Dans ce travail nous étudierons la représentation de l'équation (2) à l'aide des nomogrammes à points alignés et à deux échelles rectilignes régulières ou projectives et à une troisième échelle située sur une courbe quelconque.

1. On considère d'abord le cas où les échelles rectilignes du nomogramme sont régulières. L'équation de Soreau s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1 & a_2x + b_2 & 1 \\ c_1y + d_1 & c_2y + d_2 & 1 \\ e_1\varphi + g_1\psi + m_1 & e_2\varphi + g_2\psi + m_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

où nous avons posé, en vue de simplifier l'écriture :

$$\varphi \equiv \varphi(z), \qquad \psi \equiv \psi(z).$$

A l'aide d'une certaine transformation affine nous pouvons ramener les échelles rectilignes du nomogramme sur les axes de coordonnées. L'équation correspondante du nomogramme est :

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda x + a & 1 \\ y + b & 0 & 1 \\ c\varphi + d\psi + e & g\varphi + h\psi + k & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

où $a, b, c, d, e, g, h, k, \lambda$ sont les paramètres des échelles du nomogramme.

En développant le déterminant du premier membre de l'équation (4) nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\lambda cx\varphi(z) + gy\varphi(z) + (bg + ac)\varphi(z) + \lambda dx\psi(z) + hy\psi(z) + \\ &+ (bh + ad)\psi(z) - \lambda xy + \lambda(e - b)x + (k - a)y + (bk + ac - ab) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Pour qu'une équation du 4ème ordre nomographique soit représentable par ce type du nomogramme, il est nécessaire que soient remplies les conditions :

$$\begin{aligned} &A_0 = B_0 = 0 \\ &C_2(A_3B_1 - A_1B_3)(A_2B_1 - A_1B_2) - C_0(A_2B_3 - A_3B_2)(A_3B_1 - A_1B_3) \\ &+ C_1(A_2B_3 - A_3B_2)(A_2B_1 - A_1B_2) = C_3(A_2B_1 - A_1B_2)^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Dans ce cas, les paramètres des échelles sont donnés par la solution du système :

$$\begin{array}{rrr} & & -\lambda = C_0 \\ \lambda c = A_1 & \lambda d = B_1 & \lambda(e - b) = C_1 \\ g = A_2 & h = B_2 & k - a = C_2 \\ bg + ac = A_3 & bh + ad = B_3 & bk + ac - ab = C_3. \end{array} \tag{7}$$

1.1. Si $A_2B_1 - A_1B_2 \neq 0$, il résulte la solution suivante du système (7) :

$$\begin{aligned} &a = \frac{C_0(A_3B_2 - A_2B_3)}{A_2B_1 - A_1B_2}; \quad b = \frac{A_3B_1 - A_1B_3}{A_2B_1 - A_1B_2}; \quad c = -\frac{A_1}{C_0}; \quad d = -\frac{B_1}{C_0}; \lambda = -C_0 \\ &e = -\frac{C_1}{C_0} + \frac{A_3B_1 - A_1B_3}{A_2B_1 - A_1B_2}; \quad g = A_2; \quad h = B_2; \quad k = C_2 + \frac{C_0(A_3B_2 - A_2B_3)}{A_2B_1 - A_1B_2}. \end{aligned} \tag{8}$$

1.2. Si $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$, il résulte $gd - ch = 0$, ou $\rho = \frac{g}{c} = \frac{h}{d}$.

Dans ce cas, les équations paramétriques de l'échelle z sont :

$$x' = c\varphi + d\psi + e \qquad y' = \rho c\varphi + \rho d\psi + k$$

et après une transformation élémentaire, l'équation de l'échelle z, devient l'équation d' une droite : $y' - \rho x' = k - \rho e$.

Par conséquent l'équation (2) dégénère en une équation du troisième ordre nomographique

$$A_1x\chi(z) + \rho A_1y\chi(z) - A_1xy + A_1C_1x + A_1C_2y + A_3\chi(z) + A_1C_3 = 0 \tag{9}$$

où $\chi(z) = A_1\varphi(z) + B_1\psi(z)$.

Le cas où les deux échelles du nomogramme sont concurrentes, est distinct du point de vue affine du cas où les deux échelles son parallèles mais il n'est pas distinct de ce cas du point de vue projectif.

Vu qu'on considère les échelles régulières ce cas doit être traité séparément. Nous avons donc le déterminant de Soreau correspondant après application d'une transformation affine :

$$\begin{vmatrix} 0 & \rho x & 1 \\ a & y & 1 \\ c\varphi + d\psi + e & g\varphi + h\psi + \mathrm{k} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

En développant le premier membre de l'équation (10) on obtient :

$$\rho cx\varphi - cy\varphi + ag\varphi + \rho dx\psi - dy\psi + ah\psi + \rho(e - a)x - ey + ak = 0. \tag{11}$$

En égalant les coefficients de l'équation (11) à ceux de l'équation du quatrième ordre nomographique où $A_0 = B_0 = C_0 = 0$, on obtient le système :

$$\begin{array}{rrr} \rho c = A_1 & \rho d = B_1 & \rho(e - a) = C_1 \\ -c = A_2 & -d = B_2 & -e = C_2 \\ ag = A_3 & ah = B_3 & ak = C_3. \end{array} \tag{12}$$

Si $A_2 \neq 0$ la solution du système (12) est alors:

$$a = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1}; \quad c = -A_2; \quad d = -B_2; \quad e = -C_2; \quad g = \frac{A_1A_3}{A_2C_1 - A_1C_2}$$

$$h = \frac{A_1B_3}{A_2C_1 - A_1C_2}; \quad k = \frac{A_1C_3}{A_2C_1 - A_1C_2}; \quad \rho = -\frac{A_1}{A_2}. \tag{13}$$

La compatibilité du système (12) est assurée par la condition:

$$A_2B_1 = A_1B_2. \tag{14}$$

Si $A_2 = 0$ il résulte $A_1 = 0$ et la solution du système (12) s'obtient des formules (13) avec la condition (14) en remplaçant A_i par $B_i (i=1,2)$.

2. Nous allons étudier à présent le cas où l'une des échelles rectilignes du nomogramme est régulière, et l'autre projective. L'équation de Soreau prendra la forme:

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1 & a_2x + b_2 & 1 \\ \frac{c_1y + d_1}{y + f_1} & \frac{c_2y + d_2}{y + f_1} & 1 \\ e_1\varphi + g_1\psi + m_1 & e_2\varphi + g_2\psi + m_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

où $\qquad \varphi \equiv \varphi(z) \quad$ et $\quad \psi \equiv \psi(z)$.

Par une transformation affine on peut ramener les échelles rectilignes sur les axes de coordonnées; l'équation de Soreau est alors la suivante:

$$\begin{vmatrix} 0 & x + a & 1 \\ \frac{my + b}{y + c} & 0 & 1 \\ d\varphi + e\psi + f & g\varphi + h\psi + k & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, k, m$ sont les paramètres des échelles du nomogramme.

En développant le déterminant du premier membre de l'équation (16) on obtient une équation du quatrième ordre nomographique

$$\begin{aligned} &dxy\varphi + cdx\varphi + (mg + ad)y\varphi + (bg + acd)\varphi + exy\psi + cex\psi + \\ &+ (mh + ae)y\psi + (bh + ace)\psi + (f - m)xy + (cf - b)x + \\ &+ (mk + af - am)y + (bk + acf - ab) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Par l'identification des coefficients de l'équation (17) à ceux de l'équation (2) nous obtenons le système:

$$\begin{aligned} d &= A_0 & mh + ae &= B_2 \\ cd &= A_1 & bh + ace &= B_3 \\ mg + ad &= A_2 & f - m &= C_0 \\ bg + acd &= A_3 & cf - b &= C_1 \\ e &= B_0 & mk + af - am &= C_2 \\ ce &= B_1 & bk + acf - ab &= C_3 \end{aligned} \tag{18}$$

dont la solution nous fournit les valeurs des paramètres des échelles.

2.1. $A_1A_2 - A_0A_3 \neq 0$, $B_1B_2 - B_0B_3 \neq 0$, $C_1C_2 - C_0C_3 \neq 0$.

2.1.1. Si $B_2(A_1A_2 - A_0A_3) - A_2(A_2B_1 - A_3B_0) \neq 0$ les valeurs des paramètres sont données par les formules:

$$\begin{aligned} &a = \frac{A_2B_3 - A_3B_2}{A_0B_3 - A_1B_2 + A_2B_1 - A_3B_0}; \qquad b = \frac{A_1C_0 - A_0C_1}{A_1A_2 - A_0A_3}(A_1a - A_3); \\ &c = \frac{A_1}{A_0}; \quad d = A_0; \quad e = B_0; \quad f = \frac{A_0(A_1C_0 - A_0C_1)}{A_1A_2 - A_0A_3}a + \frac{A_0(A_2C_1 - A_3C_0)}{A_1A_2 - A_0A_3}; \\ &g = \frac{A_0A_3 - A_1A_2}{A_1C_0 - A_0C_1}; \qquad h = \frac{A_0A_3 - A_1A_2}{A_1C_0 - A_0C_1} \cdot \frac{B_0a - B_2}{A_0a - A_2}; \\ &k = \frac{A_0A_3 - A_1A_2}{A_1C_0 - A_0C_1} \cdot \frac{C_0a - C_2}{A_0a - A_2} \qquad m = \frac{A_1C_0 - A_0C_1}{A_1A_2 - A_0A_3}(A_0a - A_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Pour l'existence de la solution (19) il faut que les conditions suivantes soient remplies:

$$\begin{aligned} &A_0B_1 = A_1B_0 \\ &(A_0C_1 - A_1C_0)(A_2B_3 - A_3B_2)^2 + (A_2C_3 - A_3C_2)(A_0B_3 - A_1B_2 + \\ &+ A_2B_1 - A_3B_0)^2 - (A_0C_3 - A_1C_2 + A_2C_1 - A_3C_0)(A_0B_3 - \\ &- A_1B_2 + A_2B_1 - A_3B_0)(A_2B_3 - A_3B_2) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

2.1.2. Si $B_2(A_1A_2 - A_0A_3) - A_2(A_2B_1 - A_3B_0) = 0$ les valeurs des paramètres des échelles du nomogramme sont:

$$\begin{aligned} &a = \frac{A_2}{A_0}; \quad b = \frac{A_1C_0 - A_0C_1}{A_0}; \quad c = \frac{A_1}{A_0}; \quad d = A_0; \quad e = B_0; \quad f = C_0; \\ &g = \frac{A_0A_3 - A_1A_2}{A_1C_0 - A_0C_1}; \quad h = \frac{A_0B_3 - A_2B_1}{A_1C_0 - A_0C_1}; \quad k = \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_1C_0 - A_0C_1}; \quad m = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

La solution (21) a lieu dans les conditions:

$$A_2B_0 = A_0B_2, \qquad A_2C_0 = A_0C_2, \qquad A_1B_0 = A_0B_1. \tag{22}$$

2.2. $A_1A_2 - A_0A_3 = 0, \quad A_0C_1 - A_1C_0 = 0, \quad B_1B_2 - B_0B_3 \neq 0,$

$$C_1C_2 - C_0C_3 \neq 0.$$

D'ici il résulte que $A_0 = A_1 = 0$. Les valeurs des paramètres sont dans ce cas:

$$a = \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{A_3B_0 - A_2B_1}; \quad b = \frac{A_3(B_1C_0 - B_0C_1)}{A_3B_0 - A_2B_1}; \quad c = \frac{B_1}{B_0}; \quad d = 0;$$

$$e = B_0; \quad f = \frac{B_0(A_3C_0 - A_2C_1)}{A_3B_0 - A_2B_1}; \quad g = \frac{A_3B_0 - A_2B_1}{B_1C_0 - B_0C_1}; \quad h = \frac{B_0B_3 - B_1B_2}{B_1C_0 - B_0C_1}; \tag{23}$$

$$k = \frac{A_3(B_0C_3 - B_2C_1) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3)}{A_3(B_1C_0 - B_0C_1)}; \qquad m = \frac{B_0(A_3C_0 - A_2C_1)}{A_3B_0 - A_2B_1} - C_0.$$

La solution (23) a lieu si la condition suivante est remplie:

$$(A_3B_2 - A_2B_3)(A_3C_0 - A_2C_1) = (A_3B_0 - A_2B_1)(A_3C_2 - A_2C_3). \tag{24}$$

2.3. $A_1A_2 - A_0A_3 = 0, \quad A_0C_1 - A_1C_0 \neq 0, \quad B_1B_2 - B_0B_3 \neq 0,$

$$C_1C_2 - C_0C_3 \neq 0.$$

2.3.1. Si, de plus $B_2(A_0C_1 - A_1C_0) - A_2(B_0C_1 - B_1C_0) \neq 0$ les valeurs des paramètres des échelles seront données par les formules:

$$a = \frac{A_2}{A_0}; \qquad b = \frac{B_3(A_0C_1 - A_1C_0) - A_3(B_0C_1 - B_1C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3}; \qquad c = \frac{A_1}{A_0}$$

$$d = A_0; \qquad e = B_0; \qquad f = \frac{A_0(B_2C_1 - B_3C_0) - A_2(B_0C_1 - B_1C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3};$$

$$g = 0; \qquad h = \frac{1}{A_0} \cdot \frac{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1B_2 - A_0B_3)}{B_2(A_0C_1 - A_1C_0) - A_2(B_0C_1 - B_1C_0)}; \tag{25}$$

$$k = \frac{1}{A_0} \cdot \frac{(A_0C_2 - A_2C_0)(A_1B_2 - A_0B_3)}{B_2(A_0C_1 - A_1C_0) - A_2(B_0C_1 - B_1C_0)};$$

$$m = \frac{B_2(A_0C_1 - A_1C_0) - A_2(B_0C_1 - B_1C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3}.$$

Pour que le système (18) admette cette solution il faut que les conditions suivantes soient remplies;

$$A_1B_0 = A_0B_1$$

$$(A_0B_2 - A_2B_0)(A_0C_3 - A_2C_1) = (A_0B_3 - A_2B_1)(A_0C_2 - A_2C_0). \tag{26}$$

2.3.2. Si $B_2(A_0C_1 - A_1C_0) - A_2(B_0C_1 - B_1C_0) = 0$, nous aurons les valeurs suivantes des paramètres des échelles du nomogramme:

$$a = \frac{A_2}{A_0}; \quad b = \frac{A_1C_0 - A_0C_1}{A_0}; \quad c = \frac{A_1}{A_0}; \quad d = A_0; \quad e = B_0;$$

$$f = C_0; \quad g = 0; \quad h = \frac{A_0B_3 - A_3B_0}{A_1C_0 - A_0C_1}; \quad k = \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_1C_0 - A_0C_1}; \quad m = 0. \tag{27}$$

Les conditions requises pour l'existence de la solution (27) sont:

$$A_2B_0 = A_0B_2; \qquad A_2C_0 = A_0C_2; \qquad A_1B_0 = A_0B_1; \tag{28}$$

2.4. $A_1A_2 - A_0A_3 = 0; \quad B_1B_2 - B_0B_3 = 0; \quad C_1C_2 - C_0C_3 \neq 0.$

2.4.1. $A_0 = A_1 = 0$.

2.4.1.1. Si $A_2 \neq 0$, nous obtenons les valeurs suivantes pour les paramètres des échelles du nomogramme

$$a = \frac{B_2}{B_0}; \quad b = \frac{A_3(B_0C_1 - B_1C_0)}{A_2B_1 - A_3B_0}; \quad c = \frac{B_1}{B_0}; \quad d = 0; \quad e = B_0:$$

$$f = \frac{B_0(A_2C_1 - A_3C_0)}{A_2B_1 - A_3B_0}; \quad h = 0; \quad g = \frac{A_2B_1 - A_3B_0}{B_0C_1 - B_1C_0}; \tag{29}$$

$$k = \frac{(A_2B_1 - A_3B_0)(B_0C_2 - B_2C_0)}{A_2B_0(B_0C_1 - B_1C_0)}; \qquad m = \frac{A_2(B_0C_1 - B_1C_0)}{A_2B_1 - A_3B_0}.$$

La solution (29) existe si la condition:

$$B_2(A_2C_1 - A_3C_0) = B_0(A_2C_3 - A_3C_2) \tag{30}$$

est satisfaite.

2.4.1.2. Si $A_2 = 0$, les valeurs des paramètres s'obtiennent à l'aide des formules (29) à la condition de respecter les relations (30), à l'exception du paramètre k qui prend la valeur:

$$k = \frac{B_0C_3 - B_2C_1}{B_1C_0 - B_0C_1}.$$

2.4.2. $B_0 = B_1 = 0$

2.4.2.1. Si $B_2 \neq 0$ nous avons la solution suivante:

$$a = \frac{A_2}{A_0}; \quad b = \frac{B_3(A_0C_1 - A_1C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3}; \quad c = \frac{A_1}{A_0}; \quad d = A_0; \quad e = 0$$

$$f = \frac{A_0(B_2C_1 - B_3C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3}; \quad g = 0; \quad h = \frac{A_1B_2 - A_0B_3}{A_0C_1 - A_1C_0}; \tag{31}$$

$$k = \frac{(A_1B_2 - A_0B_3)\,(A_0C_2 - A_2C_0)}{A_0B_2(A_0C_1 - A_0C_1)}; \quad m = \frac{B_2(A_0C_1 - A_1C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3}.$$

La solution (31) est finie si la condition:

$$A_2(B_2C_1 - B_3C_0) = A_0(B_2C_3 - B_3C_2) \tag{32}$$

est satisfaite:

2.4.2.2. Si $B_2 = 0$, les valeurs des paramètres s'obtiennent à l'aide des formules (31) à la condition de respecter les relations (32), à l'exeption du paramètre k qui prend la valeur:

$$k = \frac{A_0C_3 - A_2C_1}{A_1C_0 - A_0C_1}$$

2.5. $A_1A_2 - A_0A_3 = 0, \quad B_1B_2 - B_0B_3 = 0, \quad C_1C_2 - C_0C_3 = 0.$

2.5.1. Si $A_0 = A_1 = 0$ nous rencontrons les sous-cas suivants

2.5.1.1. $C_0 \neq 0$. La solution du système (18) est dans ce cas:

$$\begin{aligned} &a = \frac{B_2}{B_0}; \quad b = -C_1; \quad c = \frac{B_1}{B_0}; \quad d = 0; \quad e = B_0; \quad f = 0; \\ &g = -\frac{A_2}{C_0}; \quad h = 0; \quad k = \frac{B_2C_0 - B_0C_2}{B_0C_0}; \quad m = -C_0. \end{aligned} \tag{33}$$

La condition pour l'existence de cette solution (33) est:

$$A_2C_1 = A_3C_0. \tag{34}$$

2.5.1.2. Si $C_0 = 0$ il résulte $A_2 = C_2 = 0$. La solution du système (18) est (33), en prenant pour les paramètres g et k les valeurs

$$g = -\frac{A_3}{C_1}; \quad k = \frac{B_2C_1 - B_0C_3}{B_0C_1}.$$

2.5.1.3. La solution du système (18) est la suivante

$$a = \frac{B_2}{B_0}; \quad b = \frac{A_3(B_0C_1 - B_1C_0)}{A_2B_1 - A_3B_0}; \quad c = \frac{B_1}{B_0}; \quad d = 0; \quad e = B_0;$$

$$f = \frac{B_0(A_2C_1 - A_3C_0)}{A_2B_1 - A_3B_0}; \quad g = \frac{A_2B_1 - A_3B_0}{B_0C_1 - B_1C_0}; \quad h = 0; \quad k = 0; \tag{35}$$

$$m = \frac{A_2(B_0C_1 - B_1C_0)}{A_2B_1 - A_3B_0}.$$

La condition

$$B_2C_0 = B_0C_2 \tag{36}$$

est nécessaire pour l'existence de la solution (35)

2.5.2. Si $B_0 = B_1 = 0$ nous avons à nouveau plusieurs cas.

2.5.2.1. $C_0 \neq 0$. Les valeurs des paramètres sont données par les formules:

$$\begin{aligned} &a = \frac{A_2}{A_0}; \quad b = -C_1; \quad c = \frac{A_1}{A_0}; \quad d = A_0; \quad e = 0; \quad f = 0; \\ &g = 0; \quad h = -\frac{B_2}{C_0}; \quad k = \frac{A_0C_2 - A_2C_0}{A_0C_0}; \quad m = -C_0. \end{aligned} \tag{37}$$

La condition pour l'existence de la solution (37) est:

$$B_2C_1 = B_3C_0. \tag{38}$$

2.5.2.2. $C_0 = 0$, il résulte $B_2 = C_2 = 0$, où la solution du système (18) est (37) à l'exception des paramètres h et k,

$$h = -\frac{B_3}{C_1}; \quad k = \frac{A_2C_1 - A_0C_3}{C_1}.$$

2.5.2.3. La solution du système (18) est:

$$a = \frac{A_2}{A_0}; \quad b = \frac{B_3(A_0C_1 - A_1C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3}; \quad c = \frac{A_1}{A_0}; \quad d = A_0; \quad e = 0;$$

$$f = \frac{A_0(B_2C_1 - B_3C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3}; \quad g = 0; \quad h = \frac{A_1B_2 - A_0B_3}{A_0C_1 - A_1C_0}; \quad k = 0; \tag{39}$$

$$m = \frac{B_2(A_0C_1 - A_1C_0)}{A_1B_2 - A_0B_3}.$$

La condition pour l'existence de la solution (39) est :

$$A_2C_0 = A_0C_2. \tag{40}$$

Nous étudierons séparément le cas où les deux échelles rectilignes sont parallèles. Après application d'une transformation affine, le déterminant de Soreau correspondant sera

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 1 & \dfrac{ay+b}{y+c} & 1 \\ d\varphi + e\psi + f & g\varphi + h\psi + k & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{41}$$

Après développement du premier membre de l'équation (41) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & dxy\varphi + cdx\varphi + (g - ad)y\varphi + (cg - bd)\varphi + exy\psi + cex\psi + \\ & + (h - ae)y\psi + (ch - be)\psi + (f - 1)xy + c(f - 1)x + \\ & (k - af)y + ck - bf = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Par identification des coefficients de la forme du quatrième ordre nomographique, aux coefficients de l'équation (42) on obtient le système :

$$\begin{array}{lll} d = A_0 & e = B_0 & f - 1 = C_0 \\ cd = A_1 & ce = B_1 & c(f - 1) = C_1 \\ g - ad = A_2 & h - ae = B_2 & k - af = C_2 \\ cg - bd = A_3 & ch - be = B_3 & ck - bf = C_3. \end{array} \tag{43}$$

La solution de ce système nous fournit les conditions pour qu'une équation du quatrième ordre nomographique puisse se représenter par un nomogramme à deux échelles rectilignes parallèles et à une échelle courbe quelconque.

Si $A_0 \neq 0$, les paramètres des échelles du nomogramme sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} & a = \text{arbitraire}; \quad b = \frac{A_0A_1a + A_1A_2 - A_0A_3}{A_0^2}; \quad c = \frac{A_1}{A_0}; \quad d = A_0; \\ & e = B_0; \quad f = C_0 + 1; \quad g = A_0a + A_2; \quad h = B_0a + B_2; \\ & k = (C_0 + 1)a + C_2. \end{aligned} \tag{44}$$

Pour que la solution (44) existe, il faut remplir les conditions :

$$\begin{gathered} A_1B_0 = A_0B_1, \quad A_1C_0 = A_0C_1 \\ A_0B_3 - A_1B_2 + A_2B_1 - A_3B_0 = 0 \\ A_0(A_0C_3 - A_1C_2 + A_2C_1 - A_3C_0) = A_0A_3 - A_1A_2. \end{gathered} \tag{45}$$

Si $A_0 = 0$ il résulte $A_1 = 0$ et les paramètres des échelles du nomogramme seront donnés par les formules :

$$\begin{aligned} & a = \text{arbitraire}; \quad b = \frac{A_3B_0a + A_3B_2 - A_2B_3}{A_2B_0}; \quad c = \frac{A_3}{A_2}; \\ & d = 0; \quad e = B_0; \quad f = C_0 + 1; \quad g = A_2; \quad h = B_0a + B_2; \\ & k = (C_0 + 1)a + C_2. \end{aligned} \tag{46}$$

dans les conditions

$$\begin{gathered} A_3B_0 = A_2B_1, \quad A_3C_0 = A_2C_1. \\ A_2(B_0C_3 - B_1C_2 + B_2C_1 - B_3C_0) = A_2B_3 - A_3B_2. \end{gathered} \tag{47}$$

Si $A_0 = A_2 = 0$ il résulte $A_1 = A_3 = 0$ et l'équation (2) dégénère en une équation du troisième ordre nomographique, l'échelle z étant une échelle fonctionnelle.

3. Nous passons maintenant au cas où les deux échelles rectilignes du nomogramme sont projectives. L'équation de Soreau est alors :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_1x + b_1}{x + c_1} & \dfrac{a_2x + b_2}{x + c_1} & 1 \\ \dfrac{d_1y + e_1}{y + f_1} & \dfrac{d_2y + e_2}{y + f_1} & 1 \\ g_1\varphi + h_1\psi + k_1 & m_1\varphi + n_1\psi + p_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{48}$$

où $\varphi \equiv \varphi(z)$, $\psi \equiv \psi(z)$

A l'aide d'une transformation affine (ou projective), nous pouvons ramener les supports des échelles rectilignes sur les axes de coordonnées :

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{x+a}{x+b} & 1 \\ \dfrac{y+c}{y+d} & 0 & 1 \\ e\varphi + f\psi + h & i\varphi + j\psi + k & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{49}$$

où $a, b, c, d, e, f, h, i, j, k$ sont les paramètres des échelles du nomogramme.

Si nous développons le premier membre de l'équation (49), nous obtenons l'équation suivante du quatrième ordre nomographique

$$\begin{aligned} & (i + e)xy\varphi + (ci + de)x\varphi + (bi + ae)y\varphi + (bci + ade)\varphi + (j + f)xy\psi + \\ & (cj + df)x\psi + (bj + af)y\psi + (bcj + adf)\psi + (k + h - 1)xy + \\ & + (ck + dh - c)x + (bk + ah - a)y + (bck + adh - ac) = 0. \end{aligned}$$

Pour trouver les conditions dans lesquelles une équation du quatrième ordre nomographique est représentable par un nomogramme à deux échelles rectilignes projectives et une échelle courbe quelconque, nous allons identifier les coefficients des équations (2) et (50). Le système obtenu de cette manière est:

$$
\begin{aligned}
&i + e = A_0 && bj + af = B_2\\
&ci + de = A_1 && bcj + adf = B_3\\
&bi + ae = A_2 && k + h - 1 = C_0\\
&bci + ade = A_3 && ck + dh - c = C_1\\
&j + f = B_0 && bk + ah - a = C_2\\
&cj + df = B_1 && bck + adh - ac = C_3
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Une solution de ce système (51) est la suivante:

$$
a = \frac{A_0(A_2B_0 - A_0B_2)c^2 + [M - A_0(A_2B_1 - A_1B_2) + A_1(A_0B_2 - A_2B_0)]c + N + A_1(A_2B_1 - A_1B_2)}{(A_0B_1 - A_1B_0)(A_1 - A_0c)}
$$

$$
b = \frac{(A_0B_2 - A_2B_0)c + (A_2B_1 - A_1B_2)}{A_0B_1 - A_1B_0}
$$

$$
c = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1B_3 - A_3B_1)}}{2(A_0B_2 - A_2B_0)}
$$

$$
\begin{aligned}
&d = c + \frac{Mc + N}{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1 - A_0c)}; && e = \frac{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1 - A_0c)^2}{Mc + N}\\
&f = \frac{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1 - A_0c)(B_1 - B_0c)}{Mc + N}; && h = 1 + \frac{R(A_1 - A_0c)}{Mc + N}\\
&i = A_0 - \frac{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1 - A_0c)^2}{Mc + N}; && k = C_0 - \frac{R(A_1 - A_0c)}{Mc + N}\\
&j = B_0 - \frac{(A_0B_2 - A_2B_0)(A_1 - A_0c)(B_1 - B_0c)}{Mc + N}
\end{aligned}
\tag{52}
$$

où

$$
\begin{aligned}
M &= (A_0C_2 - A_2C_0)(A_0B_1 - A_1B_0) + (A_1C_0 - A_0C_1)(A_0B_2 - A_2B_0)\\
N &= (A_2C_1 - A_1C_2)(A_0B_1 - A_1B_0) + (A_1C_0 - A_0C_1)(A_2B_1 - A_1B_2)\\
P &= A_0B_3 + A_1B_2 - A_2B_1 - A_3B_0\\
R &= C_0(A_2B_0 - A_0B_2)c + B_1(A_0C_2 - A_2C_0) + A_1(B_2C_0 - B_0C_2).
\end{aligned}
$$

La solution (52) a lieu dans les conditions:

$$
f(ad - bc) = B_3 - B_0\, bc
$$

$$
\frac{A_1 - A_0c}{C_1 - C_0c} = \frac{A_3 - A_0bc}{C_3 - C_0bc + ac - bc}. \tag{53}
$$

Une autre solution du système (51) est la suivante:

$$
\begin{aligned}
&a = \frac{A_2}{A_0}; \quad b = \frac{A_3B_0B_2 + A_0B_2B_3 - A_1B_2^2 - A_2B_0B_3}{A_0B_1B_2 - A_1B_0B_2 - A_2B_0B_1 + A_3B_0^2};\\
&c = \frac{A_0B_1B_3 + A_3B_0B_1 - A_2B_1^2 - A_1B_0B_3}{A_0B_1B_2 - A_1B_0B_2 - A_2B_0B_1 + A_3B_0^2}; \quad d = \frac{A_1}{A_0}; \quad e = A_0;\\
&f = \frac{A_0(B_0B_3 - B_1B_2)}{A_0B_3 - A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_0}; \quad h = \frac{A_0(C_0C_3 - C_1C_2)}{A_0C_3 - A_1C_2 - A_2C_1 + A_3C_0};\\
&i = 0; \quad j = \frac{A_3B_0^2 - A_1B_0B_2 - A_2B_0B_1 + A_0B_1B_2}{A_0B_3 - A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_0};\\
&k = 1 + \frac{A_3C_0^2 - A_1C_0C_2 - A_2C_0C_1 + A_0C_1C_2}{A_0C_3 - A_1C_2 - A_2C_1 + A_3C_0}.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

La solution (54) a lieu dans les conditions:

$$
\begin{aligned}
&\frac{A_0B_2B_3 - A_1B_2^2 - A_2B_0B_3 + A_3B_0B_2}{A_0B_1B_2 - A_1B_0B_2 - A_2B_0B_1 + A_3B_0^2}\left(1 + \frac{A_0C_1C_2 - A_1C_0C_2 - A_2C_0C_1 + A_3C_0^2}{A_0C_3 - A_1C_2 - A_2C_1 + A_3C_0}\right) - \frac{A_2}{A_0} =\\
&\qquad = C_2 - \frac{A_2(C_0C_3 - C_1C_2)}{A_0C_3 - A_1C_2 - A_2C_1 + A_3C_0};\\
&\frac{A_0B_1B_3 - A_1B_0B_3 - A_2B_1^2 + A_3B_0B_1}{A_0B_1B_2 - A_1B_0B_2 - A_2B_0B_1 + A_3B_0^2} = \frac{A_0C_1C_3 - A_1C_0C_3 - A_2C_1^2 + A_3C_0C_3}{A_0C_1C_2 - A_1C_0C_2 - A_2C_0C_1 + A_3C_0^2};\\
&\qquad A_1A_2 = A_0A_3.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Une autre solution du système (51) est la suivante

$$
\begin{aligned}
&a = \frac{B_2C_0 + B_2 - B_0C_2}{B_0}; \quad b = \frac{B_2}{B_0}; \quad c = \frac{B_1}{B_0};\\
&d = \frac{A_1A_3B_0 + A_0A_1B_3 - A_1^2B_2 - A_0A_3B_1}{A_0^2B_3 - A_0A_2B_1 - A_0A_1B_2 + A_1A_2B_0}\\
&e = \frac{A_0^2B_3 - A_0A_2B_1 - A_0A_1B_2 + A_1A_2B_0}{A_0B_3 - A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_0}; \quad f = 0; \quad h = 0;\\
&i = \frac{B_0(A_0A_3 - A_1A_2)}{A_0B_3 - A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_0}; \quad j = B_0; \quad k = 1 + C_0.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Cette solution a lieu si les conditions suivantes sont remplies:

$$B_1B_2 = B_0B_3, \qquad C_1C_2 = C_0C_3, \qquad B_1C_0 = B_0C_1,$$

$$\frac{A_2A_3B_0 + A_0A_2B_3 - A_2^2B_1 - A_0A_3B_2}{A_0^2B_3 - A_0A_2B_1 - A_0A_1B_2 + A_1A_2B_0} = \frac{B_2C_0 + B_2 - B_0C_2}{B_0}. \tag{57}$$

Une autre solution du système (51) est la suivante

$$\begin{aligned} &a = \frac{A_2}{A_0}; \quad b = \frac{B_2}{B_0}; \quad c = \frac{B_1}{B_0}; \quad d = \frac{A_1}{A_0}; \quad e = A_0; \quad f = 0; \\ &h = \frac{A_0(B_0C_1 - B_1C_0)}{A_1B_0 - A_0B_1}; \quad k = 1 + \frac{B_0(A_1C_0 - A_0C_1)}{A_1B_0 - A_0B_1}; \quad i = 0; \quad j = B_0. \end{aligned} \tag{58}$$

Les conditions pour l'existence de la solution (58) sont

$$\begin{aligned} &A_1A_2 = A_0A_3, \qquad B_1B_2 = B_0B_3, \\ &(A_1B_0 - A_0B_1)(A_0B_2 - A_2B_0 - A_0B_0C_2) + A_0B_0B_2(A_1C_0 - A_0C_1) + \\ &\qquad + A_0A_2B_0(B_0C_1 - B_1C_0) = 0 \\ &(A_1B_0 - A_0B_1)(A_0B_3 - A_2B_1 - A_0B_0C_3) + A_0B_0B_3(A_1C_0 - A_0C_1) + \\ &\qquad + A_0A_3B_0(B_0C_1 - B_1C_0) = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Il existe encore d'autres solutions du système (51), que nous ne détaillerons pas ici.

Dans ce travail on a considéré les seuls nomogrammes à échelles rectilignes régulières ou projectives ce qui a comme suite la considération des seules équations à trois variables de la forme (2). Les résultats obtenus peuvent s'étendre aussi aux nomogrammes à échelles fonctionnelles, qui conduisent à l'équation à trois variables du quatrième ordre nomographique de forme générale:

$$\begin{aligned} &A_0\varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z) + A_1\varphi_1(x)\varphi_3(z) + A_2\varphi_2(y)\varphi_3(z) + A_3\varphi_3(z) + \\ &+ B_0\varphi_1(x)\varphi_2(y)\psi_3(z) + B_1\varphi_1(x)\psi_3(z) + B_2\varphi_2(y)\psi_3(z) + B_3\psi_3(z) + \\ &C_0\varphi_1(x)\varphi_2(y) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(y) + C_3 = 0. \end{aligned} \tag{60}$$

Exemples:

1. Considérons l'équation du quatrième ordre nomographique:

$$x\varphi + 3y\varphi + 10\varphi + 2x\psi + y\psi + 5\psi - xy + 2x + y + 8 = 0.$$

Dans ce cas les conditions (6) sont remplies et:

$$A_2B_1 - A_1B_2 = 6 - 1 \neq 0$$

Les paramètres de échelles du nomogramme d'après les formules (8) sont:

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 2, \quad e = 5, \quad g = 3, \quad h = 1, \quad k = 2.$$

L'équation de Soreau correspondente est:

$$\begin{vmatrix} 0 & x + 1 & 1 \\ y + 3 & 0 & 1 \\ \varphi + 2\psi + 5 & 3\varphi + \psi + 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Représenter nomographiquement l'équation:

$$2y\varphi + \varphi + xy\psi + 3x\psi + 9y\psi + 7\psi - 3xy - 4x - y - 3 = 0.$$

Nous avons $A_1A_2 - A_0A_3 = 0$, $A_0C_1 - A_1C_0 = 0$, $B_1B_2 - B_0B_3 \neq 0$, $C_1C_2 - C_0C_3 \neq 0$.
Nous sommes par conséquent dans le cas 2.2. Les paramètres des échelles du nomogramme sont:

$$a = 1, \; b = 1, \; c = 3, \; d = 0, \; e = 1, \; f = -1, \; g = 1, \; h = 4, \; k = 1, \; m = 2.$$

L'équation de Soreau est alors:

$$\begin{vmatrix} 0 & x + 1 & 1 \\ \dfrac{2y + 1}{y + 3} & 0 & 1 \\ \psi - 1 & \varphi + 4\psi + 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. On donne l'équation du quatrième ordre nomographique:

$$3xy\varphi + 7x\varphi + 5y\varphi + 13\varphi + 2xy\psi + 4x\psi + 3y\psi + 7\psi + 8xy + 14x + 12y + 26 = 0.$$

Les paramètres des échelles du nomogramme d'après les formules (52) sont:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1; \; b_1 = 2; \; c_1 = 3; \; d_1 = 1; \; e_1 = 1; \; f_1 = 1; \; h_1 = 5; \\ &i_1 = 2; \; j_1 = 1; \; k_1 = 4. \\ &a_2 = 0; \; b_2 = 1; \; c_2 = 1; \; d_2 = 2; \; e_2 = -2; \; f_2 = -1; \\ &h_2 = -3; \; i_2 = 5; \; j_2 = 3; \; k_2 = 12. \end{aligned}$$

Seule la première solution vérifie les conditions (53). Dans ce cas l'équation de Soreau est:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{x+1}{x+2} & 1 \\ \frac{y+3}{y+1} & 0 & 1 \\ \varphi+\psi+5 & 2\varphi+\psi+4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bal L., Radó F., *Lecții de nomografie*. Ed. Tehnică București (1956).

[2] Bal L., Mihoc M., *Sur une classe de nomogrammes à échelles de type donné*. Mathematica, **8** (31), 2, 199–216 (1966).

[3] Mihoc M., *Asupra nomogramelor de gen zero cu două scări regulate și una proiectivă*. Studii și cercetări matematice, **19**, *5*, 715–721,

Ce travail a été présenté au Colloque sur la Théorie de l'Approximation des Fonctions du 5–12 Septembre 1967, à Cluj (Roumanie).

MATHEMATICA VOL. 11 (34), 2, 1969, pp. 299–305

SOLUTIONS BOUNDED IN THE FUTURE FOR SOME SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

by

IOAN MUNTEAN

Cluj

1. In an earlier note [1] we established the following conditions of existence of the harmonic oscillations for the nonautonomous nonlinear system of two differential equations

$$\dot{x} = h(y), \ \dot{y} = -f(x, y)y - g(x) + e(t). \tag{1}$$

Namely, if: 1°. the functions $e, g, h: R \to R$, $f: R^2 \to R$ are continuous and satisfy to a certain requirement of uniqueness of each initial value problem for the system (1) and, moreover, the function e is periodic;

2°. there are the positive numbers a and M such that for all pair of real numbers (x, y), with $|x| \geqq a$ and $0 \leqq y \cdot \operatorname{sign} x \leqq a$, we have $f(x, y) > -M$;

3°. there are the positive numbers b and $A \geqq \max\limits_{|x| \leqq a} |g(x)|$, such that for all pair of real numbers (x, y), with $x^2 + y^2 \geqq b$ and $|y| \geqq a$, we have $|y|\ f(x, y) > E + A$, where $E = \max\limits_{t \in R} |e(t)|$;

4°. $$\varliminf_{|x|\to\infty} g(x) \cdot \operatorname{sing} x > Ma + E;$$

5°. for each real number $y \neq 0$ we have $yh(y) > 0$ and

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^y h(\eta)\, d\eta = \infty, \ \lim_{y\to-\infty} \int_0^y h(\eta)\, d\eta = \infty; \tag{2}$$