Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), 1967, pp. 283—295.

RESTES DES FORMULES DE QUADRATURE DE GAUSS ET DE TURÁN

Par
D. V. IONESCU (Cluj, Roumanie)
(*Présenté par* P. TURÁN)

P. TURÁN [3] a donné une belle extension de la formule de quadrature de Gauss en démontrant qu'on peut déterminer les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ et les coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$; $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$; $C''_1, C''_2, \dots, C''_n$ de telle manière que la formule

$$\begin{aligned}(1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = {} & C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n) + \\ & + C'_1 f'(x_1) + C'_2 f'(x_2) + \dots + C'_n f'(x_n) + \\ & + C''_1 f''(x_1) + C''_2 f''(x_2) + \dots + C''_n f''(x_n)\end{aligned}$$

soit vérifiée par un polynome quelconque du $(4n-1)$-ième degré.

Cette question est liée à un problème de minimum.

D. JACKSON [2] a démontré qu'on peut déterminer un polynome

$$(2)\qquad \omega_n(x) = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \lambda_2 x^{n-2} + \dots + \lambda_n$$

qui rend minimum l'intégrale

$$(3)\qquad \int_a^b \omega^4(x)\,dx.$$

Le polynome $\omega_n(x)$ est déterminé d'une manière unique par les équations

$$(4)\qquad \int_a^b x^h \omega_n^3(x)\,dx = 0$$

où $h=0, 1, \dots, n-1$ et l'on prouve que les zéros du polynome $\omega_n(x)$ sont réels, distincts et compris entre a et b.

Dans la formule (1) les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros du polynome $\omega_n(x)$ et les coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$; $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$; $C''_1, C''_2, \dots, C''_n$ se calculent sans difficulté.

Dans ce travail nous considérons la formule de quadrature de P. Turán avec le reste, c'est-à-dire la formule

$$\begin{aligned}(5)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = {} & C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n) + \\ & + C'_1 f'(x_1) + C'_2 f'(x_2) + \dots + C'_n f'(x_n) + \\ & + C''_1 f''(x_1) + C''_2 f''(x_2) + \dots + C''_n f''(x_n) + R,\end{aligned}$$

et en supposant que $f \in C^{4n}[a, b]$, nous allons déterminer le reste R, en le mettant sous la forme d'une intégrale définie.

Nous montrerons que le reste R s'obtiendra, d'une manière très simple, comme la représentation de la différence divisée d'une fonction par une intégrale définie.

Le problème du reste de la formule (5) étant une extension du problème du reste de la formule de quadrature de Gauss, dans le second paragraphe de ce travail nous donnons une méthode pour établir le reste de la formule de Gauss comme la représentation de la différence divisée d'une fonction par une intégrale définie. Ensuite dans le troisième paragraphe nous donnons une extension de cette méthode pour obtenir le reste de la formule de Turán.

Mais ce travail débute par quelques considérations sur la représentation des différences divisées d'une fonction par une intégrale définie, qui seront utiles pour exprimer les restes des formules de quadrature de Gauss et de Turán.

§ 1. La représentation des différences divisées par des intégrales définies

La représentation des différences divisées par des intégrales définies, dans le cas des noeuds simples et aussi dans le cas des noeuds multiples, a été donnée pour la première fois, par L. TCHAKALOFF [4], et a été retrouvée par moi-même dans le travail [1]. Nous exposons dans ce paragraphe cette représentation dans les cas des différences divisées

(6) $$[a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b; f]$$

et

(7) $$[a, x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x_n, x_n, b; f]$$

nécessaires pour établir les restes des formules de quadrature de Gauss et de Turán. Nous supposons que les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont choisis de manière que $a < x_1 < < x_2 < \ldots < x_n < b$.

1. Pour une fonction $f \in C^{2n+1}[a, b]$, on peut représenter la difference divisée (6), par une intégrale définie, de la manière suivante:

Associons aux intervalles $[a, x_1,], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \ldots, \varphi_{n+1}$ solutions des équations différentielles

(8) $$\varphi_1^{(2n+1)} = 0, \quad \varphi_2^{(2n+1)} = 0, \ldots, \quad \varphi_{n+1}^{(2n+1)} = 0,$$

On a alors

$$\int_a^{x_1} \varphi_1^{(2n+1)} f\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^{(2n+1)} f\,dx = \ldots = \int_{x_n}^{b} \varphi_{n+1}^{(2n+1)} f\,dx = 0.$$

En appliquant à chaque intégrale la formule généralisée d'intégration par parties, on obtient

(9) $$[\varphi_1^{(2n)} f - \varphi_1^{(2n-1)} f' + \ldots + (-1)^{2n} \varphi_1 f^{(2n)}]_a^{x_1} = \int_a^{x_1} \varphi_1 f^{(2n+1)}\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Introduisons des conditions aux limites

(10)
$$\begin{aligned}
&\varphi_1(a)=0, && \varphi_1'(a)=0, && \dots, && \varphi_1^{(2n-2)}(a)=0, \quad \varphi_1^{(2n-1)}(a)=0,\\
&\varphi_2(x_1)=\varphi_1(x_1), && \varphi_2'(x_1)=\varphi_1'(x_1), && \dots, && \varphi_2^{(2n-2)}(x_1)=\varphi_1^{(2n-2)}(x_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_{n+1}(x_n)=\varphi_n(x_n), && \varphi_{n+1}'(x_n)=\varphi_n'(x_n), && \dots, && \varphi_{n+1}^{(2n-2)}(x_n)=\varphi_n^{(2n-2)}(x_n),\\
&\varphi_{n+1}(b)=0, && \varphi_{n+1}'(b)=0, && \dots, && \varphi_{n+1}^{(2n-2)}(b)=0, \quad \varphi_{n+1}^{(2n-1)}(b)=0
\end{aligned}$$

et supposons que le système d'équations (8) ait une solution avec les conditions (10). Dans ce cas, en ajoutant membre à membre les équations (9), on obtient

(11)
$$\begin{aligned}
-\varphi_1^{(2n)}(a)f(a)+[\varphi_1^{(2n)}(x_1)-\varphi_2^{(2n)}(x_1)]f(x_1)+\dots+[\varphi_n^{(2n)}(x_n)-\varphi_{n+1}^{(2n)}(x_n)]f(x_n)+\\
+\varphi_{n+1}^{(2n)}(b)f(b)+[\varphi_2^{(2n-1)}(x_1)-\varphi_1^{(2n-1)}(x_1)]f'(x_1)+\dots+\\
+[\varphi_{n+1}^{(2n-1)}(x_n)-\varphi_n^{(2n-1)}(x_n)]f'(x_n)=\int_a^b \varphi f^{(2n+1)}\,dx
\end{aligned}$$

où la fonction φ coïncide avec les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ sur les intervalles $[a, x_1], \dots, [x_n, b]$.

Nous allons démontrer que la formule (11) conduit à la représentation de la différence divisée (6) par une intégrale définie.

2. Il est évident que les fonctions

(12)
$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \lambda_0\frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!},\\
\varphi_2 &= \lambda_0\frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!}+\lambda_1\frac{(x-x_1)^{2n}}{(2n)!}+\mu_1\frac{(x-x_1)^{2n-1}}{(2n-1)!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\varphi_{n+1} &= \lambda_0\frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!}+\lambda_1\frac{(x-x_1)^{2n}}{(2n)!}+\mu_1\frac{(x-x_1)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots+\\
&\qquad+\lambda_n\frac{(x-x_n)^{2n}}{(2n)!}+\mu_n\frac{(x-x_n)^{2n-1}}{(2n-1!}
\end{aligned}$$

satisfont aux équations différentielles (8) et aux conditions aux limites relatives aux noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ quelles que soient les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

En écrivant que les conditions aux limites au point b sont également satisfaites, nous avons le système de $2n$ équations

(13)
$$\begin{aligned}
&\lambda_0(b-a)+\lambda_1(b-x_1)+\dots+\lambda_n(b_n-x_n)+[\mu_1+\dots+\mu_n]=0,\\
&\lambda_0(b-a)^2+\lambda_1(b-x_1)^2+\dots+\lambda_n(b_n-x_n)^2+2[\mu_1(b-x_1)+\dots+\\
&\qquad\qquad+\mu_n(b-x_n)]=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_0(b-a)^{2n}+\lambda_1(b-x_1)^{2n}+\dots+\lambda_n(b_n-x_n)^{2n}+2n[\mu_1(b-x_1)^{2n-1}+\dots+\\
&\qquad\qquad+\mu_n(b-x_n)^{2n-1}]=0
\end{aligned}$$

pour déterminer les $2n+1$ inconnues $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

En introduisant encore une inconnue auxiliaire λ_{n+1} par l'équation

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n+\lambda_{n+1}=0,$$

on démontre facilement que le système (13) se réduit au système de $2n+1$ équations

$$(14)\qquad \begin{array}{llll} \lambda_0 & +\lambda_1 & +\ldots+\lambda_n & +\lambda_{n+1} =0, \\ \lambda_0 a & +\lambda_1 x_1-\mu_1 & +\ldots+\lambda_n x_n-\mu_n & +\lambda_{n+1} b =0, \\ \lambda_0 a^2 & +\lambda_1 x_1^2-2\mu_1 x_1 & +\ldots+\lambda_n x_n^2-2\mu_n x_n & +\lambda_{n+1} b^2 =0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_0 a^{2n} & +\lambda_1 x_1^{2n}-2n\mu_1 x_1^{2n-1} & +\ldots+\lambda_n x_n^{2n}-2n\mu_n x_n^{2n-1} & +\lambda_{n+1} b^{2n}=0. \end{array}$$

La matrice des coefficients de ce système en $\lambda_0, \lambda_1, -\mu_1, \ldots, \lambda_n, -\mu_n, \lambda_{n+1}$ est du rang $2n+1$. En désignant par $D_0, D_1, D_1', \ldots, D_n, D_n', D_{n+1}$ les déterminants des matrices qu'on obtient de la matrice du système (14) en supprimant la première colonne, la seconde colonne, ..., la dernière colonne, nous avons

$$(15)\qquad \frac{\lambda_0}{D_0}=\frac{\lambda_1}{-D_1}=\frac{-\mu_1}{D_1'}=\frac{\lambda_2}{-D_2}=\frac{-\mu_2}{D_2'}=\ldots=\frac{\lambda_n}{-D_n}=\frac{-\mu_n}{D_n'}=\frac{\lambda_{n+1}}{D_{n+1}}=H,$$

où H est encore une constante quelconque.

Les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant déterminées, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ sont parfaitement déterminées et, par suite, la formule (11) est valable. Il nous reste à lui donner sa forme définitive.

Nous avons

$$(16)\qquad \begin{array}{ll} \varphi_1^{(2n)}=\lambda_0, & \varphi_1^{(2n-1)}=\lambda_0(x-a), \\ \varphi_2^{(2n)}=\lambda_0+\lambda_1, & \varphi_2^{(2n-1)}=\lambda_0(x-a)+\lambda_1(x-x_1)+\mu_1, \\ \ldots & \ldots \\ \varphi_{n+1}^{(2n)}=\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n, & \varphi_{n+1}^{(2n-1)}=\lambda_0(x-a)+\lambda_1(x-x_1)+\mu_1+ \\ & \qquad +\ldots+\lambda_n(x-x_n)+\mu_n \end{array}$$

et la formule (11) devient

$$(17)\qquad -\lambda_0 f(a)-\lambda_1 f(x_1)-\ldots-\lambda_n f(x_n)-\lambda_{n+1} f(b)+\mu_1 f'(x_1)+\ldots+\mu_n f'(x_n)= \\ =\int_a^b \varphi f^{(2n+1)}\,dx.$$

En remplaçant les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, \mu_1, \ldots, \mu_n$ de la formule (17) par leur expressions déduites des formules (15), on voit que la formule (17) se réduit à

$$(18)\qquad H\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ a & x_1 & 1 & \ldots & x_n & 1 & b \\ a^2 & x_1^2 & 2x_1 & \ldots & x_n^2 & 2x_n & b^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{2n} & x_1^{2n} & 2nx_1^{2n-1} & \ldots & x_n^{2n} & 2nx_n^{2n-1} & b^{2n} \\ f(a) & f(x_1) & f'(x_1) & \ldots & f(x_n) & f'(x_n) & f(b) \end{vmatrix}.$$

On sait que la différence divisée (6) est définie par la formule

$$[a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b; f] = V^{-1} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \ldots & a^{2n} & f(a) \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{2n} & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 \ldots & 2nx_1^{2n-1} & f'(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b^2 \ldots & b^{2n} & f(b) \end{vmatrix}$$

où

$$V = V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \ldots & a^{2n} & a^{2n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{2n} & x_1^{2n+1} \\ 0 & 1 & 2x_1 \ldots & 2nx_1^{2n-1} & (2n+1)x_1^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b^2 \ldots & b^{2n} & b^{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Alors, en choisissant

(19) $$H = 1/V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b),$$

le premier membre de la formule (18) se réduit à la différence divisée (6) et, par suite, nous avons le

THÉORÈME 1. *Lorsque* $f \in C^{2n+1}[a, b]$, *on a la représentation*

(20) $$[a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b; f] = \int_a^b \varphi f^{(2n+1)}\, dx,$$

où la fonction φ *est déterminée par les équations différentielles* (8), *par les conditions aux limites* (10) *et par la formule* (19).

3. Nous avons obtenu plusieurs théorèmes concernant la formule (17) et la fonction φ.

THÉORÈME 2. *On a*

(21) $$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_r \neq 0$$

pour $r = 0, 1, \ldots, n$.

Pour $r=0$ le théorème est évident, parce que, d'après les formules (15) et (19), nous avons

$$\lambda_0 = HD_0 = \frac{V(x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b)}{V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b)} \neq 0.$$

Le théorème est encore évident pour $r=n$ parce que, d'après la première équation (14) et les formules (15), (19), nous avons

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = -\lambda_{n+1} = -HD_{n+1} = -\frac{V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n)}{V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b)} \neq 0.$$

Il nous reste à démontrer le théorème pour $r=1, 2, \ldots, n-1$. Dans ce but introduisons le polynome d'interpolation $h(x; r)=h(x)$ déterminé par les conditions

$$h(a)=1,\ h(x_1)=1,\ \ldots,\ h(x_r)=1,\ h(x_{r+1})=0,\ \ldots,\ h(x_n)=0,$$
$$h'(x_1)=0,\ \ldots,\ h'(x_r)=0,\ h'(x_{r+1})=0,\ \ldots,\ h'(x_n)=0.$$

On voit facilement par le théorème de Rolle que la dérivée $h'(x)$ a $n-1$ zéros réels et distincts dans les intervalles $(a, x_1), \ldots, (x_{r-1}, x_r)$, $(x_{r+1}, x_{r+2}), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ et qu'elle a aussi les zéros $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$. Donc $h'(x)$ a $2n-1$ zéros réels et distincts. En tenant compte du fait que $h(a)=1$, $h(x_n)=0$, on conclue que *le polynome $h(x)$ est effectivement du degré $2n$*. Il résulte de ce fait que $h(b)\neq 0$. En remplaçant dans la formule (17) la fonction f par le polynome h, nous déduisons que

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_r = -\lambda_{n+1}h(b)\neq 0$$

et, par suite, le théorème 2 est démontré.

THÉORÈME 3. *La dérivée $\varphi^{(2n-2)}$ a $2(n-1)$ zéros au plus sur l'intervalle (a, b).*

En effet, d'après les formules (12) et les conditions aux limites (10) au point b, les dérivées $\varphi_1^{(2n-2)}$, $\varphi_{n+1}^{(2n-2)}$ n'ont pas de zéros sur les intervalles $(a, x_1]$, $[x_n, b)$. D'autre part les dérivées $\varphi_2^{(2n-2)}, \ldots, \varphi_n^{(2n-2)}$ sont des polynomes du second degré dont les coefficients de x^2 sont $\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1), \ldots, \frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n)$ et, d'après le théorème 2, ils sont différents de zéro. Il en résulte que $\varphi^{(2n-2)}$ a 2 zéros au plus sur l'intervalle $(x_1, x_2], \ldots, \varphi_n^{(2n-2)}$ a 2 zéros au plus sur l'intervalle (x_{n-1}, x_n) et, par suite, la dérivée $\varphi^{(2n-2)}$ a $2(n-1)$ zéros au plus sur l'intervalle (a, b).

THÉORÈME 4. *La fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b).*

Pour démontrer ce théorème, supposons le contraire, ce qui veut dire que φ s'annule en un point ζ au moins de l'intervalle (a, b). La fonction φ ainsi que ses dérivées $\varphi', \ldots, \varphi^{(2n-2)}$ étant continues sur l'intervalle $[a, b]$ (cf. (10)), nous pouvons appliquer successivement le théorème de Rolle. Nous en tirons alors que φ' a deux zéros sur l'intervalle (a, b), ... et que $\varphi^{(2n-2)}$ a $2n-1$ zéros sur l'intervalle (a, b). Mais cela est impossible parce qu'on est en contradiction avec le théorème 3. Donc la fonction φ ne s'annule pas sur l'intervalle (a, b).

THÉORÈME 5. *On a*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{1}{(2n+1)!} \tag{22}$$

et, par suite, la fonction φ est positive sur l'intervalle (a, b).

En effet en remplacant dans la formule (20) la fonction f par x^{2n+1}, le premier membre de la formule est égal à 1, tandis que le second membre est égal à $(2n+1)!\int_a^b \varphi\,dx$. Nous obtenons ainsi la formule (22), et en tenant compte du théorème 4, nous déduisons que la fonction φ est positive sur l'intervalle (a, b).

4. Une démonstration analogue conduit à la représentation

$$(23)\qquad [a, x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x_n, x_n, b; f] = \int_a^b \varphi f^{(4n+1)}\, dx$$

lorsque $f \in C^{4n+1}[a, b]$.

On démontre aussi que la fonction φ est positive sur l'intervalle (a, b) et qu'on a

$$(24)\qquad \int_a^b \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(4n+1)!}\,.$$

§ 2. Le reste de la formule de quadrature de Gauss

5. On sait qu'on peut déterminer les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de telle manière que la formule

$$(25)\qquad \int_a^b f\, dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n)$$

soit vérifiée par un polynome quelconque du $(2n-1)$-ème degré.

Les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros du polynome de Legendre, associé à l'intervalle $[a, b]$ et l'on a les identités

$$(26)\qquad \begin{aligned} C_1 + C_2 + \ldots + C_n &= \int_a^b dx, \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n &= \int_a^b x\, dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ C_1 x_1^{2n-1} + C_2 x_2^{2n-1} + \ldots + C_n x_n^{2n-1} &= \int_a^b x^{2n-1}\, dx. \end{aligned}$$

6. Considérons la formule (20) du § 1 et remplaçons f par la fonction $g \in C^{2n+1}[a, b]$

$$(27)\qquad [a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b; g] = \int_a^b \varphi g^{(2n+1)}\, dx$$

et écrivons-la sous la forme

$$(28)\qquad A_0 g(a) + A_1 g(x_1) + \ldots + A_n g(x_n) + A_{n+1} g(b) + A_1' g'(x_1) + \ldots + A' g'(x_n) = \\ = \int_a^b \varphi g^{(2n+1)}\, dx,$$

où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont donnés notamment par les formules, avec $V = V(a, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, b)$,

$$(29)\qquad A_1 = V^{-1}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{2n} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \ldots & 2nx_1^{2n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{2n} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \ldots & 2nx_2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & b & b^2 & \ldots & b^{2n} \end{vmatrix}.$$

. . . .

Nous avons le

THÉORÈME I. *Si dans la formule* (28) *les noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sont les zéros du polynome de Legendre associé* à *l'intervalle* $[a, b]$ *les coefficients* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont nuls.*

Il suffit de faire démonstration pour le coefficient A_1.

Nous pouvons écrile le coefficient A_1, donné par la formule (29), sous la forme

$$A_1 = K_1\begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -a & 1 & \ldots & 1 & x_2 & \ldots & x_n & b \\ -a^2 & 2x_1 & \ldots & 2x_n & x_2^2 & \ldots & x_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ -a^{2n} & 2nx_1^{2n-1} & \ldots & 2nx_n^{2n-1} & x_2^{2n} & \ldots & x_n^{2n} & b^{2n} \end{vmatrix}$$

où K_1 est un certain coefficient.

On peut encore écrire A_1 sous la forme

$$A_1 = (2n)!\,K_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \int_a^b dx & 1 & \ldots & 1 & x_2 & \ldots & x_n & b \\ \int_a^b x\,dx & x_1 & \ldots & x_n & \frac{x_2^2}{2} & \ldots & \frac{x_n^2}{2} & \frac{b^2}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \int_a^b x^{2n-1}dx & x_1^{2n-1} & \ldots & x_n^{2n-1} & \frac{x_2^{2n}}{2n} & \ldots & \frac{x_n^{2n}}{2n} & \frac{b^{2n}}{2n} \end{vmatrix}$$

et il résulte immédiatement, d'après les identités (26), que $A_1 = 0$. Le théorème I est ainsi démontré.

7. Cela étant, remplaçons dans la formule (28) les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ par les zéros du polynome du Legendre associé à l'intervalle $[a, b]$ et calculons tous les coefficients A_i, A_i'. Nous avons, d'après le théorème 1,

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0.$$

En écrivant que la formule (28) est vérifiée par $g=1$, nous avons

$$A_0 + A_{n+1} = 0 \qquad (A_{n+1} \neq 0) \tag{30}$$

et, par suite, nous pouvons écrire la formule (28) sous la forme

$$A_{n+1}[g(b) - g(a)] + A_1' g'(x_1) + A_2' g'(x_2) + \dots + A_n' g'(x_n) = \int_a^b \varphi(x) g^{(2n+1)}(x)\, dx \tag{31}$$

où les coefficients A_{n+1}, A_1', A_2', ..., A_n' et la fonction $\varphi(x)$ correspond à la formule (27) relative aux zéros $x_1, x_2, \dots, x_n$ du polynome de Legendre associé à l'intervalle $[a, b]$.

En posant

$$g'(x) = f(x) \tag{32}$$

nous déduisons la formule de quadrature de Gauss

$$\int_a^b f(x)\, dx = B_1 f(x_1) + B_2 f(x_2) + \dots + B_n f(x_n) + R, \tag{33}$$

avec les coefficients

$$B_1 = -\frac{A_1'}{A_{n+1}}, \quad B_2 = -\frac{A_2'}{A_{n+1}}, \dots, \quad B_n = -\frac{A_n'}{A_{n+1}} \tag{34}$$

et avec le reste

$$R = \frac{1}{A_{n+1}} \int_a^b \varphi(x) f^{(2n)}(x)\, dx. \tag{35}$$

Ainsi nous avons obtenu le

THÉORÈME II. *La formule de quadrature de Gauss* (33) *se déduit de la formule* (27) *ou* (28), *en posant* $g'(x) = f(x)$ *et en remplacant les noeuds* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *par les zéros du polynome de Legendre associé à l'intervalle* $[a, b]$. *Son reste est donné par la formule* (35).

Il est remarquable qu'en introduisant le polynome

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \tag{36}$$

et en remplacant dans la formule (33) la fonction f par $\omega_n^2(x)$ nous avons, d'après la formule (22),

$$\frac{1}{A_{n+1}} = (2n+1)\int_a^b \omega_n^2(x)\,dx$$

et l'intégrale du second membre a une interprétation intéressante.

Si l'on envisage l'intégrale définie

$$\int_a^b \pi_n^2(x)\,dx$$

où $\pi_n(x) = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n$ est un polynome qui dépend des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, son minimum est atteint lorsque $\pi_n(x)$ est le polynome de Legendre associé à l'intervalle $[a, b]$.

§ 3. Le reste de la formule de quadrature de Turán

8. Turán a démontré qu'on peut déterminer les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les coefficients $C_1, \ldots, C_n$; $C_1', \ldots, C_n'$; $C_1'', \ldots, C_n''$ de telle manière que la formule

$$\begin{aligned}(37)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = {} & C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) + \\ & + C_1' f'(x_1) + C_2' f'(x_2) + \ldots + C_n' f'(x_n) + \\ & + C_1'' f''(x_1) + C_2'' f''(x_2) + \ldots + C_n'' f''(x_n)\end{aligned}$$

soit vérifiée par un polynome quelconque du $(4n-1)$-ème degré.

Les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros du polynome $\omega_n(x)$ qui rend minimum l'intégrale définie (3), et l'on a les identités

$$\begin{aligned}(38)\qquad & \int_a^b dx = C_1 + C_2 + \ldots + C_n, \\ & \int_a^b x\,dx = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n + C_1'(x_1)' + C_2'(x_2)' + \ldots + C_n'(x_n)', \\ & \int_a^b x^2\,dx = C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + \ldots + C_n x_n^2 + C_1'(x_1^2)' + C_2'(x_2^2)' + \ldots + C_n'(x_n^2)' + \\ & \qquad + C_1''(x_1^2)'' + C_2''(x_2^2)'' + \ldots + C_n''(x_n^2)'', \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \int_a^b x^{4n-1}\,dx = C_1 x_1^{4n-1} + C_2 x_2^{4n-1} + \ldots + C_n x_n^{4n-1} + C_1'(x_1^{4n-1})' + C_2'(x_2^{4n-1})' + \\ & \qquad + \ldots + C_n'(x_n^{4n-1})' + C_1''(x_1^{4n-1})'' + C_2''(x_2^{4n-1})'' + \ldots + C_n''(x_n^{4n-1})''.\end{aligned}$$

9. Considérons la formule (23) du § 1, pour la fonction $g\in C^{4n+1}[a, b]$,

$$[a, x_1, x_1, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x_n, x_n, b; g] = \int_a^b \varphi g^{(4n+1)}\,dx \tag{39}$$

et écrivons-la sous la forme

$$\begin{aligned} A_0 g(a)+A_1 g(x_1)+A_2 g(x_2)+\dots+A_n g(x_n)+A_{n+1}+g(b)+ \\ +A_1' g'(x_1)+A_2' g'(x_2)+\dots+A_n' g'(x_n)+ \\ +A_1'' g''(x_1)+A_2'' g''(x_2)+\dots+A_n'' g''(x_n)+ \\ +A_1''' g'''(x_1)+A_2''' g'''(x_2)+\dots+A_n''' g'''(x_n) = \int_a^b \varphi g^{(4n+1)}\,dx \end{aligned} \tag{40}$$

où les coefficients $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$; $A_1', \dots, A_n'$; $A_1'', \dots, A_n''$; $A_1''', \dots, A_n'''$ sont tous bien déterminés. En particulier les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont donnés par les formules

$$A_1 = V^{-1}(a, x_1, x_1, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x_n, x_n, b)\cdot \tag{41}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^{4n} \\ 0 & (x_1)' & (x_1^2)' & (x_1^3)' & \dots & (x_1^{4n})' \\ 0 & 0 & (x_1^2)'' & (x_1^3)'' & \dots & (x_1^{4n})'' \\ 0 & 0 & 0 & (x_1^3)''' & \dots & (x_1^{4n})''' \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b^2 & b^3 & \dots & b^{4n} \end{vmatrix}.$$

THÉORÈME III. *Si dans la formule* (40) *on remplace les noeuds* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *par les zéros du polynome* $\omega_n(x)$ *qui rend minimum l'intégrale* (3) *et qui est déterminée d'une manière unique par les équations* (4), *alors les coefficients* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *sont nuls.*

Il suffit de faire la démonstration pour le coefficient A_1. D'après la formule (41), nous pouvons écrire le coefficient A_1 sous la forme

$$A_1 = K\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -a & (x_1)' & \dots & (x_n)' & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & x_2 & \dots & x_n & b \\ -a^2 & (x_1^2)' & \dots & (x_n^2)' & (x_1^2)'' & \dots & (x_n^2)'' & 0 & \dots & 0 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & b^2 \\ -a^3 & (x_1^3)' & \dots & (x_n^3)' & (x_1^3)'' & \dots & (x_n^3)'' & (x_1^3)''' & \dots & (x_n^3)''' & x_2^3 & \dots & x_n^3 & b^3 \\ -a^4 & (x_1^4)' & \dots & (x_n^4)' & (x_1^4)'' & \dots & (x_n^4)'' & (x_1^4)''' & \dots & (x_n^4)''' & x_2^4 & \dots & x_n^4 & b^4 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a^{4n} & (x_1^{4n})' & \dots & (x_n^{4n})' & (x_1^{4n})'' & \dots & (x_n^{4n})'' & (x_1^{4n})''' & \dots & (x_n^{4n})''' & x_2^{4n} & \dots & x_n^{4n} & b^{4n} \end{vmatrix}$$

où K est une certaine constante. On peut encore écrire ce coefficient sous la forme

$$A_1 = (4n)!\,K\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \ldots & 1 & 1 \\ \int_a^b dx & 1 & \ldots 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 & x_2 \ldots & x_n & b \\ \int_a^b x\,dx & x_1 & \ldots x_n & (x_1)' & \ldots (x_n)' & 0 & \ldots 0 & \frac{x_2^2}{2} \ldots & \frac{x_n^2}{2} & \frac{b^2}{2} \\ \int_a^b x^2\,dx & x_1^2 & \ldots x_n^2 & (x_1^2)' & \ldots (x_n^2)' & (x_1^2)'' & \ldots (x_n^2)'' & \frac{x_2^3}{3} \ldots & \frac{x_n^3}{3} & \frac{b^3}{3} \\ \int_a^b x^3\,dx & x_1^3 & \ldots x_n^3 & (x_1^3)' & \ldots (x_n^3)' & (x_1^3)'' & \ldots (x_n^3)'' & \frac{x_2^4}{4} \ldots & \frac{x_n^4}{4} & \frac{b^4}{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int_a^b x^{4n-1}\,dx & x_1^{4n-1} & \ldots x_n^{4n-1} & (x_1^{4n-1})' & \ldots (x_n^{4n-1})' & (x_1^{4n-1})'' & \ldots (x_n^{4n-1})'' & \frac{x_2^{4n}}{4n} \ldots & \frac{x_n^{4n}}{4n} & \frac{b^{4n}}{4n} \end{vmatrix}$$

et l'on voit immédiatement, d'après les identités (38), que $A_1 = 0$.

Le théorème III est démontré.

10. Cela étant, remplaçons dans la formule (40) les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les zéros du polynome $\omega_n(x)$ qui rend minimum l'intégrale (3), et calculons tous les coefficients A_i, A_i', A_i'', A_i'''. Nous avons, d'après le théorème III,

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$$

et la formule (40) étant vérifiée par $g(x) = 1$, nous avons de plus

$$A_0 + A_{n+1} = 0 \qquad (A_{n+1} \neq 0).$$

La formule (40), dans laquelle nous posons $g'(x) = f(x)$, devient la formule de Turán, avec son reste

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx = {} & C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n) + \\ & + C_1' f'(x_1) + C_2' f'(x_2) + \ldots + C_n' f'(x_n) + \\ & + C_1'' f''(x_1) + C_2'' f''(x_2) + \ldots + C_n'' f''(x_n) + R \end{aligned} \tag{42}$$

où

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{A_1'}{A_{n+1}}, & C_2 &= -\frac{A_2'}{A_{n+1}}, & \ldots, \quad C_n &= -\frac{A_n'}{A_{n+1}}, \\ C_1' &= -\frac{A_1''}{A_{n+1}}, & C_2' &= -\frac{A_2''}{A_{n+1}}, & \ldots, \quad C_n &= -\frac{A_n''}{A_{n+1}}, \\ C_1'' &= -\frac{A_1'''}{A_{n+1}}, & C_2'' &= -\frac{A_2'''}{A_{n+1}}, & \ldots, \quad C_n'' &= -\frac{A_n'''}{A_{n+1}} \end{aligned} \tag{43}$$

et

$$R = \frac{1}{A_{n+1}} \int_a^b \varphi(x) f^{(4n)}(x)\, dx. \tag{44}$$

Ainsi nous avons le

THÉORÈME IV. *La formule de quadrature de Turán* (42) *se déduit de la formule* (39) *ou* (40) *en posant* $g'(x)=f(x)$ *et en remplaçant les noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par les zéros du polynome* $\omega_n(x)$ *qui rend minimum l'intégrale définie* (3). *Son reste est donné par la formule* (44).

Il est intéressant de donner la signification du coefficient $1/A_{n+1}$ de l'intégrale intervenant dans la formule (44) donnant le reste de la formule de Turán. On peut écrire

$$\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

et en posant dans la formule (42) $f=\omega_n^4(x)$, nous aurons, d'après la formule (24),

$$\frac{1}{A_{n+1}} = (4n+1) \int_a^b \omega_n^4(x)\, dx. \tag{45}$$

Ainsi le facteur $1/A_{n+1}$ diffère par le facteur $4n+1$ du minimum de l'intégrale (3) donné par le polynome dont les coefficients sont déterminés d'une manière unique par les équations (4).

11. Il va de soi que les considérations précédentes s'appliquent pour déterminer les restes de toutes les formules de Turán:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{2K} C_i^{(h)} f^{(h)}(x_i) + R,$$

où $K=2, 3, \ldots$.

Nous étudierons dans un autre travail, certaines extensions de la formule de Turán.

Les résultats de ce travail ont été communiqués au „Colloque sur la théorie des fonctions convexes avec des applications au calcul numérique", organisé par l'Institut de Calcul de l'Acad. de la R. S. România, Cluj 1—5 Juillet 1965.

(Reçu le 21 juin 1966.)

Bibliographie

[1] D. V. IONESCU, *Quadraturi numerice*, (Bucuresti Editura Technica, 1957).

[2] D. JACKSON, On functions of closest approximation, *Transaction of the American Math. Society*, **22** (1921), p. 117—128.

[3] P. TURÁN, On the theory of the mechanical quadrature, *Acta Sci. Math. Szeged*, **XII** (1950), p. 30—37.

[4] L. TCHAKALOFF, Über eine Darstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendung, Congrès International des Mathématiciens, Oslo (1936).