MATHEMATICA VOL. 10 (33), 1, 1968, pp. 5–15

SUR UN PROBLÈME D'INTERPOLATION RELATIF AUX SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU QUATRIÈME ORDRE

par

OLEG ARAMĂ

à Cluj

Dans le présent travail, qui fait suite aux travaux [1, 2] élaborés en commun avec D. RIPIANU, on donne une condition suffisante pour que l'équation différentielle

$$y^{(4)} + p_1(x)y^{(3)} + p_2(x)y'' + p_3(x)y' + p_4(x)y = 0, \tag{1}$$

dont les coefficients sont des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, admette une solution (unique) y, qui satisfasse aux conditions

$$y(a) = y_a^{(0)}, \quad y'(a) = y_a^{(1)}, \quad y''(a) = y_a^{(2)}, \quad y^{(\nu)}(b) = y_b^{(\nu)}, \tag{2}$$

où $y_a^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2)$ et $y_b^{(\nu)}$ sont des nombres réels quelconques donnés, ν étant un des nombres 0, 1, 2.

D'après un célèbre théorème dû à CH. J. de la VALLÉE POUSSIN [26], dans le cas où $\nu = 0$ une telle condition se peut exprimer par l'inégalité

$$m_4 \frac{h^4}{24} + m_3 \frac{h^3}{6} + m_2 \frac{h^2}{2} + m_1 h - 1 \leq 0, \quad h = b - a, \tag{3}$$

où on a noté

$$m_k = m_k(a, b) = \max_{x \in [a,b]} |p_k(x)|, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

Des conditions moins restrictives que la condition (3) résultent des travaux de SATÔ [24], TUMURA [25], G. A. BESSMERTNYH et A. YU. LEVIN [5], dans lesquelles les auteurs obtiennent certaines améliorations du théorème de Ch. J. de la Vallée Poussin. Une telle condition s'écrit sous la forme

(5) $$\frac{9}{2^{11}} m_4 h^4 + \frac{1}{24} m_3 h^3 + \frac{1}{4} m_2 h^2 + \frac{3}{4} m_1 h - 1 \leqq 0 \qquad (h=b-a).$$

En continuant la série des travaux de E. PICARD [19, 20], F. LETTENMEYER [11], PH. HARTMAN et A. WINTNER [9], Z. OPIAL [17, 18], D. RIPIANU [21, 22] et A. LASOTA [10], concernant l'étude d'un problème analogue au cas des équations différentielles linéaires du deuxième, respectivement, du troisième ordre, D. BOBROWSKI [6] a obtenu pour l'existence (et l'unicitè) de la solution du problème (1), (2), la condition

(6) $$\frac{1}{2\pi^3} m_4 h^4 + \frac{1}{2\pi^2} m_3 h^3 + \frac{1}{\pi^2} m_2 h^2 + \frac{1}{4} m_1 h - 1 \leqq 0 \quad (h = b - a).$$

Dans le présent travail on donne un analogue quadratique de l'inégalité (6) de D. Bobrowski, dans lequel interviennent à la place des fonctionnelles m_k définies dans (4), les fonctionnelles

(7) $$\overline{m}_k = \overline{m}_k(a,\ b) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b p_k^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui représentent les valeurs moyennes quadratiques des coefficients de l'équation différentielle considérée. On obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour que le problème* (1), (2) *ait une solution* (unique) *il suffit que soit vérifiée l'inégalité*

(8) $$\frac{1}{\pi^3\sqrt{6}}\overline{m}_4 h^4 + \frac{1}{\pi^2\sqrt{2}}\overline{m}_3 h^3 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\overline{m}_2 h^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{m}_1 h - 1 \leqq 0 \qquad (h = b - a),$$

où les nombres $\overline{m}_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ *sont donnés par* (7).

La méthode de démonstration s'appuie sur deux lemmes, établis par l'auteur du présent travail, en collaboration avec D. RIPIANU:

L e m m e 1. *Si la fonction réelle, non-identiquement nulle,* φ, *de la variable réelle* x *admet une dérivée du premier ordre, continue sur l'intervalle* $[a, b]$ *et vérifie la condition* $\varphi(a) = 0$, *alors on a l'inégalité*

(9) $$\int_a^b \varphi^2(x)\ \varphi'^2(x)dx < \frac{b-a}{2}\left[\int_a^b \varphi'^2(x)\,dx\right]^2.$$

Démonstration. Nous écrirons $\Phi(x) = \int_a^x \varphi'^2(s)ds,\ x \in (a, b]$. Nous avons

(10) $$\int_b^a \varphi^2(x)\varphi'^2(x)dx = \int_a^b \varphi'^2(x)\left[\int_a^x \varphi'(s)ds\right]^2 dx.$$

Mais, en vertu de l'inégalité de Schwarz-Buniakowski

$$\left[\int_a^x \varphi'(s)ds\right]^2 \leqq \int_a^x 1^2 ds \int_a^x \varphi'^2(s)ds = (x-a)\int_a^x \varphi'^2(s)ds.$$

On déduit de (10):

$$\int_a^b \varphi^2(x)\varphi'^2(x)dx \leqq \int_a^b (x-a)\varphi'^2(x)\ dx \int_a^x \varphi'^2(s)ds =$$

$$= \int_a^b (x-a)\Phi(x)\ \Phi'(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)\ d\Phi^2(x) =$$

$$= \frac{b-a}{2}\Phi^2(b) - \frac{1}{2}\int_a^b \Phi^2(x)dx \leqq \frac{b-a}{2}\Phi^2(b),$$

ce qui démontre le lemme.

Remarque. L'inégalité (9) est analogue à l'inégalité suivante, établie par Z. OPIAL [18]:

(11) $$\int_a^b |\varphi(x)\ \varphi'(x)|dx \leqq \frac{b-a}{2}\int_a^b \varphi'^2(x)dx.$$

Des démonstrations simplifiées de l'inégalité (11) ont été ultérieurement données par C. OLECH [16], HUA LOO KENG [13]. Cette inégalité a fait l'object des plusieurs recherches actuelles, dont nous mentionnons celles de P. BEESAK [4], BANKS DALLAS [3], E. K. GODUNOVA et V. I. LEVIN [8], N. LEVINSON [12], M. P. MARONI [14] et G. S. YANG [28].

Lemme 2. *Si la fonction réelle, non-identiquement nulle, φ, de la variable réelle x admet une dérivée du premier ordre, continue sur l'intervalle $[a, b]$ et vérifie la condition $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, alors on a l'inégalité*

$$(12) \qquad \int_a^b \varphi^4(x)dx < \frac{2(b-a)^3}{\pi^2}\left[\int_a^b \varphi'^2(x)dx\right]^2.$$

Démonstration. Nous allons nous servir de l'inégalité bien connue [23]:

$$(13) \qquad \int_a^b f^2(x)\,dx \leqq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)\,dx,$$

valable pour toute fonction $f \in C^1[a, b]$, qui vérifie les conditions $f(a) = f(b) = 0$.

En écrivant $f(x) = \varphi^2(x)$, nous avons en vertu de (13)

$$\int_a^b \varphi^4(x)\,dx \leqq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b [2\varphi(x)\ \varphi'(x)]^2\,dx.$$

On en déduit, à l'aide de (9), l'inégalité (12).

* * *

Dans ce qui suit, nous nous proposons de démontrer le théorème précédent, dans un énoncé un peu plus général.

Désignons par Y_4 la famille des solutions de l'équation (1) définies sur l'intervalle $[a, b]$. Nous dirons que la famille Y_4 jouit de la propriété $K_4[a, b]$, si quelsque soient les noeuds donnés ξ, η, ζ_1, ζ_2, ainsi que

$$(14) \qquad a \leq \zeta_1 \leq \min\{\xi, \eta\} \leqq \max\{\xi, \eta\} \leqq \zeta_2 \leqq b; \quad \zeta_1 < \zeta_2,$$

et quelsque soient les nombres réels donnés $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, $y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}$, l'équation (1) admet une solution (et une seule) y, qui vérifie les conditions

$$(15) \qquad y(\xi) = y^{(0)},\ y'(\eta) = y^{(1)},\ y''(\zeta_1) = y_1^{(2)},\ y''(\zeta_2) = y_2^{(2)}.$$

Il est facile de démontrer que si Y_4 jouit de la propriété d'interpolation $K_4[a, b]$, alors le problème (1), (2) admet une solution (unique), quelsque soient les nombres réels donnés $y_a^{(0)}$, $y_a^{(1)}$, $y_a^{(2)}$, $y_b^{(v)}$, qui interviennent dans les conditions (2).

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si l'inégalité suivante est vérifiée*

$$(16) \qquad \frac{1}{\pi^2}\overline{m}_4\cdot h^4 + \frac{1}{\pi^2}\overline{m}_3\cdot h^3 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\overline{m}_2\cdot h^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{m}_1\cdot h - 1 \leq 0 \quad (h = b - a),$$

alors la famille Y_4 jouit de la propriété $K_4[a, b]$.

Démonstration. Supposons par absurde que dans les hypothèses adoptées relativement à l'équation différentielle (1) et dans l'hypothèse que l'inégalité (16) a lieu, l'ensemble Y_4 des solutions de l'équation (1) ne possède pas la propriété d'interpolation $K_4[a, b]$. On constate facilement que cette hypothèse attire l'existence au moins d'une solution non identiquement nulle, y, de l'équation (1), qui vérifie les conditions

$$y(\xi) = y'(\eta) = y''(\zeta_1) = y''(\zeta_2) = 0,$$

où ξ, η, ζ_1, ζ_2, satisfont aux conditions (14). Désignons par $z(x)$ la dérivée seconde $y''(x)$. Alors on a les identités

$$y'(x) = \int_\eta^x z(s)\,ds, \quad y(x) = \int_\xi^x y'(s)\,ds = \int_\xi^x ds\int_\eta^s z(t)\,dt.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par z et en intégrant ensuite par rapport à x de ζ_1 à ζ_2, on obtient:

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z(x)\,z''(x)\,dx + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_1(x)\,z(x)\,z'(x)\,dx + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_2(x)\,z^2(x)\,dx +$$

$$+\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left[p_3(x)\,z(x)\cdot\int_\eta^x z(s)\,ds\right]dx + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left[p_4(x)\,z(x)\int_\xi^x ds\int_\eta^s z(t)\,dt\right]dx = 0.$$

Mais

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z(x)\,z''(x)\,dx = [z(x)\,z'(x)]_{\zeta_1}^{\zeta_2} - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\,dx = -\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\,dx.$$

En remplaçant la valeur de cette intégrale dans l'égalité précédente et en appliquant l'inégalité de Schwarz-Buniakowski, on obtient

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\,dx \le \left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_1^2(x)\,dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,z'^2(x)\,dx\right)^{1/2} + \tag{17}$$

$$+\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_2^2(x)\,dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^4(x)\,dx\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_3^2(x)\,dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\eta}^{x} z(s)\,ds\right]^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_4^2(x)\,dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\xi}^{x} ds\int_{\eta}^{s} z(t)\,dt\right]^2 dx\right)^{1/2}.$$

En vertu des lemmes 1 et 2, on a

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,z'^2(x)\,dx < \frac{\zeta_2-\zeta_1}{2}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\,dx\right]^2, \tag{18}$$

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^4(x)\,dx < \frac{2(\zeta_2-\zeta_1)^3}{\pi^2}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\,dx\right]^2. \tag{19}$$

En vertu de la même inégalité de Schwarz-Buniakowski on obtient

$$\int_{\xi_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\eta}^{x} z(s)ds\right]^2 dx \le \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\eta}^{x} |\,z(s)\,|\,ds\right]^2 dx \le$$

$$\le \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,|x-\eta|\cdot\left|\int_{\eta}^{x} z^2(s)ds\right| dx < (\zeta_2-\zeta_1)\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,dx\right]^2.$$

et en délimitant la dernière intégrale, conformément à l'inégalité (13), on obtient :

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\eta}^{x} z(s)ds\right]^2 dx < \frac{(\zeta_2-\zeta_1)^5}{\pi^4}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\,dx\right]^2. \tag{20}$$

Si $\zeta_1 = \eta$, ce qui a lieu dans le cas où la démonstration du théorème se fait relativement à la propriété d'interpolation du type (2), on obtient une délimitation meilleure que celle donnée par (20). En effet, dans ce cas on a

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\eta}^{x} z(s)ds\right]^2 dx \le \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\zeta_1}^{x} |\,z(s)\,|\,ds\right]^2 dx \le$$

$$\le \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,(x-\zeta_1)\left[\int_{\zeta_1}^{x} z^2(s)\,ds\right] dx < (\zeta_2-\zeta_1)\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dx\int_{\zeta_1}^{x} z^2(x)\,z^2(s)\,ds.$$

En tenant compte que la fonction qui intervient sous le signe de la dernière intégrale est symétrique par rapport aux variables x et s, on a

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dx\int_{\zeta_1}^{x} z^2(x)z^2(s)ds = \frac{1}{2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)z^2(s)dxds = \frac{1}{2}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,dx\right]^2,$$

et par conséquence

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\eta}^{x} z(s)ds\right]^2 dx < \frac{\zeta_2-\zeta_1}{2}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,dx\right]^2.$$

En utilisant l'inégalité (13), on obtient finalement la délimitation

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\eta}^{x} z(s)ds\right]^2 dx < \frac{(\zeta_2-\zeta_1)^5}{2\pi^4}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\,dx\right]^2 \tag{21}$$

En procédant d'une manière analogue, on obtient pour le dernier terme de (17) les délimitations

$$J = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\xi}^{x} ds \int_{\eta}^{s} z(t)\, dt\right]^2 dx \leq \tag{22}$$

$$\leq \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\xi}^{x} ds \left|\int_{\eta}^{s} z(t)\, dt\right|\right]^2 dx \leq \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,|x-\xi|\cdot\left|\int_{\xi}^{x} ds\left[\int_{\eta}^{s} z(t)\, dt\right]^2\right| dx \leq$$

$$\leq \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,|x-\xi|\cdot\left|\int_{\xi}^{x} ds\left[\int_{\eta}^{s} |z(t)|\, dt\right]^2\right| dx \leq$$

$$\leq \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,|x-\xi|\cdot\left|\int_{\xi}^{x} |s-\eta|\cdot\left|\int_{\eta}^{s} z^2(t) dt\right| ds\right| dx \leq$$

$$\leq \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,|x-\xi|\cdot\left|\int_{\xi}^{x} |s-\eta|\, ds\cdot\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(t)\, dt\right| dx <$$

$$< (\zeta_2-\zeta_1)^3\cdot\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x) dx\cdot\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(t)\, dt < \frac{(\zeta_2-\zeta_1)^7}{\pi^4}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\, dx\right]^2.$$

Dans le cas où $\zeta_1 = \xi = \eta$ (cas d'interpolation du type (2)), on obtient une délimitation meilleure que (22), en écrivant:

$$J = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\xi}^{x} ds \int_{\eta}^{s} z(t)\, dt\right]^2 dx = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\zeta_1}^{x} (x-s)\, z(s)\, ds\right]^2 dx \leq$$

$$\leq \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\left[\int_{\zeta_1}^{x} (x-s)^2\, ds\right]\cdot\left[\int_{\zeta_1}^{x} z^2(s)\, ds\right] dx \leq$$

$$\leq \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\,\frac{(x-\zeta_1)^3}{3}\, dx\int_{\zeta_1}^{x} z^2(s)\, ds < \frac{(\zeta_2-\zeta_1)^3}{3}\cdot\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dx\int_{\zeta_1}^{x} z^2(x)\, z^2(s) ds$$

et en observant que, en vertu de la symétrie par rapport à x et s de la fonction qui intervient sous le dernier signe d'intégration, on a

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dx\int_{\zeta_1}^{x} z^2(x) z^2(s)\, ds = \frac{1}{2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\, z^2(s)\, dx\, ds = \frac{1}{2}\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z^2(x)\, dx\right]^2.$$

Compte tenant aussi de l'inégalité (13), on obtient, dans le cas considéré, la délimitation

$$J < \frac{(\zeta_2-\zeta_1)^7}{6\pi^4}\cdot\left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\, dx\right]^2. \tag{23}$$

Enfin, de (17) on déduit, en tenant compte des inégalités (18), (19), (20), (22) et des notations (7), l'inégalité

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\, dx < \left[\frac{(\zeta_2-\zeta_1)^{1/2}}{\sqrt{2}}\cdot\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_1^2(x)\, dx\right)^{1/2} + \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{2}\,(\zeta_2-\zeta_1)^{3/2}}{\pi}\cdot\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_2^2(x)\, dx\right)^{1/2} + \frac{(\zeta_2-\zeta_1)^{5/2}}{\pi^2}\cdot\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_3^2(x)\, dx\right)^{1/2} +$$

$$\left. + \frac{(\zeta_2-\zeta_1)^{7/2}}{\pi^2}\cdot\left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} p_4^2(x)\, dx\right)^{1/2}\right]\cdot\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\, dx.$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par le facteur

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} z'^2(x)\, dx,$$

qui représente une valeur non nulle (en vertu du fait que la solution y a été supposée non-identiquement nulle) et en tenant compte des inégalités évidentes

$$\sqrt{\zeta_2-\zeta_1}\cdot\overline{m}_k(\zeta_1,\zeta_2) \leq \sqrt{b-a}\cdot\overline{m}_k(a,b) \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

nous obtenons l'inégalité

$$\frac{1}{\pi^3}\cdot \overline{m}_4(a, b)\cdot h^4 + \frac{1}{\pi^2}\cdot \overline{m}_3(a, b)\cdot h^3 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot \overline{m}_2(a, b)\, h^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \overline{m}_1(a, b)\cdot h - 1 > 0, \tag{24}$$

qui contredit l'inégalité (16). Ainsi, le théorème 2 est démontré.

Dans le cas où $\zeta_1 = \xi = \eta$, en procédant d'une manière analogue et en utilisant au lieu des inégalités (20) et (22), les inégalités plus précises (21), respectivement (23), on obtiendra une inégalité de la forme (24), qui contredira l'inégalité (8). De cette contradiction il résultera l'affirmation du théorème 1.

Institut de Calcul de l'Académie de la République Socialiste Roumanie — Cluj —

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aramă O. et D. Ripianu, *Quelques recherches actuelles concernant l'équation de Ch. J. de la Vallée Poussin, relative au problème polylocal dans la théorie des équations différentielles*. Mathematica (Cluj), **8** (**31**), 18–28 (1966).

[2] — *Sur l'équation de Ch. J. de la Vallée Poussin relative au problème polylocal de la théorie des équations différentielles*. Colloque sur la théorie de l'approximation des fonctions, Cluj, 15–20 Septembre, 1967.

[3] Banks Dallas, *An integral inequality*. Proc. Amer. Math. Soc., **14**, *5*, 823–829 (1963).

[4] Beesack P., *On an integral inequality of Z. Opial*. Trans. Amer. Math. Soc., **104**, 470–475 (1962).

[5] Бессмертных Г. А., А. Ю. Левин, *О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной*. Доклады Акад. Наук СССР, 144, *3*, 471—474 (1962).

[6] Bobrowski D., *O odleglosci miedzy zerami pewnych równania rózniczkowego liniowego czwatego rzedu*. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznanskiej, **2**, (Matematyka), 55–60 (1965).

[7] Fitte W. B., Ann. Math., **18**, 214–220 (1917).

[8] Годунова Е. К., В. И. Левин, *Об одном неравенстве Марони*. Математические заметки **2**, *2*, 221–224 (1967).

[9] Hartman Ph. and A. Wintner, *On an oscillation criterion of de la Vallée-Poussin*. Quarterly of applied mathematics, **13**, 330–332 (1955).

[10] Lasota A., *Sur la distance entre les zéros de l'équation différentielle linéaire du troisième ordre*. Ann. Polonici Mathematici, **13**, *2* (1963).

[11] Lettenmeyer F., *Über die von einem Punkt ausgehenden Integralkurven einer Differentialgleichung 2. Ordnung*. Deut. Math., **7**, 56–74 (1944).

[12] Levinson N., *On an integral inequality of Opial and Beesack*. Proc. Amer. Math. Soc., **15**, 565–566 (1964).

[13] Hua Loo-Keng, *On an inequality of Opial*. Sci. Sinica, **14**, 789–790 (1965).

[14] Maroni M. P., *Sur l'inégalité d'Opial-Beesack*. C.R. Acad. sci. (Paris), **264**, *2*, A 62–64 (1967).

[15] Nagumo, Japanese J. Math., **18**, 225–238 (1928).

[16] Olech C., *A simple proof of a certain result of Z. Opial*. Ann. Polonici Mathematici, VIII, 61–63 (1960).

[17] Opial Z., *Sur une inégalité de Ch. de la Vallée–Poussin dans la théorie de l'équation différentielle du second ordre*. Ann. Polonici Mathematici, **6**, 87–91 (1959).

[18] — *Sur une inégalité*. Ann. Polonici Mathematici, **8**, 29–32 (1960).

[19] Picard E., *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*. Journ. Math., **9**, 217–271 (1893).

[20] Picard E., *Traité d'Analyse*. Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[21] Ripianu D., *Asupra inegalității lui de la Vallée Poussin în cazul ecuațiilor diferențiale de ordinul al doilea*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), XIV, 123–150, 399–403 (1963).

[22] — *O problemă de minimum în teoria interpolării*. Studii şi cercet. de matematică (Cluj), XIV, 365–397 (1963).

[23] Sansone G., *Equazioni differenziali nel campo reale*. Parte prima, Bologna, 1941.

[24] Satô, Kansû Hôteisiki, **22**, 39–43 (1940).

[25] Tumura, Kansû Hôteisiki, **30**, 20–35 (1941).

[26] Vallé-Poussin Ch. J. (de la), *Sur l'équation différentielle du second ordre*. Journ. de math. pures et appl., **8** (**9**), 125–144 (1929).

[27] Wintner A., *On disconjugate linear differential equations*. Arch. Math., **8**, *4*, 290–293 (1957).

[28] Yang G., S., *About one result of Opial*. Proc. Japan. Acad., **42**, *2*, 221–224 (1967).

[29] Бездомников В. С., Ю. В. Комленко, *К вопросу об оценке промежутка применимости теоремы Чаплыгина*. Дифференциальные уравнения, II, *9*, 1170–1175 (1966).

Ce travail a été présenté au Colloque sur la Théorie de l'Approximation des fonctions, du 15–20 Septembre 1967, à Cluj (Roumanie).