinoame*. Buletin științific Acad. R.P.R., 1955, **VII**, 953–961.
22. — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica, 1959, **1**, (24), 95–142.
23. — *Sur la conservation de l'allure de convexité d'une fonction par ses polynômes d'interpolation*. Mathematica, 1961, **3**, (26), 311–329.
24. — *Sur la conservation par le polynôme d'interpolation de L. Fejér, du signe ou de la monotonie de la fonction*. Analele St. Univ. Iași, série nouvelle, 1962, **VIII**, 65–84.
25. — *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Mathematica, 1934, **VIII**, 1–85.
26. POPOVICIU-MOLDOVAN E., *Introduction à l'étude comparative des ensembles de fonctions interpolatoires*. Mathematica, 1964, **6** (29), 145–155.
27. — *Sur la notion de convexité dans la théorie des distributions*. Mathematica, 1955, **7**, (30), 129–137.
28. RADÓ F., *Equations fonctionnelles caractérisant les nomogrammes avec échelles rectilignes*. Mathematica, 1959, **1**, (24), 143–166.
29. RIPIANU D., *Sur certains polynômes d'interpolation*. Mathematica, 1965, **5**, (28), 109–129.
30. RUS T., *Asupra programării la mașinile electronice de calcul a produsului a două matrici*. St. Cercet. Mat., Cluj, 1963, **XIV**, 405–416.