

und wegen $\lambda \leq 1$ schließlich die Ungleichung

$$(6) \quad 2 \operatorname{Re}(f(x), v_\lambda(x) - v_0(x)) > \|v_\lambda(x) - v_0(x)\|_H^2$$

folgt. Durch die Ungleichungen (5) und (6) ist die Hinlänglichkeit bewiesen.

LITERATUR

- [1] Brośowski B., *Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation*. B. I. Hochschulschriften Bd. 808/808 a, Bibliographisches Institut. Mannheim 1968.
- [2] Brośowski B., *Zur Charakterisierung von Minimallösungen im Raume $C[Q, H]$* . Erscheint demnächst.
- [3] Kolmogoroff A. N., *Eine Bemerkung zu den Polynomen von P. L. Tschebyscheff, die von einer gegebenen Funktion am wenigsten abweichen* [Russisch]. Usp. Mat. Nauk, 3, 216–221 (1948).

Diese Arbeit wurde auf dem Kolloquium über Approximationstheorie der Funktionen, 15. – 20. September 1967, Cluj (Rumänien) vorgelegt.

ÜBER EIN INTERPOLATIONSSCHEMA

von

GH. CIMOCA

Cluj

1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit [7] untersuchte I. J. SCHÖNBERG, ein Interpolationsproblem durch Polynome, welches ein Sonderfall des allgemeinen Hermite-Birkhoff'schen Interpolationsproblems [4], [3] ist und zeigte dass die Lösbarkeit solch eines Problems sowohl von der Matrix A , die weiter unten definiert wird, als auch von der Lage der Interpolationsknotenpunkte abhängig ist.

Die vorliegende Arbeit dient der Aufweisung eines Interpolationsproblems welches aus der Verallgemeinerung der dem Interpolationsproblem von ABEL [1] entsprechenden Matrix A abgeleitet wird.

Sonderfälle dieses Problems wurden in den Arbeiten [2], [5], [7], [8] untersucht.

Weiterhin wird ein anderer Sonderfall untersucht, wobei wir eine Regularitätsbedingung des Systems der Interpolationsknotenpunkte der Matrix A und auch eine explizite Form des entsprechenden Interpolationspolynoms geben.

2. Es sei $A = (\alpha_{ij})$, $i = 0, 1, \dots, k$; $j = 0, 1, \dots, n$, eine Matrix deren Elemente folgende Bedingungen erfüllen:

$$(I) \quad \alpha_{ij} = 0 \text{ oder } 1, \quad i = 0, 1, \dots, k; \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

$$(II) \quad \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} = n + 1, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{i0} \neq 0.$$

$$(III) \quad \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \geq 1, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Dieser Matrix werden wir folgende Menge der geordneten Paare von Zahlen zuordnen:

$$a = \{(i, j) : \alpha_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots, k; \quad j = 0, 1, \dots, n\}.$$

Es seien $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, $k+1$ reelle Zahlen, die wir weiterhin als Interpolationsknotenpunkte bezeichnen werden. Dann definiert die Matrix A folgendes Interpolationsproblem:

INTERPOLATIONSPROBLEM I (Hermite-Birkhoff). Es sei $\mathfrak{F}$ eine Menge von reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen, die in dem Intervall $[a, b] \supset \{x_0, \dots, x_k\}$ definiert sind. Es ist eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ zu bestimmen die folgenden Interpolationsbedingungen genügen soll:

$$(I) \quad f^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad (i, j) \in a$$

wobei $y_i^{(j)}$ gegebene reelle Zahlen sind.

Im allgemeinen ist die Menge $\mathfrak{F}$ die Menge Π_n der Polynome n -ten Grades.

Definition 1. Das Interpolationsproblem I ist lösbar falls $P=0$ das einzige Polynom $P \in \Pi_n$ ist das den Bedingungen

$$P^{(j)}(x_i) = 0, \quad (i, j) \in a$$

genügt.

Wie wir bereits in der Einleitung gezeigt haben, wird in der Arbeit [7] gezeigt dass die Lösbarkeit des Hermite-Birkhoffschen Interpolationsproblems sowohl von der Matrix A als auch von der Lage der Interpolationsknotenpunkte abhängig ist. Die Bedingung dass die Interpolationsknotenpunkte untereinander verschieden sind, ist nicht genügend für die Lösbarkeit des Problems.

In dem nun folgenden interessiert uns die Lage der Interpolationsknotenpunkte für welche ein Interpolationsproblem mit einer gegebenen Matrix A lösbar ist.

Definition 2. Das System der Knotenpunkte $x_0, x_1, \dots, x_k$ nennt sich regulär für eine gegebene Matrix A , welche die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt, falls das Interpolationsproblem I im Sinne der Definition 1, lösbar ist.

3. Ein Spezialfall des Interpolationsproblems I ist:

INTERPOLATIONSPROBLEM II (Abel). Die diesem Interpolationsproblem entsprechende Matrix A erfüllt ausser den Bedingungen (I), (II) mit dem Gleichheitszeichen (III), noch die Bedingung:

$$(IV) \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{ij} = 1, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Es ist bekannt [1], dass das Interpolationsproblem II für jede beliebige Lage der Interpolationsknotenpunkte lösbar ist.

Wir betrachten nun ein anderes Interpolationsproblem:

INTERPOLATIONSPROBLEM III. Die Matrix A erfülle die Bedingungen (I), (II), mit Gleichheitszeichen (III) und ausserdem noch die Bedingungen:

(V) Für eine einzige ganze Zahl v , $0 \leq v \leq n$, findet folgende Beziehung statt:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_{iv} = s, \quad 2 \leq s \leq n - v + 1,$$

$$(VI) \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{ij} = 0 \text{ oder } 1, \quad j = 0, 1, \dots, v-1, v+1, \dots, n.$$

Man bemerkt sofort dass man für $v=0$ und $s=n+1$ das Lagrangesche Interpolationsproblem erhält.

Anschliessend werden wir einen Sonderfall des Interpolationsproblems III untersuchen und im letzten Abschnitt der Arbeit werden wir eine Regularitätsbedingung der Interpolationsknotenpunkte für das allgemeine Interpolationsproblem III geben.

4. Den Sonderfall, den wir nun untersuchen werden, erhält man für $s=2$ und beliebiges v , $0 \leq v \leq n-1$.

Aus den Bedingungen des Interpolationsproblems III folgt unmittelbar $k=n$ und ohne die Allgemeinheit des Problems einzuschränken können wir voraussetzen, dass nur die Paare der Form:

$$(\beta, \beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, n,$$

und das Paar:

$$(\mu, v), \quad \mu \text{ natürliche Zahl und } v < \mu, \text{ der Menge } a \text{ angehören.}$$

Für $\mu=v$ ist die Matrix A die Einheitsmatrix und wir erhalten das Interpolationsproblem II.

SATZ 1. Das System der Knotenpunkte $x_0, x_1, \dots, x_n$ ist regulär, für die dem Interpolationsproblem III mit $s=2$, entsprechende Matrix A genau dann, wenn die Knotenpunkte $x_v, x_{v+1}, \dots, x_\mu$ die Bedingung:

$$(2) \quad \int_{x_v}^{x_\mu} dt_{v+1} \int_{x_{v+1}}^{t_{v+1}} dt_{v+2} \dots \int_{x_{\mu-1}}^{t_{\mu-1}} dt_\mu \neq 0$$

erfüllen.

Beweis. Indem wir das Interpolationspolynom in der Form eines Polynoms n -ten Grades mit unbestimmten Koeffizienten suchen und für dieses Polynom die Interpolationsbedingungen (1) schreiben, erhalten wir ein System von linearen Gleichungen mit den Koeffizienten dieses Polynoms als Unbekannte. Die Regularität des Systems der Knotenpunkte ist äquivalent mit dem Nichtverschwinden der Determinante des oben erwähnten linearen Systems.

Für $\mu = \nu + 1$, erhalten wir nach Satz 1 die Regularitätsbedingung $x_1 \neq x_2$ und nach Satz 2 die explizite Form des gesuchten Polynoms:

$$P_{n,\nu}(x) = \frac{1}{n!} (x - x_1)^{n-1} \left[x - \frac{nx_2 - \nu x_1}{n - \nu} \right].$$

Bemerkung 2. Für das in [7] gegebene Beispiel, wobei die Matrix A die Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat ist die nach Satz 1 erhaltene Regularitätsbedingung

$$\int_{x_0}^{x_2} dt_0 \int_{x_1}^{t_0} dt_1 \neq 0 \quad \text{oder} \quad x_1 \neq \frac{1}{2} (x_0 + x_2).$$

Andere Sonderfälle des in diesem Abschnitt untersuchten Interpolationsproblems findet man in [6], [5].

5. In diesem Abschnitt geben wir eine Regularitätsbedingung des Systems der Knotenpunkte für die Matrix A die dem Interpolationsproblem III entspricht.

Wir bezeichnen mit $A^{(\gamma)}$ die Matrix entsteht indem man in der γ -ten Reihe die Elemente $\alpha_{\gamma i} = \delta_{\gamma i}$, $i = 0, 1, \dots, n$ setzt. Man bemerkt dass die Matrix $A^{(\gamma)}$ ebenfalls ein Interpolationsproblem III definiert.

Es seien $i_1, i_2, \dots, i_s$, die Indizes der Reihen, die 1 in der ν -ten Spalte haben und:

$$Q = \{0, 1, \dots, n\} - \{i_1, i_2, \dots, i_s\}.$$

SATZ 3. Das System der Knotenpunkte $x_0, x_1, \dots, x_n$, ist regulär für die Matrix A die dem Interpolationsproblem III entspricht, wenn es einen Index i_t , $1 \leq t \leq s$ gibt so dass das System $x_0, x_1, \dots, x_{i_t-1}, x_{i_t+1}, \dots, x_n$ regulär ist für die Matrix $A^{(i_t)}$ und x_{i_t} keine Nullstelle des Interpolationspolynoms ist, welches dem Interpolationsproblem III mit der Matrix $A^{(i_t)}$ für das System der reellen Zahlen

$$y_{\beta}^{(\beta)} = 0, \quad \beta \in Q$$

$$y_{i_t}^{(\nu)} = 1$$

$$y_{\gamma}^{(\nu)} = 0, \quad \gamma = i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, i_{t+1}, \dots, i_s,$$

entspricht.

Der Beweis dieses Satzes ist ähnlich dem des Satzes 1.

Bemerkung 3. Ein Sonderfall des Interpolationsproblems III mit der Matrix A , für welche:

$$\alpha_{i0} = 1, \quad i = 0, 1, \dots, s-1,$$

$$\alpha_{ss} = 1 \quad \delta = s, s+1, \dots, n.$$

und die übrigen Elemente gleich Null sind, wurde in [8] angeführt.

LITERATUR

- [1] Abel N. H., *Ouvres*, II.
- [2] Aramă O., *O problemă de interpolare lacunară cu soluții ale ecuațiilor diferențiale*, Studii și cerc. matem., Cluj, **14**, 2 (1963).
- [3] Birkhoff G. D., *General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature*. Trans. Amer. Math. Soc., **7**, 107–136 (1906).
- [4] Hermite C., *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*. J. Reine Angew. Math., **84**, 70–79 (1878).
- [5] Motzkin T. S., Sharma A., *Next-to-interpolatory approximation on sets with multiplicities*. Canad. J. Math., **18**, 6, (1966).
- [6] Németh A. B., *Interpolare lacunară pe noduri distincte*. Studii și cerc. matem., Cluj, **14**, 2, (1963).
- [7] Schoenberg I. J., *On Hermite-Birkhoff interpolation*. J. Math. An. Appl., **16**, 3 (1966).
- [8] Ценов И. В., *О некоторых вопросах теории приближения функций в пространствах $C[a, b]$ и $L^{(s)}[a, b]$* . Изв. высш. учеб. завед., **4**, 184–197 (1959).

Diese Arbeit wurde auf dem Kolloquium über Approximationstheorie der Funktionen, 15. – 20. September 1967, Cluj (Rumänien) vorgelegt.