

In diesem Fall besitzt also das Problem P eine uneigentliche Lösung [4], deren Grenzwert (wenn die $\varepsilon_{k,n}$ gegen Null konvergieren) gleich der Lösung des Problems $\bar{P}$ ist.

Fall 2. Das Problem $\bar{P}$ ist unverträglich. Dann hat auch P keine Lösung.

Zusammenfassend können wir folgenden Satz aussprechen:

SATZ. Die Lösungen der Probleme $\bar{P}$ und P haben untereinander folgende Verbindung:

a. Ist $\bar{P}$ verträglich und erfüllt seine Universalmindestlösung die Bedingungen von P , so ist auch letzteres verträglich und besitzt dieselbe Universalmindestlösung;

b. Ist $\bar{P}$ verträglich und verletzt seine Universalmindestlösung die Bedingungen von P auf der Menge $H'_2 \subset H_2$ und gilt

$$C_0 \cup H'_2 = \emptyset,$$

wobei C_0 die Menge aller Bögen bedeutet, welche Bestandteile von Zyklen der Länge Null in dem $\bar{P}$ zugeordneten Graph sind, so besitzt das Problem P eine uneigentliche Lösung, deren Grenzwert gleich der Universalmindestlösung von $\bar{P}$ ist;

c. Ist $\bar{P}$ verträglich und haben wir

$$C_0 \cup H'_2 \neq \emptyset,$$

so ist das Problem P unverträglich;

d. Ist $\bar{P}$ unverträglich, so ist es auch P .

Es sei noch erwähnt, dass zur Bestimmung der Menge $C = C_0 \cup C_1$ in einem Graph B . Roy [5] ein Verfahren angegeben hat.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Algan M., Reihenfolgeproblem und Graphentheorie, Unternehmungsforschung, 8, 2, 53–64 (1964).
- [2] Némethi L., Das Reihenfolgeproblem in der Fertigungsprogrammierung und Linearplanung mit logischen Bedingungen. Mathematica, 6 (29), 2, 87–99 (1964).
- [3] Némethi L., Radó F., Sur la programmation temporelle de la fabrication. Mathematica, 8 (31), 1, 109–115 (1966).
- [4] Radó F., Un algorithme pour résoudre certains problèmes de programmation mathématique. Mathematica, 6 (29), 1, 105–116 (1964).
- [5] Roy B., Cheminement et connéxité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnement. Métra, Série spéciale, 1 (1962).

Eingegangen, 9. IV. 1966.

SUR LA COMPATIBILITÉ DU PROBLÈME CENTRAL DE L'ORDONNANCEMENT

par

VASILE PETEANU

à Cluj

1. Introduction

Le problème central de l'ordonnement consiste dans la détermination d'un vecteur T , dont les composantes t_i , $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ satisfont au système de contraintes

$$(1) \quad t_j - t_i \geq a_{ij}, \quad (i, j) \in U \subset I \times I \quad i \neq j$$

$$(2) \quad t_1 = 0$$

et qui réalisent un certain optimum, a_{ij} étant des nombres connus. Il est facile de voir que l'étude de la compatibilité du système de contraintes (1), (2) se réduit à l'étude de la compatibilité du système (1).

Nous mentionnerons qu'une étude détaillée des problèmes d'ordonnement peut être trouvée dans la thèse de B. ROY [2]. B. Roy attache au système de contraintes (1) un graphe orienté dont chaque sommet est mis en correspondance biunivoque avec un indice i , et chaque des contraintes (1) est mise en correspondance biunivoque avec un arc du graphe allant du sommet i au sommet j , et est affecté par la longueur a_{ij} . On démontre que le système de contraintes (1) est compatible si, et seulement si, le graphe qui lui est attaché ne contient pas de circuits de longueur strictement positive.

Dans le travail [1], les auteurs, en utilisant une structure algébrique adéquate, donnent un algorithme pour la détermination d'une solution du système (1) dans l'hypothèse que le graphe attaché ne contient pas de circuits de longueur strictement positive.

Dans ce travail nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système de contraintes (1) soit compatible, en utilisant la structure algébrique introduite dans le travail [1], sans aucune référence au graphe attaché au système de contraintes.

2. La structure algébrique utilisée

Soit R l'ensemble des nombres réels, $E = R \cup \{-\infty\}$. Dans l'ensemble E nous définirons deux opérations symboliques: l'addition $\oplus$ et la multiplication $\circ$, de la manière suivante:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max(a, b) \\ a \circ b &= a + b. \end{aligned} \quad a, b \in E$$

Ces opérations sont associatives et commutatives et la multiplication symbolique est distributive par rapport à l'addition symbolique. L'élément neutre pour l'addition est $-\infty$ et pour la multiplication 0. Quelsque soient a et b appartenant à E , nous avons $a \geq b$ si, et seulement si, $a \oplus b = a$. Deux inégalités du même sens peuvent s'ajouter et multiplier symboliquement membre à membre. Nous désignons:

$$\bigoplus_{i=1}^n a_i = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$$

Soient A, B, C , des matrices, dont les éléments appartiennent à l'ensemble E . La somme de deux matrices A et B , les deux de dimensions $m \times n$, sera une matrice C des mêmes dimensions dont les éléments sont:

$$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$$

L'addition matricielle symbolique est associative et commutative.

Par analogie avec la multiplication matricielle habituelle, nous définirons la multiplication matricielle symbolique de la manière suivante:

$$A \circ B = C$$

où

$$c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \circ b_{kj}$$

les trois matrices ayant respectivement les dimensions $m \times n$, $n \times p$ et $m \times p$.

La multiplication matricielle symbolique est associative et distributive par rapport à l'addition matricielle symbolique. Il existe une matrice carrée unité E , pour laquelle

$$A \circ E = E \circ A = A$$

quelque soit la matrice carrée A , de la même dimension que E . Les éléments de E sont définis de la manière suivante:

$$e_{ij} = \begin{cases} -\infty & \text{pour } i \neq j \\ 0 & \text{pour } i = j \end{cases}$$

L'ensemble des matrices des mêmes dimensions est partiellement ordonné. Nous avons $A \geq B$ si, et seulement si, $A \oplus B = A$. Nous ferons la remarque que la relation $A \geq E$ signifie simplement que les éléments de la diagonale principale de la matrice A sont non-négatifs.

Deux inégalités matricielles du même sens peuvent s'ajouter ou se multiplier symboliquement membre à membre. Ainsi, de $A \geq B$, $C \geq D$ il résulte $A \oplus C \geq B \oplus D$ et $A \circ C \geq B \circ D$. Nous allons justifier la dernière inégalité. L'élément de la ligne i de la colonne j de la matrice $A \circ C$ est $\max_k (a_{ik} + c_{kj})$ et celui de la matrice $B \circ D$ est $\max_k (b_{ik} + d_{kj})$. Vu que $a_{ik} \geq b_{ik}$ et $c_{kj} \geq d_{kj}$, il résulte la dernière inégalité matricielle. En particulier de $A \geq B$, il résulte $A \circ C \geq B \circ C$.

Pour une matrice carrée on peut définir l'élevation à une puissance de la manière suivante:

$$A^{(0)} = E, \quad A^{(k)} = A^{(k-1)} \circ A = A \circ A^{(k-1)}$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par $a_{ij}^{(k)}$ l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice $A^{(k)}$.

3. La représentation matricielle du système de contraintes

La structure algébrique définie ci-dessus nous permet de représenter matriciellement le système de contraintes (1). Pour ce faire, nous allons le compléter par les contraintes correspondantes aux paires d'indices qui n'appartiennent pas à U , les valeurs a_{ij} correspondantes étant

$$(3) \quad a_{ij} = \begin{cases} -\infty & \text{pour } i \neq j \\ 0 & \text{pour } i = j \end{cases}$$

On obtient ainsi le système de contraintes équivalent à (1),

$$(4) \quad t_j \geq t_i \circ a_{ij} \quad (i, j) \in I \times I$$

En ajoutant symboliquement membre à membre les inégalités de (4) pour un certain indice j , nous obtenons le système de contraintes

$$(5) \quad t_j \geq \sum_{i=1}^n t_i \circ a_{ij} \quad j \in I$$

qui est équivalent à (4) et qui peut s'écrire matriciellement

$$(6) \quad T \geq T \circ A$$

où $A = \|a_{ij}\|$.

En vertu de (3), $A \geq E$, donc $T \circ A \geq T$ ce qui démontre l'équivalence des relations (6) et (7),

$$(7) \quad T = T \circ A$$

Dans le travail [1] on démontre l'équivalence des équations (7) et

$$(8) \quad T = T \circ A^{(p)}$$

quelque soit le nombre entier $p \geq 1$. On montre également que si le graphe attaché au système de contraintes ne contient aucun circuit de longueur strictement positive, en d'autres termes si le système de contraintes est compatible, alors

$$(9) \quad A^{(n)} = A^{(n+1)}$$

4. La compatibilité

En ce qui concerne la compatibilité du système de contraintes (1) nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (7) soit compatible est que l'on ait:

$$A^{(n-1)} = A^{(n)}.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons que l'équation (7) admet une solution $T_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0)$. De l'équivalence des équations (7) et (8) il résulte

$$(10) \quad t_j^0 = \sum_{i=1}^n t_i^0 \circ a_{ij}^{(p)} \quad j \in I, \quad p = 1, 2, \dots$$

Vu que $A \geq E$ implique $A^{(p)} \geq E$, il s'ensuit que quelque soit i nous avons $a_{ii}^{(p)} \geq 0$. D'autre part, si l'on fait dans (10) $i = j$ on obtient $a_{ii}^{(p)} \leq 0$ donc on peut avoir seulement

$$(11) \quad a_{ii}^{(p)} = 0, \quad i \in I, \quad p = 1, 2, \dots$$

De l'égalité $A^{(p)} = A^{(p_1)} \circ A^{(p_2)}$, où $p_1 + p_2 = p$, on déduit de suite que

$$a_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(p_1)} \circ a_{kj}^{(p_2)}.$$

De l'égalité précédente il résulte d'une part que nous avons pour tout indice k

$$(12) \quad a_{ij}^{(p)} \geq a_{ik}^{(p_1)} \circ a_{kj}^{(p_2)}$$

et d'autre part qu'il existe au moins un indice s pour lequel nous avons

$$(13) \quad a_{ij}^{(p)} = a_{is}^{(p_1)} \circ a_{sj}^{(p_2)}.$$

En utilisant successivement l'inégalité (12), nous obtenons

$$(14) \quad a_{ij}^{(p)} \geq a_{ik_1} \circ a_{k_1 k_2} \circ \dots \circ a_{k_{p-1} j}.$$

quelques soient les indices $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ appartenant à I . En tenant compte de (13) on déduit qu'il existe les indices $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ appartenant à I , tels que l'on ait la relation

$$(15) \quad a_{ij}^{(n)} = a_{is_1} \circ a_{s_1 s_2} \circ \dots \circ a_{s_{n-1} j}.$$

Au second membre de cette relation figurent $n+1$ indices, appartenant à I . Deux au moins de ces indices coïncident. Soient s_q et s_r deux des indices qui coïncident. Alors

$$(16) \quad a_{ij}^{(n)} = \alpha_{is_q} \circ \beta_{s_q s_r} \circ \gamma_{s_r j}$$

où

$$\alpha_{is_q} = a_{is_1} \circ \dots \circ a_{s_{q-1} s_q}$$

$$\beta_{s_q s_r} = a_{s_q s_{q+1}} \circ \dots \circ a_{s_{r-1} s_r}$$

$$\gamma_{s_r j} = a_{s_r s_{r+1}} \circ \dots \circ a_{s_{n-1} j}$$

En vertu de (14), $a_{is_q}^{(p)} \geq \alpha_{is_q}$, $a_{s_q s_r}^{(r-q)} \geq \beta_{s_q s_r}$, $a_{s_r j}^{(n+q-r)} \geq \gamma_{s_r j}$ mais $s_q = s_r$, donc $a_{s_q s_r}^{(r-q)} = 0$ conformément à (11). Il en résulte que

$$(17) \quad a_{ij}^{(n)} \leq a_{is_q}^{(p)} \circ a_{s_q s_r}^{(r-q)} \leq a_{ij}^{(n+q-r)}$$

La dernière inégalité est une conséquence de (12), en vertu de l'égalité $s_q = s_r$. Il résulte de (17) et (11)

$$(18) \quad A^{(n)} \leq \sum_{p=1}^{n-1} A^{(p)}.$$

D'autre part, il résulte de $A \geq E$

$$(19) \quad A \leq A^{(2)} \leq \dots \leq A^{(n-1)} \leq A^{(n)} \leq \dots$$

On en déduit

$$(20) \quad \prod_{p=1}^{n-1} A^{(p)} = A^{(n-1)}.$$

Enfin, de (18), (19), (20) il résulte

$$(21) \quad A^{(n-1)} = A^{(n)}.$$

La condition est suffisante. Soit T_1 un vecteur arbitraire n -dimensionnel. Si $A^{(n-1)} = A^{(n)}$ alors

$$(22) \quad T = T_1 \circ A^{(n-1)}$$

vérifie l'équation (7). En effet, nous avons

$$T_1 \circ A^{(n-1)} = T_1 \circ A^{(n-1)} \circ A = T_1 \circ A^{(n)}$$

ce qui démontre la suffisance de la condition.

Remarque. L'égalité (22) nous fournit un algorithme pour la détermination d'une solution de l'équation (7). Vu que la multiplication de deux matrices nécessite un plus grand volume de calculs que la multiplication d'un vecteur avec une matrice, pour la détermination de la solution 1 est préférable de calculer successivement

$$T_2 = T_1 \circ A$$

$$T_3 = T_2 \circ A$$

$$T_n = T_{n-1} \circ A$$

La dernier vecteur est une solution de l'équation (7). En calculant aussi $T_{n+1} = T_n \circ A$, la compatibilité de l'équation (7) se reconnaît à l'égalité $T_{n+1} = T_n$, mais cette compatibilité peut être reconnue plus tôt si pour un indice $i < n$ nous avons $T_{i+1} = T_i$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Cruon R. et Hervé Ph., *Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et son application au problème central de l'ordonnement*. Revue Française de Recherche Opérationnelle, 34, 3-19 (1965).
- [2] Roy B., *Cheminement et connexité dans les graphes; application aux problèmes d'ordonnement*. Metra, Série spéciale, 1 (1962).

Reçu le 22. IX. 1966.

GÉNÉRALISATION DU PRODUIT DE DEUX RELATIONS BINAIRES

par

I. PURDEA

à Cluj

Soit $\mathcal{R}_n$ la classe des relations n -aires; $\mathcal{R}_n = \{\Phi \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$, où A_i sont des ensembles} et $\mathcal{R}^{(q)} = \bigcup \mathcal{R}_n$, ($q = 1, 2, \dots$). La définition d'un produit binaire est connue; si $\Phi \subseteq A_1 \times A_2$ et $\psi \subseteq B_1 \times B_2$ le produit des relations binaires Φ et ψ est la relation $\Phi \circ \psi \subseteq A_1 \times B_2$ définie de la manière suivante:

$$(1) \quad \Phi \circ \psi = \{(a_1, b_2) \in A_1 \times B_2 \mid (a_1, z) \in \Phi \text{ et } (z, b_2) \in \psi \text{ pour un } z \in A_2 \cap B_1\}.$$

On généralise dans ce travail la définition du produit des relations binaires et on étudie les propriétés de ce produit généralisé.

Définition 1. On nomme *produit de type q* des relations $\Phi, \psi \in \mathcal{R}^{(q)}$, la relation $\Phi_q \psi \in \mathcal{R}_{n+m-2q}^{(q)}$

$$(2) \quad \Phi_q \psi = \{(x_1, \dots, x_{n-q}, y_{q+1}, \dots, y_m) \in A_1 \times \dots \times A_{n-q} \times B_{q+1} \times \dots \times B_m \mid (x_1, \dots, x_{n-q}, z_1, \dots, z_q) \in \Phi \text{ et } (z_1, \dots, z_q, y_{q+1}, \dots, y_m) \in \psi \text{ pour un } (z_1, \dots, z_q) \in (A_{n-q} \cap B_1) \times \dots \times (A_n \cap B_q) \text{ où } \Phi \subseteq A_1 \times \dots \times A_n \text{ et } \psi \subseteq B_1 \times \dots \times B_m\}.$$

De cette définition résultent immédiatement les conséquences suivantes:

1. Si $n = 2$, $m = 2$ et $q = 1$ le produit défini par l'égalité (2) coïncide avec le produit défini par l'égalité (1).

2. Une condition nécessaire pour que la relation $\Phi_q \psi$ ne soit pas la relation vide est que les ensembles $A_{n-q+1} \cap B_1, \dots, A_n \cap B_q$ ne soient pas vides.