

SUR UN TYPE D'INTERPOLATION TOPOLOGIQUE

par
PETRU PETRIȘOR
à Cluj

Dans ce travail on cherche un certain type d'interpolation sur la famille de toutes les topologies définies sur un ensemble donné et l'on donne en même temps une caractérisation de la topologie par rapport à laquelle le problème d'interpolation étudié est possible.

La topologie qui caractérise le problème d'interpolation étudié est générée par une mesure régulière.

Soit E un ensemble et $A \subset P(E)$ un clan sur lequel est définie une mesure μ .

Sur la famille $\mathcal{A}$ nous définissons le relation d'ordre α ainsi: (1) $A < B$ seulement si $L = B - A$ est μ -mesurable et s'il existe un σ -anneau ainsi que $B - A \in S^\mu$.

Nous allons désigner par $<$ la relation d'ordre définie dans le travail [1].

Soient $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $B < A$.

De la définition de la relation $<$ on déduit que $\mu(B - A) = 0$.

Désignons par S_0^μ la famille des ensembles $A \in \mathcal{A}$ qui sont triviaux par rapport à la mesure μ . Cette famille forme un σ -anneau et de plus $A - B \in S_0^\mu$. De la définition de la relation d'ordre $<$ on déduit que $A > B$.

Soient $A, B \in \mathcal{A}$ tel que $A < B$. La ensemble $L = B - A$ est mesurable par rapport à la mesure μ et de plus il existe un σ -anneau S tel que $B - A \in S^\mu$. Aussi peut on construire la mesure β de telle manière que:

$$\beta: \mathcal{A} \rightarrow R, \beta \ll S^\mu.$$

De $B - A \in S^\mu$ on déduit que $\beta(B - A) = 0$ et de la définition de la mesure β il résulte qu'on peut trouver l'ensemble $C \in S^\mu$ de manière qu'on ait:

$$(2) \quad \mu(B - A - C) = 0.$$

À titre d'ensemble C on peut prendre tout $Y \supset C$. De cette propriété de l'ensemble C on déduit que: en général

$$\mu(B - A) > 0.$$

Soit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ une sous famille.

Supposons que la mesure μ est complète-Dedekind par rapport à l'ordre $<$ donc:

$$(3) \quad \exists_{S \in \mathfrak{M}^\mu} \forall_{B \in \mathfrak{A}} B <^\mu S$$

où $\mathfrak{M}^\mu$ est la famille de tous les ensembles μ -mesurables. De $B <^\mu S$ on déduit que l'ensemble $L = S - B$ est μ -mesurable et qu'il existe un σ -anneau S^μ tel que:

$$S - B \in S^\mu.$$

On peut construire une mesure $\beta: \mathfrak{A} \rightarrow R$ de manière que $\beta \ll S^\mu$. De $S - B \in S^\mu$ on déduit que $\beta(S - B) = 0$. Il existe l'ensemble $L \in S^\mu$ tel que:

$$\mu(S - B - L) = 0.$$

Cette égalité nous conduit à:

$$\mu[S - (B \cup L)] = 0.$$

L'ensemble S étant mesurable par rapport à la mesure μ on trouve:

$$B \cup L < S.$$

La relation d'ordre $<$ étant topogène on trouve: $B < S$, donc la mesure μ est complète-Dedekind par rapport à l'ordre $<$ et alors on a la

Proposition 1. Si la mesure μ est complète — Dedekind par rapport à l'ordre $<$ alors elle sera complète-Dedekind aussi par rapport à l'ordre $<^{(\mu)}$.

Remarque: En employant les notations précédentes et supposant que:

$$\exists_{S \in \mathfrak{M}^\mu} \forall_{B \in \mathfrak{A}} B < S$$

la relation $B < S$ nous conduit à la relation $\mu(S - B) = 0$, donc $S - B \in S^\mu$. De plus, $S - B \in \tau(\mu)$.

La dernière relation nous montre que: $B <^{(\mu)} S$.

On dit d'un ensemble X qu'il a la propriété d'interpolation topologique par rapport à une famille $\mathfrak{T}$ de topologies si:

$$T_1, T_2 \in \mathfrak{T}, \exists_{T \in \mathfrak{T}} T_1 < T < T_2$$

Soit X un espace topologique faible et qui est F_σ -absolu. Notons avec X^α une de ses compactifications. En vertu d'un résultat de YU.M. SMIRNOV il y a une application isotone définie sur famille de toutes les compactifications de l'espace topologique avec valeurs dans l'ensemble de toutes les proximités de l'espace X .

Soit ξ la proximité qui correspond à la compactification X^α par l'application ci-dessus.

Considérons l'espace de proximité (X, ξ) . On obtient cet espace à partir d'un seul espace topogène.

Soit $(X, \mathfrak{U})$ cet espace.

La relation $\mathfrak{U}$ étant topogène et symétrique est parfaite et induit sur X une topologie μ .

Sur l'ensemble X nous allons considérer 2 topologies: T et μ .

Si la topologie μ était la topologie induite par X^α , alors il faut avoir la relation: $\mu < T$ qui est en contradiction avec l'hypothèse que X est un espace faible et F_σ -absolu. Si toute autre topologie μ vérifie la relation $\mu > T$, alors la topologie T est une topologie minimale.

L'espace (X, T) est un espace F_σ -absolu et donc n'est pas absolument fermé.

La classe des espaces absolument fermés contient la classe des espaces minimaux et donc (X, T) n'est pas minimal, ce qui représente une contradiction. Donc il existe au moins une topologie non compacte μ telle que $\mu < T$.

Supposons qu'il existe la topologie compacte ν telle que:

$$\mu < \nu < T.$$

La topologie μ étant moins fine que la topologie ν est compacte, mais cela est en contradiction avec le raisonnement ci dessus. Désignons par K_E la famille de toutes les topologies compactes définies sur X .

On obtient le résultat suivant:

THÉORÈME. Tout espace E faible qui est F_σ -absolu, n'a pas la propriété d'interpolation topologique par rapport à la famille K .

Soit (X, T) un espace topologique faible et F_σ -absolu. Soient T_1, T_2 deux topologies définies sur l'ensemble de telle manière que $T_1 < T_2$. Puisque (X, T) est l'espace faible et F_σ -absolu, on déduit que T_1, T_2 ne sont pas compacts. Désignons par Ω la famille de toutes les topologies définies sur X qui sont moins fines que la topologie T_2 . Donc $T_1 \in \Omega$ et $T_2 \notin \Omega$. La famille Ω étant non vide et inductivement ordonnée, on déduit qu'elle a un élément maximal T' , donc:

$$T_1 < T' < T_2.$$

Il y a une seule topologie généralisée T_g qui est la génératrice de la topologie T' , donc il existe une relation $<$ parfaite définie sur $P(X)$ qui induit la topologie T' . Cette relation étant la génératrice d'une structure topogène a donc la propriété:

$$A < B \Rightarrow \exists_{Y \in P(X)} A < Y < B.$$

Désignons par R la relation $<$ et par R_u la relation $<^u$.
Soit $(A, B) \in R$. Il existe l'ensemble G ouvert par rapport à la topologie T' que:

$$A \subset G \subset B.$$

La relation R étant topogène on déduit que la famille:

$$\{U : A < U < B\}$$

est base de topologie sur $P(X)$. Cette topologie sera désignée par τ_R .

Une fonction d'ensemble à valeurs réelles s'appelle régulière si elle est continue par rapport à cette topologie. Si cette fonction d'ensemble est continue sur l'ensemble A , alors l'ensemble A sera appelé régulier.

Sur la famille $P(X)$ définissons la relation d'ordre $<^{(m)}$ où m est une mesure régulière complète-Dedekind et dont la propriété d'interpolation est réalisée sur la classe des ensembles m -réguliers.

De $A < B$ on déduit qu'il existe un ensemble m -régulier tel que:

$$A < Y < B.$$

De la définition ci-dessus et de la dernière relation on déduit:

$$\bigvee_{I \subset B-A} m(I) = 0.$$

C'est-à-dire que $A <^{(m)} B$.

En supposant que $A <^{(m)} B$, il existe un ensemble C tel que:

$$A <^{(m)} C <^{(m)} B.$$

Cette relation subsiste même si l'on remplace C par n'importe quel sur ensemble de C .

L'espace initial étant T_1 -séparé l'on déduit qu'il y a un ensemble U qui est T_1 -ouvert et que $G > C$. Donc:

$$A <^{(m)} G <^{(m)} B.$$

C'est-à-dire que $A < B$.

Par conséquent T' est généré par une mesure régulière.

THÉOREME. Un espace topologique faible F_0 -absolu a la propriété d'interpolation par rapport à la classe des topologies générées par une mesure régulière, et complète-Dedekind.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kelley J. L., *Decomposition and representation theorems in measure theory*. Math. Ann. 163, 89—94 (1966).

Reçu le 12. VII. 1969.

ЗАМЕЧАНИЯ О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Ю. А. ШАШКИН

Свердловск

1. В книге А. Н. КОЛМОГорова и С. В. ФОМИНА [5] читателю предлагается показать, что в теореме ХАНА — БАНАХА [3], [1] о продолжении линейного функционала можно опустить условие конечности мажорирующего функционала $p(x)$. Настоящая заметка посвящена уточнению этого утверждения. Именно, здесь дано необходимое и достаточное условие продолжения линейного функционала, обладающего субаддитивной, неотрицательно однородной (в более общем случае — выпуклой) мажорантой, которая в отличие от классического случая может принимать бесконечные значения. Интересно отметить, что частными случаями полученного здесь общего критерия являются теоремы о продолжении линейного функционала, положительного на конусе (см. [6], [10], [9], [2]), или ортогонального некоторому подпространству. Приводимый ниже критерий продолжения функционала с выпуклой мажорантой обобщает теорему Х. НАКАНО [8].

2. Мы применяем в этой заметке следующие обозначения: E — действительное линейное пространство (вообще говоря, без топологии); G — его собственное линейное подпространство; θ — нулевой вектор пространства E ; $E^\#$ и $G^\#$ — (алгебраически) сопряженные пространства; $p(x)$ — функционал, определенный на E и подчиненный следующим условиям

$$(1) -\infty < p(x) \leq +\infty,$$

$$(2) p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$(3) p(tx) = tp(x), t \geq 0$$

(субаддитивность),

(неотрицательная однородность).

При дополнительном предположении

$$(4) p(x) \geq 0$$

мы будем рассматривать выпуклое множество $K = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$.