

ÜBER EINEN SATZ VON FENCHEL

von

HORST KRAMER

in Cluj

In der vorliegenden Arbeit geben wir einen Beweis für den Satz von Fenchel bezüglich der kleinsten konvexen Hülle einer gegebenen kompakten zusammenhängenden Menge in einem Euklidischen Raum. Derselbe Beweis gilt auch für eine Verallgemeinerung des Satzes von Fenchel. Während dem Beweis benützen wir folgenden Satz von CARATHEODORY [1]:

SATZ 1. M sei eine kompakte Punktmenge des n -dimensionalen Euklidischen Raumes E_n und p ein Punkt der kleinsten konvexen Hülle von M . Dann gibt es $n + 1$ Punkte in M so dass der Punkt p dem Simplex mit den Ecken in den $n + 1$ Punkten angehört.

W. FENCHEL [2] hat folgenden Satz bewiesen:

SATZ 2. M sei eine kompakte zusammenhängende Punktmenge des 3-dimensionalen Raumes E_3 und p ein Punkt, der ihrer kleinsten konvexen Hülle angehört. Dann gibt es mindestens einen ebenen Schnitt von M , dessen kleinster konvexer Hülle p angehört.

Aus Satz 1. und Satz 2 folgt sofort:

SATZ 3. M sei eine kompakte zusammenhängende Punktmenge des 3-dimensionalen Raumes E_3 , und p ein Punkt der kleinsten konvexen Hülle von M . Dann gibt es 3 Punkte in M so dass p dem von den 3 Punkten bestimmten Dreieck angehört (d.h. der Punkt p gehört zu der kleinsten konvexen Hülle der 3 Punkte).

Man sieht sofort dass falls man zuerst den Satz 3 bewiesen hätte, der Satz 2 eine direkte Folge davon sein würde, da die 3 Punkte den ebenen

Schnitt bestimmen. Es wird nun ein etwas einfacherer Beweis für den Satz von Fenchel gegeben und zwar im Falle eines n -dimensionalen Raumes E_n .

SATZ 4. *M sei eine kompakte zusammenhängende Punktmenge des n -dimensionalen Raumes E_n und p ein Punkt der kleinsten konvexen Hülle von M . Dann gibt es n Punkte in M so dass p der kleinsten konvexen Hülle dieser n Punkte angehört.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an, d.h. es gibt keine n Punkte in M so dass p ihrer kleinsten konvexen Hülle angehört.

Da der Punkt p der kleinsten konvexen Hülle von M angehört folgt auf Grund des Satzes von Caratheodory, dass es $n + 1$ Punkte

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1},$$

von M gibt so dass p dem von ihnen bestimmten Simplex angehört.

Die Menge M wird auf folgende Weise in die zwei Mengen M_1 und M_2 zerlegt: Ein Punkt x der Menge M gehört zu der Menge M_1 falls der Punkt p der kleinsten konvexen Hülle der Punkte $x, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ angehört. Ein Punkt x der Menge M gehört zu der Menge M_2 falls der Punkt p nicht der kleinsten konvexen Hülle der Punkte $x, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ angehört.

Es folgt sofort dass $M = M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. M_1 und M_2 sind nichtleere Mengen, da z.B. $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$.

Wir beweisen nun dass:

$$(\bar{M}_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap \bar{M}_2) = \emptyset$$

wobei wir unter $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A verstehen.

Es sei x ein Punkt der Menge M_2 . Dann folgt aus der Definition der Menge M_2 dass der Punkt p nicht der kleinsten konvexen Hülle der Punkte $x, x_2, \dots, x_{n+1}$ angehört. Die kleinste konvexe Hülle dieser $n + 1$ Punkte ist aber der von ihnen bestimmte Simplex. Dann gibt es aber ein genügend kleines positives ϵ , so dass für ein beliebiges y aus der Kugel $S(x, \epsilon)$ mit dem Mittelpunkt in x und von Radius ϵ folgt, dass p nicht der kleinsten konvexen Hülle der Punkte $y, x_2, \dots, x_{n+1}$ angehört; d.h. aber dass x kein Häufungspunkt der Menge M_1 ist, also $x \notin \bar{M}_1$. Somit folgt dass $\bar{M}_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Es sei nun x ein Punkt der Menge M_1 . Aus $x \in M_1$ und auf Grund der Voraussetzung des Beweises dass es keine n Punkte der Menge M gibt, so dass p ihrer kleinsten konvexen Hülle angehört, folgt dass der Punkt p dem Inneren des von den Punkten $x, x_2, \dots, x_{n+1}$ bestimmten Simplex angehört. Dann gibt es aber ein genügend kleines positives ϵ so dass für ein jedes y aus $S(x, \epsilon)$ (der Kugel mit dem Mittelpunkt x und vom Radius ϵ) folgt, dass p der kleinsten konvexen Hülle der Punkte $y, x_2, \dots, x_{n+1}$

angehört. Daraus folgt aber $x \notin \bar{M}_2$, somit haben wir $M_1 \cap \bar{M}_2 = \emptyset$. Dann ist aber auch

$$(\bar{M}_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap \bar{M}_2) = \emptyset.$$

Somit sind wir zu einem Widerspruch gelangt, da ja die Menge M zusammenhängend vorausgesetzt wurde, und der Satz 4 ist also bewiesen.

SATZ 5. *M sei eine Punktmenge des n -dimensionalen Euklidischen Raumes E_n und p ein Punkt, der der kleinsten konvexen Hülle von n Komponenten von M angehört. Dann gibt es n Punkte in M , so dass der Punkt p der kleinsten konvexen Hülle dieser n Punkte angehört.*

Beweis. $K_1, K_2, \dots, K_n$ seien die n Komponenten, deren kleinster konvexer Hülle p angehört. Auf Grund des Satzes von Caratheodory gibt es $n + 1$ Punkte $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ der Vereinigungsmenge der n Komponenten, so dass p dem von diesen $n + 1$ Punkten bestimmten Simplex angehört. Da wir $n + 1$ Punkte aber nur n Komponenten haben, folgt es dass es wenigstens 2 Punkte gibt, seien sie x_1, x_2 , die derselben Komponenten angehören. Es sei K_1 diese Komponente.

Wir nehmen an es gebe keine n Punkte der Menge M , so dass p zu der kleinsten konvexen Hülle dieser n Punkte gehört.

Dann zerlegen wir die Komponente K_1 folgendermassen in 2 Mengen K'_1 und K''_1 . Ein Punkt x der Komponente K_1 gehöre zu K'_1 , wenn p der kleinsten konvexen Hülle der Punkte $x, x_2, \dots, x_{n+1}$ angehört, und x gehöre zu K''_1 falls p ihr nicht angehört. Man bemerkt sofort dass $x_1 \in K'_1$ und $x_2 \in K''_1$. Weiter verläuft der Beweis dieses Satzes ebenso wie der des Satzes 4.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Caratheodory C., Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven Harmonischen Funktionen. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 32, 193 (1911).
- [2] Fenchel W., Über die Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. Mathematische Annalen, 101, 238–252 (1929).

Eingegangen am 7. IV. 1967.