

Nun ist $\Phi(\delta, n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$; genügt also die Funktion y aus $F(K, R)$ einer Differentialgleichung (1) vom Grade n , so ist die Differenz $y(x) - P_{n-1}(x)$ im Intervall $[0, \delta]$ gleichmässig beliebig klein für hinreichend grosses n .

Ist weiter (y_k) eine beliebige Folge von Funktionen aus $F(K, R)$, so dass die y_k Differentialgleichungen (1) von der Ordnung n_k mit $n_1 < n_2 \dots$ genügen, so sind die y_k gleichmässig beschränkt im Intervall $[0, \delta']$ mit einem $0 < \delta' < \min(\delta, R^{-1})$. Nach dem Vorstehenden und nach (10) konvergiert für $[0, \delta']$ dann auch eine Teilfolge der zugehörigen Taylorpolynome

$$P_{K_j}(x) \rightarrow A(x)$$

und nach dem Vitalischen Satz ist $A(x)$ in $(0, \delta')$ regulär. Also konvergiert auch die Folge der $y_{k_j}(x) \rightarrow A(x)$.

Daraus folgt weiter:

Ist eine Folge von Lösungen aus $F(K, R)$ von Differentialgleichungen aus $D(K)$ von wachsender Ordnung konvergent in $[0, \delta']$, so konvergiert sie gegen eine reguläre Funktion.

Die Approximation einer Funktion durch Lösungen aus $F(K, R)$ führt also nicht über den Bereich der regulären Funktionen hinaus.

Sind die Funktionen y_k dieser Folge alle einander gleich, genügt also diese einer Folge von Differentialgleichungen von wachsender Ordnung aus $D(K)$, so erhält man ein früheres Resultat.

Dass für diese Überlegungen eine Bedingung von der Art (12) notwendig ist, zeigt das folgende Beispiel:

Die Funktionen

$$y_n = x^n n! \quad n = 1, 2, \dots$$

genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{d^{n+1} y_n}{dx^{n+1}} = 0$$

gehören also für jedes $K > 0$ zu $D(K)$. Weiter ist

$$\frac{d^n y_n}{dx^n} = (n!)^2$$

die y_n liegen also bei festem $R > 0$ für alle $n > n_0$ nicht mehr in $F(K, R)$. Für festes $x > 0$ aber strebt $y_n(x) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, so dass also die y_n dort nicht konvergieren.

Diese Arbeit wurde auf dem Kolloquium über Approximationstheorie der Funktionen, 15.-20. September 1967, Cluj (Rumänien) vorgelegt.

ÜBER EINIGE UNGLEICHUNGEN ZWISCHEN DEN NULLSTELLEN EINES POLYNOMS UND SEINER ERSTEN ABLEITUNG

von

HORST KRAMER

in Cluj

Eine von M.K. Toda bewiesene Ungleichung besagt, dass für jede in dem Intervall $[a, b]$ konvexe Funktion erster Ordnung $f(x)$

$$(1) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \frac{1}{(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} f(y_k)$$

gilt, wobei x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) n beliebige reelle Zahlen aus dem Intervall $[a, b]$ sind und y_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) die Nullstellen der ersten Ableitung des Polynoms mit den Nullstellen x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sind. Eine im Intervall $[a, b]$ konkave Funktion erster Ordnung erfüllt eine entsprechende Ungleichung, wobei aber in (1) $\leq$ gilt. Die Ungleichung von Toda ist eine für die konvexen bzw. konkaven Funktionen erster Ordnung charakteristische Ungleichung.

Es sei nun $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ positive Funktion, die konkav erster Ordnung ist. Aus der für ein beliebiges $r \in [0, 1]$ und $x, y \in [a, b]$ geltenden Ungleichung

$$r \cdot f(x) + (1-r) \cdot f(y) \geq (f(x))^r (f(y))^{1-r}$$

und aus der Tatsache dass $f(x)$ eine konkave Funktion erster Ordnung ist, folgt

$$\ln f(r \cdot x + (1-r)y) \geq \ln(r \cdot f(x) + (1-r)f(y)) \geq r \cdot \ln f(x) + (1-r) \ln f(y).$$

Also ist auch $\ln(f(x))$ eine konkave Funktion erster Ordnung, und aus der für sie geltenden Ungleichung von Toda erhalten wir folgendes Resultat:

Jede im Intervall $[a, b]$ positive, konkave Funktion erster Ordnung $f(x)$ erfüllt die Ungleichung

$$(2) \quad \left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{1}{n}} \leq \left[\prod_{k=1}^{n-1} f(y_k) \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

wobei x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) n beliebige reelle Zahlen aus dem Intervall $[a, b]$ sind und y_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) die Nullstellen der ersten Ableitung des Polynoms $\prod_{i=1}^n (x - x_i)$ sind.

Für die im Intervall $[a, b]$ positiven, konvexen Funktionen erster Ordnung gilt die Ungleichung im allgemeinen weder mit $\geq$ noch mit $\leq$. Es ist z.B.

$$1) \text{ für } n = 2, x_1 = 1, x_2 = 5, y_1 = 3, f(x) = x^2 \quad (1^2 \cdot 5^2)^{\frac{1}{2}} < 3^2,$$

$$2) \text{ für } n = 2, x_1 = -1, x_2 = 5, y_1 = 2, f(x) = 1 + |x|, \quad (2 \cdot 6)^{\frac{1}{2}} > 3.$$

Ist n eine natürliche Zahl, $n \geq 2$, $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige, positive Funktion, für die die Differenz

$$(3) \quad D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\prod_{i=1}^n f(x_i) \right]^{\frac{1}{n}} - \left[\prod_{k=1}^{n-1} f(y_k) \right]^{\frac{1}{n-1}} \geq 0$$

für jede Menge von n reellen Zahlen x_i , $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$, wobei y_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) die Nullstellen der ersten Ableitung des Polynoms $\prod_{i=1}^n (x - x_i)$ sind, so schreiben wir kurz

$$f \in \mathcal{D}_n.$$

Die Mengen $\mathcal{D}_n$ sind nicht leer, da z.B. $f(x) = \beta e^{\alpha x}$ (α reell, $\beta \geq 0$) zu jeder dieser Mengen $\mathcal{D}_n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) gehören.

SATZ 1. Aus $f \in \mathcal{D}_{m,p}$, wobei m, p natürliche Zahlen sind und $m, p \geq 2$ folgt: $f \in \mathcal{D}_m, f \in \mathcal{D}_p$.

Es seien x_i ($i = 1, 2, \dots, p$) p beliebige reelle Zahlen aus $[a, b]$, y_k ($k = 1, 2, \dots, p-1$) die Nullstellen der ersten Ableitung des Polynoms $\prod_{i=1}^p (x - x_i)$.

Setzen wir $P(x) = \prod_{i=1}^p (x - x_i)^m$, so ist

$$P'(x) = mp \prod_{i=1}^p (x - x_i)^{m-1} \prod_{k=1}^{p-1} (x - y_k).$$

Aus $f \in \mathcal{D}_{mp}$, also aus

$$D_{mp}(x_1, \dots, x_1, \dots, x_p, \dots, x_p) = \left[\prod_{i=1}^p f^m(x_i) \right]^{\frac{1}{mp}} - \left[\prod_{i=1}^p f^{m-1}(x_i) \prod_{k=1}^{p-1} f(y_k) \right]^{\frac{1}{mp-1}} \geq 0$$

folgt

$$\left[\prod_{i=1}^p f(x_i) \right]^{mp-1} \geq \left[\prod_{i=1}^p f(x_i) \right]^{p(m-1)} \left[\prod_{k=1}^{p-1} f(y_k) \right]^p$$

und wir haben dann

$$\left[\prod_{i=1}^p f(x_i) \right]^{p-1} \geq \left[\prod_{k=1}^{p-1} f(y_k) \right]^p$$

d.h. es ist $D_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \geq 0$ für $f(x)$, also $f \in \mathcal{D}_p$.

SATZ 2. Ist $f \in \mathcal{D}_n$, $n \geq 2$, so ist $f(x)$ eine konvexe Funktion.

Es seien nämlich t_1, t_2 zwei beliebige Zahlen aus $[a, b]$. Wir setzen dann $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = t_1$ und $x_n = t_2$; dann ist

$$y_1 = y_2 = \dots = y_{n-2} = t_1; y_{n-1} = \frac{t_1 + (n-1)t_2}{n}.$$

Aus $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, also aus

$$\left[f^{n-1}(t_1) f(t_2) \right]^{\frac{1}{n}} \geq \left[f^{n-2}(t_1) f\left(\frac{1}{n}(t_1 + (n-1)t_2)\right) \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

erhalten wir

$$f(t_1) f^{n-1}(t_2) \geq f^n\left(\frac{t_1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)t_2\right).$$

Ebenso erhalten wir

$$f(t_2)f^{n-1}(t_1) \geq f^n\left(\frac{t_2}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)t_1\right).$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen ergibt sich unmittelbar

$$f(t_1)f(t_2) \geq f\left(\frac{t_1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)t_2\right) \cdot f\left(\frac{t_2}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)t_1\right).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung und aus der Stetigkeit von $f(x)$ folgt

$$f(t_1)f(t_2) \geq f^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

somit auch

$$(4) \quad \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2} \geq (f(t_1)f(t_2))^{\frac{1}{2}} \geq f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

wobei t_1, t_2 zwei beliebige reelle Zahlen aus dem Intervall $[a, b]$ sind. Die Funktion $f(x)$ ist in $[a, b]$ folglich konvex.

Aus (4) folgt auch, dass $\ln(f(x))$ eine in $[a, b]$ konvexe Funktion ist, dann ist aber auch: $f \in \mathcal{D}_k$ $k = 2, 3, \dots, n, \dots$

Damit ist auch der nun folgende Satz bewiesen:

SATZ 3. Ist für ein festes n ($n \geq 2$), $f \in \mathcal{D}_n$, so folgt

$$f \in \mathcal{D}_k, \quad k = 2, 3, \dots, n, \dots$$

Weiter beweisen wir eine Ungleichung bezüglich der Summe der Flächeninhalte der von den Nullstellen eines Polynoms und seiner ersten Ableitung bestimmten Dreiecke.

N. G. De Bruijn und T.A. Springer haben folgenden Satz bewiesen:

SATZ 4. Es sei $P(z)$ ein Polynom n -ten Grades mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Die Nullstellen der ersten Ableitung des Polynoms befinden sich im Mittel näher zu einer beliebigen Geraden der komplexen Zahlenebene als die Nullstellen des Polynoms.

Eine direkte Folge dieses Satzes ist folgendes Resultat:

Es seien a, b zwei gegebene Punkte der komplexen Zahlenebene. Mit $A(a, b, z)$ bezeichnen wir den Flächeninhalt des von den 3 Punkten a, b, z bestimmten Dreiecks. Es gilt dann folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A(a, b, z_i) \geq \frac{1}{(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} A(a, b, y_k)$$

wobei y_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) die Nullstellen der ersten Ableitung des Polynoms mit den Nullstellen z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sind (z_i sind n beliebige komplexe Zahlen).

Dann folgt sofort

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A(z_i, z_j, z_k) &\geq \frac{1}{(n^2(n-1))} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^{n-1} A(z_i, z_j, y_h) \geq \\ &\geq \frac{1}{(n(n-1)^2)} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{h=1}^{n-1} A(z_i, y_p, y_h) \geq \frac{1}{(n-1)^3} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{h=1}^{n-1} A(y_r, y_p, y_h). \end{aligned}$$

Damit ist auch der nun folgende Satz bewiesen;

SATZ 5. Es sei $P(z)$ ein beliebiges Polynom n -ten Grades und $z_1, z_2, \dots, z_n$ bzw. $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ seien die Nullstellen von $P(z)$ bzw. von $P'(z)$. Dann gilt folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{n^3} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} A(z_i, z_j, z_k) \geq \frac{1}{(n-1)^3} \sum_{1 \leq p < r < s \leq (n-1)} A(y_p, y_r, y_s).$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Brujin N. G. De, Springer T. A., On the zeros of a polynomial and of its derivative, II. Indagationes Mathematicae, 9, 264–270 (1947).

Diese Arbeit wurde auf dem Kolloquium über Approximationstheorie der Funktionen, 15.–20. September 1967, Cluj (Rumänien) vorgelegt.