

SUR LE PROBLÈME BILOCAL RELATIF AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

par
DUMITRU RIPIANU
à Cluj

§ 1.

Dans cette note on traite un cas particulier d'un problème qui a été abordé dans des conditions plus générales ([1], [2]).

On considère une équation différentielle du second ordre, de forme normale.

$$(1) \quad y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions à dérivées première et seconde continues et uniformément bornées dans l'intervalle $[0, \infty)$. On désigne par $L = (l_1, l_2)$ une paire de nombres donnés, non tous nuls, par $a = a(x)$ la fonction vecteur $(a_1(x), a_2(x))$, par $\varphi_{a,L}(x)$ la solution de l'équation (1) qui vérifie les conditions de Cauchy $\varphi_{a,L}(0) = l_0 \neq 0$, $\varphi'_{a,L}(0) = l_1$ et par $(0, \lambda_{p,D,L})$ l'intervalle ouvert de longueur maximale dans lequel on a $\varphi_{a,L}^{(p)}(x) \neq 0$, quelque soit l'équation (1) dont la fonction vecteur a vérifie les conditions requises dans l'hypothèse H_1 ci-dessous, le nombre p étant égal à 0 ou à 1.

Le problème consiste à déterminer le nombre $\lambda_{p,D,L}$.

Dans cette note on donne une délimitation inférieure du nombre $\lambda_{0,D,L}$ (qui sera désigné par la suite pour la

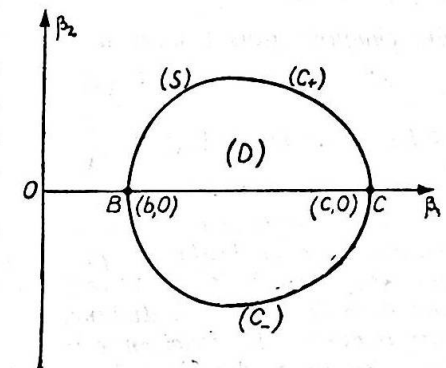


Fig. 1

commodité par λ). Moyennant une hypothèse supplémentaire on obtient un résultat plus précis, en déterminant un ensemble $\mathfrak{M}$ de nombres qui comprend le nombre λ . Les procédés indiqués pour l'obtention de la délimitation inférieure, respectivement de l'ensemble $\mathfrak{M}$ peuvent s'adapter, avec des modifications insignifiantes, au cas $p = 1$.

On désignera, selon l'usage, par $()$ un intervalle ouvert et par $[]$ un intervalle fermé.

On fera relativement aux coefficients de l'équation (1) les hypothèses suivantes:

Hypothèse H_1 . Quand x parcourt l'intervalle $[0, \infty)$, le point M de coordonnées $\beta_1 = a_1(x)$, $\beta_2 = a_2(x)$ est situé dans un domaine fermé (D) borné, dans un plan rapporté aux axes $O\beta_1\beta_2$ par l'arc $\widehat{BC}_+C$ de la courbe d'équation $\beta_2^2 = P(\beta_1)$ et par son symétrique $\widehat{BC}_-C$ par rapport à l'axe $O\beta_1$ (fig. 1). $P(\beta_1)$ est une fonction donnée, non négative et à dérivées première et seconde continues dans l'intervalle (b, c) déterminé par deux racines consécutives b et c de $P(\beta_1)$.

Remarque 1. Nous maintiendrons l'hypothèse (faite en [1]), que dans tout point de la frontière (S) du domaine (D) on a

$$(1_1) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \beta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \beta_2}\right)^2 > 0$$

où $F(\beta_1, \beta_2) = \beta_2^2 - P(\beta_1) = 0$ est l'équation de (S) . Ceci donne

(1₂) $4P^2(\beta_1) + P'^2(\beta_1) > 0$ pour tout $\beta_1 \in [b, c]$ c'est-à-dire $P'(b)P'(c) \neq 0$, c'est-à-dire que les racines b et c sont simples.

Hypothèse H_2 . 1° Les fonctions de la variable α_1

$$A^-(\alpha_1) = 2\sqrt{P(\alpha_1)}[2P(\alpha_1) - \alpha_1 P'(\alpha_1)] - P'^2(\alpha_1)$$

$$A^+(\alpha_1) = -2\sqrt{P(\alpha_1)}[2P(\alpha_1) - \alpha_1 P'(\alpha_1)] - P'^2(\alpha_1)$$

ont chacune dans l'intervalle $[b, c]$ un nombre fini (au plus) de racines

2°. Les fonctions $A^-(\alpha_1)$ et $\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} - \frac{l_1}{l_0}$ n'ont aucune racine commune et les fonctions $A^+(\alpha_1)$ et $\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} + \frac{l_1}{l_0}$ n'ont aucune racine commune dans l'intervalle $[b, c]$.

Hypothèse H_3 . Les dérivées $a'_1(x)$ des coefficients $a_1(x)$ de (1) jouissent de la propriété que la fonction-limite de toute suite convergente $\{a'_{1,n}(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) de telles fonctions ne possède pas de points d'accumulation des racines à distance finie, exception faite des intervalles éventuels sur lesquels cette fonction est identiquement nulle.

Les deux dernières hypothèses H_4 et H_5 seront formulées dans les termes utilisés respectivement aux §§ 2 et 3.

§ 2.

Dans ce paragraphe on va déduire quelques relations qui fourniront les procédés mentionnés au § 1.

On désignera par $R[f]$ la plus petite racine positive de la fonction f , supposée définie dans l'intervalle $[0, \infty)$ (si $f(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$, on écrira par convention $R[f] = \infty$). On a établi ([1]) l'existence d'une fonction-vecteur minimisante

$$(1_3) \quad \alpha^P(x) = (\alpha_1^P(x), \alpha_2^P(x)) \text{ avec } \alpha_1^P(x), \alpha_2^P(x) \in C^{(1)}[0, \infty),$$

qui jouit de la propriété que $\lambda_{p,D,L} = R[\varphi_{\alpha^P,L}(x)]$ et que cette fonction vérifie un système d'équations différentielles (qui d'ailleurs ne dépend pas de p) et qui dans notre cas ($n = 2$) s'écrit

$$(2) \quad \begin{cases} F(\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2)} \Big|_{\beta_1 = \alpha_1(x)} \right] + \left[\frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2)} \Big|_{\beta_1 = \alpha_1(x)} \right]^2 + \\ + \alpha_1(x) \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2)} \Big|_{\beta_1 = \alpha_1(x)} + \alpha_2(x) = 0 \end{cases}$$

où $F(\beta_1, \beta_2) = 0$ est, comme mentionné, l'équation de la frontière (S) du domaine (D) et la notation $H(\beta_1, \beta_2)|_{\beta_1 = \alpha_1(x)}$ désigne l'expression obtenue en remplaçant les variables β_1 et β_2 de la fonction $H(\beta_1, \beta_2)$ respectivement par $\alpha_1(x)$ et $\alpha_2(x)$. De plus, on a écrit $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ à la place de $\alpha^2(x) = (\alpha_1^2(x), \alpha_2^2(x))$.

La relation suivante est également vérifiée

$$(3) \quad \frac{l_1}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2)|_{\beta_1 = \alpha_1(0)}} = \frac{l_0}{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2)|_{\beta_1 = \alpha_1(0)}};$$

ces relations (2) et (3) sont valables pour tout x de l'intervalle $[0, \lambda]$. Dans notre cas ($F(\beta_1, \beta_2) = \beta_2^2 - P(\beta_1)$) elles s'écrivent:

$$(4) \quad \alpha_2^2 = P(\alpha_1)$$

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \left(-\frac{P'(\alpha_1)}{2\alpha_2} \right) + \left(-\frac{P'(\alpha_1)}{2\alpha_2} \right)^2 + \alpha_1 \left(-\frac{P'(\alpha_1)}{2\alpha_2} \right) + \alpha_2 = 0$$

$$(6) \quad \frac{l_1}{-P'(\alpha_1(0))} = \frac{l_0}{2\alpha_2(0)}.$$

L e m m e. La fonction $\alpha_1^P(x)$ ne peut s'annuler avec changement de signe pour aucune valeur x de l'intervalle $(0, \lambda)$.

Démonstration. Au cas contraire, si pour $x = x_0 \in (0, \lambda)$, $\alpha_1(x)$ présentait — pour fixer les idées — un maximum, la courbe (Γ) d'équation $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ présenterait dans un voisinage convenable, $\widehat{M_1 M_0 M_2}$ du point

M_0 — l'existence de ce voisinage étant garantie par l'hypothèse H_3 — la forme de la fig. 2. En effet, il est facile de voir que $\alpha'_1(x)$ est la limite vers laquelle converge uniformément une suite $\{\alpha'_{1,n}(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) de dérivées de coefficients $a_{1,n}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) de (1). La démonstration en a été faite par LASOTA et OPIAL [2]. La suite $\{\alpha_{1,n}(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) est une suite qui converge uniformément vers $\alpha_1(x)$. Selon l'hypothèse H_3 , les zéros de $\alpha'_1(x)$ sont donc ou bien des points isolés, ou bien leurs images constituent des segments de l'axe Ox . Il existerait alors deux fonctions uniformes de la variable α_1 , désignées par $X_1(\alpha_1)$ et $X_2(\alpha_1)$, définies dans un intervalle convenable $[\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(0)}]$ et telles que pour tout α_1 de cet intervalle, les points de coordonnées $(X_1(\alpha_1), \alpha_1)$, $(X_2(\alpha_1), \alpha_1)$ sont respectivement sur les arcs $\widehat{M_1 M_0}$ et $\widehat{M_2 M_0}$ de (Γ) . Nous présenterons l'

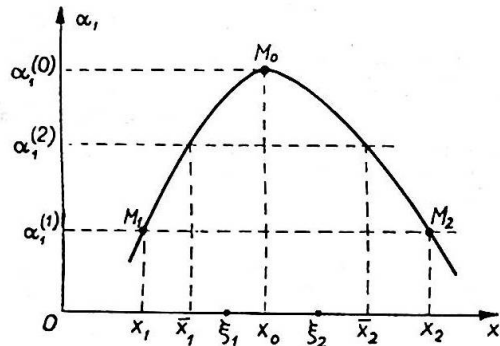


Fig. 2

Hypothèse H_4 . La fonction $\alpha_2(x)$ ne change pas de signe quand x parcourt l'intervalle $[0, \lambda]$.

À l'aide de cette hypothèse, on introduira l'expression

$$(8) \quad \theta(x) = -\frac{1}{2} \frac{P'(\alpha_1)}{\alpha_2} = \Lambda(\alpha_1).$$

La fonction $\Lambda(\alpha_1)$ est une fonction uniforme à dérivée continue dans l'intervalle $[\alpha_1^{(m)}, \alpha_1^{(M)}] \subseteq (b, c)$ (où $\alpha_1^{(m)} = \min_{x \in [0, \lambda]} \alpha_1(x)$, $\alpha_1^{(M)} = \max_{x \in [0, \lambda]} \alpha_1(x)$), à la condition que $\alpha_1^{(m)} \neq b$ et $\alpha_1^{(M)} \neq c$; si par exemple $\alpha_1^{(m)} = b$, on prendrait au lieu de l'intervalle fermé $[\alpha_1^{(m)}, \alpha_1^{(M)}]$ l'intervalle semi-ouvert $(\alpha_1^{(m)}, \alpha_1^{(M)}]$, et ainsi de suite) parce que $P(\beta_1) \in C^{(2)}[b, c]$. La fonction $\theta(x)$ est également une fonction continue et à dérivée continue dans tout sousintervalle fermé de $[0, \lambda]$ dans lequel $\alpha_1(x) \neq b$ et $\alpha_1(x) \neq c$. Dans un tel intervalle

$$(9) \quad \theta'(x) = \Lambda'(\alpha_1(x)) \alpha'_1(x)$$

On supposera d'abord que sur la fig. 2, $\alpha_1^{(0)} < c$. On prendra une valeur quelconque $\alpha_1^{(2)} \in (\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(0)})$ pour laquelle $\Lambda'(\alpha_1^{(2)}) \neq 0$ et on écrira pour abréger $\bar{x}_1 = X_1(\alpha_1^{(2)})$, $\bar{x}_2 = X_2(\alpha_1^{(2)})$, c'est-à-dire

$$(10) \quad \alpha_1(\bar{x}_1) = \alpha_1(\bar{x}_2) = \alpha_1^{(2)}.$$

Or, $\alpha_1^{(0)}$ est nécessairement $> b$, de sorte qu'en prenant $\alpha_1^{(1)}$ suffisamment près de $\alpha_1^{(0)}$ on aura dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ de la figure: $b < \alpha_1(x) < c$, et de plus $\alpha'_1(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$. On aura alors conformément à (9) et (10)

$$(11) \quad \theta'(\bar{x}_1) = \Lambda'(\alpha_1^{(2)}) \alpha'_1(\bar{x}_1) \neq \theta'(\bar{x}_2) = \Lambda'(\alpha_1^{(2)}) \alpha'_1(\bar{x}_2),$$

vu que la figure donne $\alpha'_1(\bar{x}_1) \alpha'_1(\bar{x}_2) < 0$. D'autre part (5) donne $\theta'(\bar{x}_1) = -[\theta^2(\bar{x}_1) + \alpha_1^{(2)} \theta(\bar{x}_1) + \alpha_2(\bar{x}_1)] = \theta'(\bar{x}_2) = -[\theta^2(\bar{x}_2) + \alpha_1^{(2)} \theta(\bar{x}_2) + \alpha_2(\bar{x}_2)]$; (vu que grâce à l'hypothèse H_4 , $\alpha_2(\bar{x}_1) = \pm \sqrt{P(\alpha_1(\bar{x}_1))} = \pm \sqrt{P(\alpha_1(\bar{x}_2))} = \alpha_2(\bar{x}_2)$) ce qui contredit la relation (11) et démontre l'assertion (7). Dans le cas où sur la fig. 2 $\alpha_1(x_0) = c$, la démonstration de cette assertion se fait de la même manière, en détachant deux intervalles fermés $[x_1, \xi_1]$ et $[\xi_2, x_2]$ dans lesquels la fonction $\theta(x)$ de (8) est définie et en choisissant $\alpha_1^{(2)}$ de manière que $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ tombent respectivement dans les intervalles (x_1, ξ_1) et (ξ_2, x_2) .

Pour fixer les idées, on supposera dans le reste de la note que la fonction $\alpha_1(x)$ est non-décroissante dans l'intervalle $[0, \lambda]$; les raisonnements qui suivent sont les mêmes dans le cas où $\alpha_1(x)$ est non-croissante dans cet intervalle, à la condition évidemment de remplacer les figures 3–6 par les figures correspondantes.

Il se pourrait que $\alpha_1(x)$ se réduise à une constante quand x parcourt certains sous-intervalles (obligatoirement disjoints et fermés) de $[0, \lambda]$. Leur nombre est fini, car si I est un tel intervalle, sur lequel on a $\alpha_1(x) \equiv \delta$ ($\delta \neq b$ et $\delta \neq c$), on déduit de (9) et de (5) si, pour fixer les idées, $\alpha_2(x) \leq 0$, que pour tout $x \in I$ on a $\theta'(x) = \sqrt{P(\alpha_1)} - \Lambda^2(\alpha_1) - \alpha_1 \Lambda(\alpha_1) = 0$. Vu que pour $x \in I$ on a $\alpha_1(x) = \delta$, il en résulte que

$$(11_1) \quad \begin{cases} \delta \text{ est une des racines de l'équation } A^-(\alpha_1) \equiv 4P(\alpha_1)[\sqrt{P(\alpha_1)} - \\ - \Lambda^2(\alpha_1) - \alpha_1 \Lambda(\alpha_1)] \equiv 2\sqrt{P(\alpha_1)}[2P(\alpha_1) - \alpha_1 P'(\alpha_1)] - P''(\alpha_1) = 0 \end{cases}$$

comprises dans l'intervalle (b, c) , qui sont en nombre fini (hypothèse H_2). Or, du fait de la monotonie (assertion (7)) et de la continuité de $\alpha_1(x)$, à chaque valeur δ correspond un seul intervalle I . Le nombre de ces intervalles est (s'il y en a) donc fini. On a supposé δ différent de b et de c . S'il y a des intervalles sur lesquels $\alpha_1(x) \equiv b$ ou $\alpha_1(x) \equiv c$, du fait de la monotonie de $\alpha_1(x)$ ils doivent avoir, l'origine 0, respectivement l'extrémité λ . Le nombre des intervalles I s'accroît donc de deux unités au plus. On distinguera deux, cas, pour la commodité de l'exposition.

Premier cas. Il n'y a pas d'intervalles I , c'est-à-dire que $\alpha_1(x)$ est strictement croissante dans $[0, \lambda]$. Elle admet donc une fonction inverse $X(\alpha_1)$ telle que $x \equiv X(\alpha_1(x))$, elle aussi continue et uniforme dans l'intervalle $[\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda)]$.

On peut donc poser en (9)

$$(12) \quad \theta'(x) = \Lambda'(\alpha_1) \alpha'_1(X(\alpha_1)) = \Lambda_1(\alpha_1).$$

Il est d'ailleurs à remarquer que les relations (8) et (12) n'ont de sens que si $\alpha_1 \neq b$ et $\alpha_1 \neq c$. Or, pour qu'on ait $\alpha_1(x) = b$ ou $\alpha_1(x) = c$, il est

nécessaire qu'on ait $x = 0$, respectivement $x = \lambda$. De plus, $X(\alpha_1)$ possède une dérivée continue $X'(\alpha_1)$ en tout point $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ où $\alpha_1'(x) \neq 0$ et

$$(12_1) \quad X'(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1'(x)} = \frac{1}{\alpha_1'(X(\alpha_1))}$$

On en déduit à l'aide de (12)

$$(13) \quad X'(\alpha_1) = \frac{\Lambda'(\alpha_1)}{\Lambda_1(\alpha_1)}$$

Or, l'hypothèse H_2 entraîne que (13₀) $\alpha_1'(x)$ ne peut avoir dans l'intervalle $[0, \lambda]$ qu'un nombre fini, au plus, de racines.

La raison en est la même pour laquelle il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles I . En effet, si $\alpha_1'(x_0) = 0$ et $\alpha_2(x_0) \leq 0$, (9) et (5) donnent $\theta'(x_0) = \sqrt{P(\alpha_1(x_0))} - \Lambda^2(\alpha_1(x_0)) - \alpha_1(x_0)\Lambda(\alpha_1(x_0)) = 0$, donc

$$(13_1) \quad \begin{cases} \text{Si } \alpha_1'(x_0) = 0, \text{ alors } A^-(\alpha_1(x_0)) = 4P(\alpha_1(x_0))\theta'(x_0) = 0, \\ \text{respectivement } A^+(\alpha_1(x_0)) = 0. \end{cases}$$

Selon l'hypothèse H_2 , l'équation $A^-(\alpha_1(x_0)) = 0$ en l'inconnue $\alpha_1(x_0)$ a au plus un nombre fini de racines, auquel cas la monotonie stricte de $\alpha_1(x)$ montre que les racines x_0 — s'il y en a — sont en nombre fini au plus. Ce raisonnement suppose, lui aussi, $\alpha_1(x_0) \neq b$, et $\alpha_1(x_0) \neq c$. Vu la monotonie de $\alpha_1(x)$, s'il y avait $\alpha_1'(0) = 0$ ou $\alpha_1'(\lambda) = 0$, le nombre des racines de $\alpha_1'(x)$ augmente de deux unités au plus. On désignera donc les racines de $\alpha_1'(x)$ — s'il y en a — par $x_1, x_2, \dots, x_m$. Bien que $X'(\alpha_1)$ de (13) devienne infinie pour $\alpha_1 = \alpha_1(x_s)$ ($s = \overline{1, m}$), on a

$$(14) \quad \int_{\alpha_1(0)}^{\alpha_1(\lambda)} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds = \int_{\alpha_1(0)}^{\alpha_1(\lambda)} X'(s) ds = X(\alpha_1(\lambda)) - X(\alpha_1(0)) = \lambda.$$

Second cas. Dans l'intervalle $[0, \lambda]$ il y a des sous-intervalles I . On les désignera par $I_i = [a_i, b_i]$ ($i = \overline{1, m}$) et on supposera que $b_i < a_{i+1}$ ($i = \overline{1, m-1}$) et que sur l'intervalle $I_i, \alpha_1(x)$ prend la valeur δ_i ($i = \overline{1, m}$),

$$0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_i < b_i < a_{i+1} < \dots < a_m < b_m \leq \lambda.$$

Dans ce cas, dans chacun des intervalles $[b_i, a_{i+1}]$ ($i = \overline{0, m}$; $b_0 = 0, b_{m+1} = \lambda$), $\alpha_1(x)$ est strictement croissante et on peut se servir dans la fig. 3 de la relation (14), ce qui donne

$$(15) \quad \begin{aligned} \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds &= \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} X'_i(s) ds = \int_{\alpha_1(b_i)}^{\alpha_1(a_{i+1})} X'_i(s) ds = X_i(\alpha_1(a_{i+1})) - X_i(\alpha_1(b_i)) = \\ &= a_{i+1} - b_i \quad (i = \overline{0, m}; \delta_0 = \alpha_1(0), \delta_{m+1} = \alpha_1(\lambda)), \end{aligned}$$

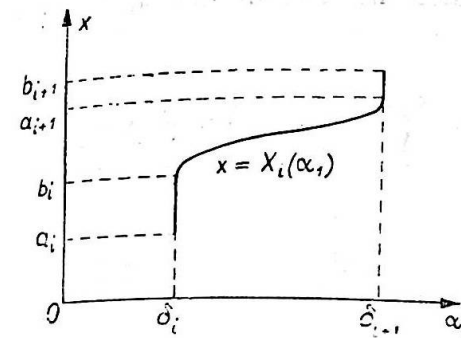


Fig. 3

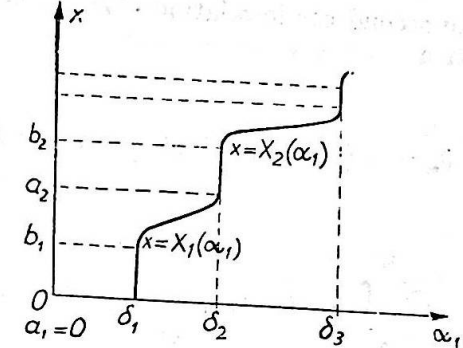


Fig. 4

attendu, d'une part, que la relation (13) donne pour tous les $i = \overline{0, m}$ la même valeur $\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)}$ (avec $\Lambda(s)$ donnée par (8) et $\Lambda_1(s)$ par la relation (19) ci-dessous) pour la dérivée $X'_i(s)$ et d'autre part que la relation $x \equiv X_i(\alpha_1(x))$ n'a lieu que pour $x \in [b_i, a_{i+1}]$. Il vient donc par sommation de (15)

$$(16) \quad \int_{\alpha_1(0)}^{\alpha_1(\lambda)} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds = \sum_{i=0}^m \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds = \lambda - \sum_{i=1}^m (b_i - a_i).$$

donc

$$(17) \quad \lambda > \int_{\alpha_1(0)}^{\alpha_1(\lambda)} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds.$$

Il se pourrait d'ailleurs que l'on ait $a_1 = 0$ ou $b_m = \lambda$. Au premier cas, la relation (16) subsiste évidemment, car (14) donne, en tenant

$$\begin{aligned} \text{compte que sur la fig 4 } \delta_1 = \alpha_1(b_1) = \alpha_1(0) : \int_{\alpha_1(0)}^{\alpha_1(\lambda)} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds &= \sum_{i=1}^m \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds = \\ &= \int_{\alpha_1(b_1)}^{\alpha_1(a_2)} X'_1(s) ds + \sum_{i=2}^m \int_{\alpha_1(b_i)}^{\alpha_1(a_{i+1})} X'_i(s) ds = \lambda - \sum_{i=1}^m (b_i - a_i). \end{aligned}$$

Au second cas la relation (17) subsiste également, attendu que sur la fig. 5 on a

$$\delta_m = \alpha_1(a_m) = \alpha_1(\lambda) \text{ et que } a_m < b_m = \lambda: \int_{\alpha_1(0)}^{\alpha_1(\lambda)} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-2} \int_{\alpha_1(b_i)}^{\alpha_1(a_{i+1})} X'_i(s) ds + \int_{\alpha_1(b_{m-1})}^{\alpha_1(a_m)} X'_{m-1}(s) ds = a_m - \sum_{i=1}^{m-1} (b_i - a_i) < \lambda - \sum_{i=1}^{m-1} (b_i - a_i)$$

d'où la relation (17). On déduit donc de (14) et de (17)

$$(18) \quad \lambda \geq \int_{\alpha_1(0)}^{\alpha_1(\lambda)} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds$$

avec $\Lambda(s)$ donnée par (8) et $\Lambda_1(s)$ par la relation suivante, déduite de (4), (5) et (12)

$$(19) \quad [\Lambda_1(\alpha_1) + \Lambda^2(\alpha_1) + \alpha_1 \Lambda(\alpha_1)]^2 = P(\alpha_1).$$

Il reste à fournir dans (18) les valeurs de $\alpha_1(0)$ et de $\alpha_1(\lambda)$. On aura alors la délimitation inférieure de λ que se propose de fournir cette note. À cet effet, on déduit de (6) et de (8) $\Lambda(\alpha_1(0)) = \frac{l_1}{l_0}$, de sorte que

$$(20) \quad \text{l'équation } \Lambda(\alpha_1) = \frac{l_1}{l_0} \text{ compte parmi ses racines (dont l'ensemble sera désigné par } P = \{\rho_i, i \in I = 1, 2, \dots, i_0\} \text{ le nombre } \alpha_1(0).$$

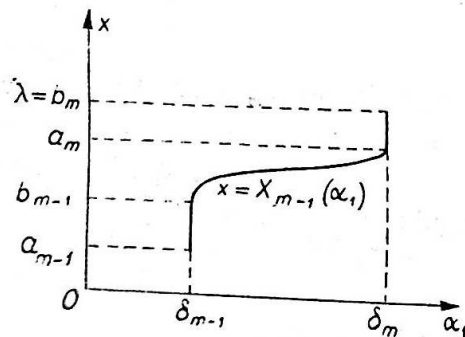


Fig. 5

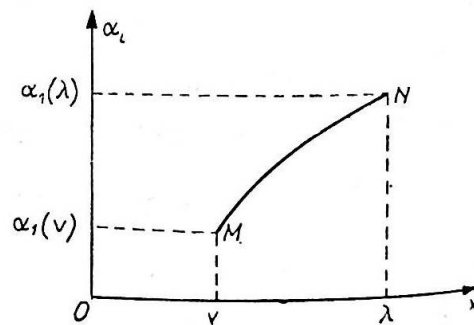


Fig. 6

On a donc déterminé un ensemble de nombres qui comprend le nombre $\alpha_1(0)$. On en fera autant pour $\alpha_1(\lambda)$. À cet effet, on remarquera (cf. [1]) que

$$(21) \quad \begin{cases} \text{si } H(x) = \int_0^x \frac{F'_{\beta_1}(\beta_1, \beta_2)}{F'_{\beta_2}(\beta_1, \beta_2)} \Big|_{\beta_2 = \alpha_1(\sigma)} d\sigma = - \int_0^x \frac{P'(\alpha_1(\sigma))}{2\alpha_2(\sigma)} d\sigma, \\ \text{alors } \varphi_{\alpha, L}(x) = \text{const exp. } H(x). \end{cases}$$

On distinguera à nouveau, pour la commodité, deux cas.

Premier cas. On peut détacher sur la courbe (Γ) d'équation $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ un arc MN (N d'abscisse λ) le long duquel $\alpha_1(x)$ est strictement croissante (fig. 6). Ceci signifie que s'il y a des intervalles I_i ($i = \overline{1, m}$) définis ci-dessus page, 333 on a

$$(22) \quad b_m < \lambda.$$

En ce cas, la fonction $\alpha_1(x)$ admet dans l'intervalle $[\alpha_1(v), \alpha_1(\lambda)]$ une fonction inverse $X(\alpha_1)$, continue dans cet intervalle et dérivable aux points où $\alpha'_1(x) \neq 0$, qui vérifie pour tout $\alpha'_1(x) \neq 0$, la relation

$$(23) \quad x = X(\alpha_1(x))$$

par conséquent en (21) on a $H(x) = \Phi_1(\alpha_1)$. Donc, si $\alpha_1(x) \neq 0$, on a, eu égard à (8) $H'(x) = \Phi'_1(\alpha_1) \alpha'_1(x) = \Lambda(\alpha_1)$, par suite à l'aide de (12) $\Phi'_1(\alpha_1) = \frac{\Lambda(\alpha_1) \Lambda'(\alpha_1)}{\Lambda_1(\alpha_1)}$ et $H(x) = \Phi_1(\alpha_1) = \int_{\text{const}}^{\alpha_1} \frac{\Lambda(s) \Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds$.

Par conséquent, (21) donne pour $x \in [v, \lambda]$

$$(24) \quad \varphi_{\alpha, L}(x) = \varphi_{\alpha, L}(X(\alpha_1)) = \Phi(\alpha_1) = \exp \int_{\text{const}}^{\alpha_1} \frac{\Lambda(s) \Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds,$$

donc en vertu de (23) $\Phi(\alpha_1(x)) = \varphi_{\alpha, L}[X(\alpha_1(x))] = \varphi_{\alpha, L}(x)$. Si l'on fait dans cette relation $x = \lambda$ et qu'on se rappelle que $\lambda = R[\varphi_{\alpha, L}(x)]$, ainsi qu'on l'a remarqué au début de ce paragraphe, on déduit que

$$(25) \quad \begin{cases} \text{le nombre } \alpha_1(\lambda) \text{ est compris dans l'ensemble constitué par les racines} \\ \text{de la fonction } \Phi(\alpha_1) \text{ de (24) et par les nombres } b \text{ et } c \text{ (au cas où parmi} \\ \text{les racines de } \Phi(\alpha_1) \text{ ces nombres ne figureraient pas).} \end{cases}$$

On a complété dans (25) l'ensemble des racines de $\Phi(\alpha_1)$ par les nombres b et c parce que l'assertion selon laquelle $\alpha_1(\lambda)$ est une racine de $\Phi(\alpha_1)$ n'a été démontrée qu'en l'hypothèse $\alpha_1(\lambda) \neq b$ et $\alpha_1(\lambda) \neq c$, vu que les fonctions $\Lambda(\alpha_1)$ de (8) et $\Lambda_1(\alpha_1)$ de (19) ne sont pas définies pour $\alpha_1 = b$ ou $\alpha_1 = c$.

On pourrait d'ailleurs remarquer que pour déduire les expressions ci-dessus de $\Phi_1(\alpha_1)$ et de $\Phi(\alpha_1)$, il n'est pas nécessaire de connaître l'expression de la fonction $X(\alpha_1)$ de (23); cette expression est donnée par (13):

$$X(\alpha_1) = v + \int_{\alpha_1(v)}^{\alpha_1} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds \text{ pour } \alpha_1 \in [\alpha_1(v), \alpha_1(\lambda)]; \text{ il suffit de tenir compte}$$

qu'en vertu de cette relation $H(x)$ et $\varphi_{\alpha, L}(x)$ sont pour $x \in [v, \lambda]$ des fonctions déterminées de α_1 .

Second cas. On se placera dans l'hypothèse complémentaire de (22) c'est-à-dire que

(26) *il y a au moins un intervalle I et pour le dernier à droite I_m , on a $b_m = \lambda$*

En ce cas l'assertion (25) ne subsiste plus. En effet, la relation (23) ne subsiste pas pour $x \in (a_m, \lambda]$, mais pour $x \in [b_{m-1}, a_m]$. Il en est donc de même pour les relations (24). En y faisant $x = a_m$ on obtient $\Phi(\alpha_1(a_m)) = \Phi(\alpha_1(\lambda)) = \varphi_{\alpha, L}(a_m)$, donc $\alpha_1(\lambda)$ est une des racines de l'équation $\Phi(\alpha_1) = \varphi_{\alpha, L}(a_m)$. Cette conclusion est inutilisable, vu qu'on ne connaît pas le nombre $\varphi_{\alpha, L}(a_m)$. En ce cas, on peut se servir de l'assertion (11₁) selon laquelle $\alpha_1(\lambda)$ est l'une des racines de l'équation $A^-(\alpha_1) = 0$ de l'hypothèse H_2 (si $\alpha_2(x) \leq 0$), respectivement de l'équation $A^+(\alpha_1) = 0$ (si $\alpha_2(x) \geq 0$), à la condition que l'on ait $\alpha_1(\lambda) \neq b$ et $\alpha_1(\lambda) \neq c$. On devra donc ajouter dans l'hypothèse (26) aux ensembles des racines des équations $A^-(\alpha_1) = 0$, respectivement $A^+(\alpha_1) = 0$ les valeurs éventuelles $\alpha_1(\lambda) = b$ et $\alpha_1(\lambda) = c$, pour avoir un ensemble de nombres qui comprend la valeur $\alpha_1(\lambda)$.

(26₁) *On peut d'ailleurs remarquer que si $\alpha_1(x)$ est non-décroissante dans $[0, \lambda]$, la relation $\alpha_1(\lambda) = b$ signifie que $\alpha_1(x) \equiv b$ dans $[0, \lambda]$, tandis que si $\alpha_1(x)$ est non-croissante dans $[0, \lambda]$, la relation $\alpha_1(\lambda) = c$ signifie que $\alpha_1(x) \equiv c$ dans le même intervalle.*

Si donc

(26₂) *on désigne par $\sigma_k \{k \in K = 1, 2, \dots, k_0\}$ les éléments de l'ensemble (Σ) constitué par les racines de l'équation $\Phi(\alpha_1) = 0$ de (24) et de l'équation $A^-(\alpha_1) = 0$ de l'hypothèse H_2 (si $\alpha_2(x) \leq 0$), respectivement de l'équation $A^+(\alpha_1) = 0$ de la même hypothèse, complétés, s'il y lieu (c'est-à-dire si les nombres b et c ne figurent pas parmi les racines des équations $\Phi(\alpha_1) = 0$ et $A^-(\alpha_1) = 0$, respectivement $A^+(\alpha_1) = 0$), par ces nombres b et c ,*

on déduit de (25) et de (11₁) que
(27) l'ensemble Σ comprend le nombre $\alpha_1(\lambda)$.

On déduit donc de (18), (20) et (27)

$$(28) \quad \lambda \geq \min_{i \in I, k \in K} G(\rho_i, \sigma_k) \text{ où } G(\rho, \sigma) = \int_{\rho}^{\sigma} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds = \int_{\rho}^{\sigma} G(s) ds.$$

On distinguera par la suite à nouveau deux cas, imposés par l'hypothèse H_4 .

Premier cas. Pour tout $x \in [0, \lambda]$ on a $\alpha_2(x) \leq 0$.

La relation

$$(29) \quad -\alpha_2(x) = \Lambda_1(\alpha_1) + \Lambda^2(\alpha_1) + \alpha_1 \Lambda(\alpha_1)$$

— tirée de (5), (8) et (12) — et la relation (4) donnent

$$(30) \quad -\alpha_2 = \Lambda_1(\alpha_1) + \Lambda^2(\alpha_1) + \alpha_1 \Lambda(\alpha_1) = \sqrt{P(\alpha_1)}.$$

Les relations (4) et (8) donnent de leur côté

$$(31) \quad \Lambda(\alpha_1) = \frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}}$$

après quoi (29) donne

$$(32) \quad \Lambda_1(\alpha_1) = \sqrt{P(\alpha_1)} - \frac{P'^2(\alpha_1)}{4P(\alpha_1)} - \alpha_1 \frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}}.$$

Si on remplace ces valeurs de $\Lambda(s)$ et $\Lambda_1(s)$ dans (24) et qu'on annule l'expression obtenue, on a

$$(33) \quad \begin{cases} \Phi(\alpha_1) = \Phi^-(\alpha_1) = \\ = \exp \frac{1}{2} \int_{\text{const}}^{\alpha_1} \frac{P'(s) [2P(s)P''(s) - P'^2(s)]}{P(s) [4P(s)\sqrt{P(s)} - 2sP'(s)\sqrt{P(s)} - P'^2(s)]} ds = 0 \end{cases}$$

La relation (20) s'écrit à l'aide de (31) $\frac{P'(\alpha_1(0))}{2\sqrt{P(\alpha_1(0))}} = \frac{l_1}{l_0}$, c'est-à-dire que $\alpha_1(0)$ est une racine de l'équation

$$(34) \quad \frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} = \frac{l_1}{l_0}.$$

Quant à la relation (28), elle s'écrit à l'aide de (31) et (32)

$$(35) \quad \begin{aligned} G^-(\rho, \sigma) &= \int_{\rho}^{\sigma} G^-(s) ds = \\ &= \int_{\rho}^{\sigma} \frac{2P(s)P''(s) - P'^2(s)}{\sqrt{P(s)} [4P(s)\sqrt{P(s)} - 2sP'(s)\sqrt{P(s)} - P'^2(s)]} ds. \end{aligned}$$

Second cas. Pour tout $x \in [0, \lambda]$ on a $\alpha_2(x) \geq 0$.

Alors les relations (33), (34), (35) se remplacent respectivement par

$$(36) \quad \Phi^+(\alpha_1) = \exp \frac{1}{2} \int_{\text{const}}^{\alpha_1} \frac{P'(s)[2P(s)P''(s) - P'^2(s)]}{P(s)[-4P(s)\sqrt{P(s)} + 2sP'(s)\sqrt{P(s)} - P'^2(s)]} ds = 0$$

$$(37) \quad -\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} = \frac{l_1}{l_0}.$$

$$(38) \quad \begin{cases} G^+(\rho, \sigma) = \int_{\rho}^{\sigma} G^+(s) ds = \\ = \int_{\rho}^{\sigma} \frac{2P(s)P''(s) - P'^2(s)}{\sqrt{P(s)}[4P(s)\sqrt{P(s)} - 2sP'(s)\sqrt{P(s)} + P'^2(s)]} ds = 0. \end{cases}$$

Remarque. 2. Il est évident que les ensembles P^- et P^+ constitués respectivement par les racines des équations (34) ou (37) comprises dans l'intervalle (b, c) , ne sont pas vides. Il suffit, pour s'en convaincre, de suivre par exemple sur la fig. 7 la variation du coefficient angulaire $\pm \frac{P'(\beta_1)}{2\sqrt{P(\beta_1)}}$ de

(S) quand le point M parcourt les arcs $\overline{M_-B}$, $\overline{M_+B}$, $\overline{M_-C}$, $\overline{M_+C}$, où $\bar{\beta}_1$ et $\bar{\beta}_1$ sont respectivement la plus grande et la plus petite des racines de $P'(\beta_1)$ comprises dans l'intervalle (b, c) (il se pourrait d'ailleurs que l'on ait $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_1$). Vu que les racines b et c de $P(\beta_1)$ sont — conformément à (1₂) — simples,

il résulte que chacune des équations (34) et (37) admet au moins une racine dans l'intervalle (b, c) .

Remarque. 3. Dans l'intervalle $[\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda)]$ il ne peut exister aucune valeur pour laquelle une fonction primitive quelconque $F(s)$ de la fonction $G(s)$ de (13) devienne infinie.

En effet, plaçons — nous d'abord au premier cas distingué page 333. Conformé-

ment à (13), $F'(\alpha_1)$ coïncide par définition avec $X'(\alpha_1)$, donc la différence $F(\alpha_1) - X(\alpha_1)$ se réduit à une constante dans tout intervalle qui ne contient pas de nombres α_1 qui rendent infinie $X'(\alpha_1)$. Or, selon (12₁) les nombres en question sont les nombres $\alpha_1(\bar{x})$, où $\alpha_1'(\bar{x}) = 0$ et selon (13₀) ils sont en nombre fini. Si $\bar{\alpha}_1$ est l'un d'eux, et que l'on prenne $\alpha_1 > \bar{\alpha}_1$ assez proche de $\bar{\alpha}_1$ (supposé $< \alpha_1(\lambda)$) pour que dans l'intervalle

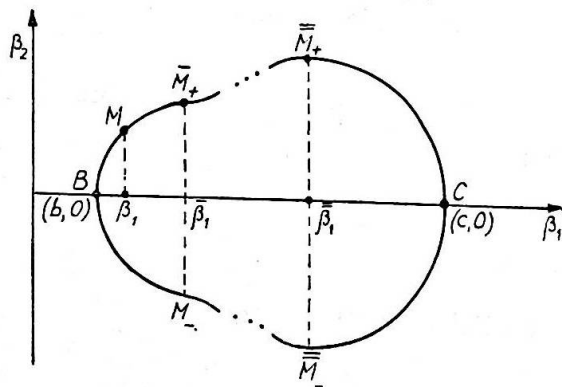


Fig. 7

$(\alpha_1, \bar{\alpha}_1]$ il n'y ait pas d'autre valeur qui rende infinie $X'(\alpha_1)$, puis $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\bar{\alpha}_1 + \varepsilon < \bar{\alpha}_1$, on a

$$\int_{\bar{\alpha}_1 + \varepsilon}^{\bar{\alpha}_1} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds = F(\bar{\alpha}_1) - F(\bar{\alpha}_1 + \varepsilon) = X(\bar{\alpha}_1) - X(\bar{\alpha}_1 + \varepsilon),$$

ce qui signifie que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$), $F(\bar{\alpha}_1 + \varepsilon)$ tend vers la limite finie $F(\bar{\alpha}_1) - X(\bar{\alpha}_1) + X(\bar{\alpha}_1)$, donc que $F(\alpha_1)$ prend une valeur finie pour $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$. (Si l'on avait $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1(\lambda)$, on aboutirait à la même conclusion

en prenant $\bar{\alpha}_1 < \bar{\alpha}_1$ et $\int_{\bar{\alpha}_1}^{\bar{\alpha}_1 - \varepsilon} \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda_1(s)} ds$). Si nous nous plaçons au second cas

distingué page 334, qui est complémentaire du cas où nous venons de nous placer, le raisonnement utilisé ci-dessus (avec $X_i(\alpha_1)$ à la place de $X(\alpha_1)$ et $[\delta_i, \delta_{i+1}]$ ($i = \overline{1, m}$) à la place de $[\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda)]$) montre que $F(\alpha_1)$ prend des valeurs finies dans chacun des intervalles $[\delta_i, \delta_{i+1}]$ ($i = \overline{1, m}$) qui y sont mentionnés, donc que $F(\alpha_1)$ prend dans ce cas également des valeurs finies pour tout $\alpha_1 \in [\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda)]$.

Remarque 4. Il résulte de la remarque 3 que les paires de nombres (ρ_i, σ_k) qui figurent dans la formule (28), pour lesquelles une fonction primitive quelconque de la fonction $G(s)$ de (13) devient infinie dans l'intervalle $[\rho_i, \sigma_k]$, sont à écarter de l'ensemble (ρ_i, σ_k) ($i \in I, k \in K$). En effet, si (ρ_i, σ_k) est une telle paire, la remarque 3 indique que l'intervalle $[\rho_i, \sigma_k]$ n'est pas l'intervalle $[\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda)]$.

Remarque 5. Le procédé 1 proposé ci-dessous est établi dans l'hypothèse que $\alpha_1(x)$ ne se réduit pas à une constante dans tout l'intervalle $[0, \lambda]$.

En effet, dans le premier cas distingué page 333 on exclut la présence d'intervalles sur lesquels $\alpha_1(x)$ est constante et le second cas distingué page 334 suppose la présence d'intervalles $[b_i, a_{i+1}]$ ($i = \overline{0, m}$) dans lesquels $\alpha_1(x)$ est strictement monotone.

On peut d'ailleurs remarquer que l'hypothèse H_2 assure le fait que $\alpha_1(x)$ ne se réduit pas à une constante dans tout l'intervalle $[0, \lambda]$. En effet, en ce cas on aurait $\alpha_1(0) = \alpha_1(\lambda)$. Or, selon (20), $\alpha_1(0)$ est une racine de la fonction $\Lambda(\alpha_1) - \frac{l_1}{l_0}$. Si, pour fixer les idées, on a $\alpha_2(x) \leq 0$ pour tout

$x \in [0, \lambda]$, $\alpha_1(0)$ est donc selon (8) et (4) une racine de la fonction $\frac{P'(\alpha_1)}{2\sqrt{P(\alpha_1)}} - \frac{l_1}{l_0}$ tandis que $\alpha_1(\lambda)$ est selon (11₁) une racine de la fonction $A^-(\alpha_1)$, à la condition que $\alpha_1(\lambda) \neq b$ et $\alpha_1(\lambda) \neq c$. Si cette condition est remplie, la seconde partie de l'hypothèse H_2 assure l'inégalité entre $\alpha_1(0)$ et $\alpha_1(\lambda)$, donc l'impossibilité du fait que $\alpha_1(x)$ se réduise à une constante dans tout l'intervalle $[0, \lambda]$. La condition $\alpha_1(\lambda) \neq b$ et $\alpha_1(\lambda) \neq c$ est assurée (toujours dans le cas de la constance supposée de $\alpha_1(x)$ dans tout l'intervalle

$[0, \lambda]$, vu que si $\alpha_1(\lambda) = b$ ou $\alpha_1(\lambda) = c$, on aurait $\alpha_1(0) = b$ ou $\alpha_1(0) = c$ donc selon (4) $\alpha_2(0) = 0$ et selon la remarque 1 $P'(\alpha_1(0)) \neq 0$, auquel cas la relation (6) ne serait pas satisfaite.

Remarque 6. Il résulte de la remarque 5 et de (26₁) que si $\alpha_1'(x) \leq 0$, dans $[0, \lambda]$, l'ensemble Σ de (26₂) ne contient pas le nombre c , tandis que si $\alpha_1'(x) \geq 0$ dans $[0, \lambda]$, le même ensemble ne contient pas le nombre b .

On déduit de (12₁) et de (13) que dans (28) $\text{sg} G(\alpha_1) = \text{sg} \alpha_1'(x)$ pour tout $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ à condition que x appartienne à un sous-intervalle de $[0, \lambda]$ dans lequel $\alpha_1(x)$ est strictement monotone et que $\alpha_1'(x) \neq 0$. Or, conformément au lemme page 331, $\alpha_1'(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle $[0, \lambda]$. Par conséquent

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la fonction } G(\alpha_1) \text{ de (13) et (28) ne change pas de signe dans l'intervalle } [\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda)]. \end{array} \right.$$

En effet, cela est évident au premier cas signalé page 333 et au second cas signalé page 334 cela est évident dans les intervalles.

$$(40) \quad [\alpha_1(0), \delta_1], [\delta_1, \delta_2], \dots, [\delta_i, \delta_{i+1}], \dots, [\delta_{m-1}, \delta_m], [\delta_m, \alpha_1(\lambda)].$$

(avec $\delta_i, i = \overline{1, m}$ définis dans l'énoncé de ce cas) dont la réunion forme l'intervalle $[\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda)]$.*

Ne connaissant pas le signe (constant) de $\alpha_2(x)$, ni celui (également constant) de $\alpha_1'(x)$, le procédé énoncé au §1 et indiqué ci-dessous doit tenir compte de quatre cas possibles;

$$(41) \quad \begin{array}{ll} 1^\circ \alpha_2(x) \leq 0, \alpha_1'(x) \leq 0; & 2^\circ \alpha_2(x) \leq 0, \alpha_1'(x) \geq 0; \\ 3^\circ \alpha_2(x) \geq 0, \alpha_1'(x) \leq 0; & 4^\circ \alpha_2(x) \geq 0, \alpha_1'(x) \geq 0 \end{array}$$

Ce procédé est déduit des relations (28) et (33)–(39), ainsi que des remarques 4, 5 et 6.

§ 3.

Procédé 1. 1°. On désigne par $P^- = \{\rho_i^-; i \in \bar{I} = 1, 2, \dots, i_0\}$ l'ensemble des racines de l'équation (34) comprises dans l'intervalle (b, c) . On résout les équations (33) et $A^-(\alpha_1) = 0$ (hypothèse H_2). De la dernière on ne retient que la plus petite et la plus grande des racines. On désigne par Σ^- l'ensemble des racines obtenues dans (b, c) . À cet ensemble on adjoint le nombre b et on désigne par $\Sigma^{\text{①}} = \{\sigma_k^{\text{①}}; k = 1, 2, \dots, k^{\text{①}}\}$ l'ensemble des nombres obtenus de la sorte et compris dans l'intervalle $[b, c)$. On choisit parmi les paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{\text{①}})$ fournies par P^- et $\Sigma^{\text{①}}$ celles pour lesquelles $\rho_i^- > \sigma_k^{\text{①}}$, $G^-(s)$ de (35) est négative ou nulle dans l'intervalle $\rho_i^- \leq s \leq \sigma_k^{\text{①}}$ et $F^-(s)$ (avec $F^-(s) = G^-(s)$) reste finie dans cet intervalle. Si l'ensemble

* Si $\alpha_1'(x) \leq 0$, le premier nombre qui figure dans l'écriture des intervalles (40) et de l'intervalle $[\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda)]$ (c'est-à-dire leur origine) est plus grand que le second (leur extrémité).

des paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{\text{①}})$ obtenu de la sorte est désigné par $\Sigma^{\text{①}} = \{(\rho_i^{\text{①}}, \sigma_i^{\text{①}}); i \in I^{\text{①}}\}$, où $I^{\text{①}}$ est ou bien un ensemble vide, ou bien un ensemble d'indices $1, 2, \dots, i^{\text{①}}$, on désigne par $\lambda^{\text{①}} = \min_{i \in I^{\text{①}}} G^-(\rho_i^{\text{①}}, \sigma_i^{\text{①}})$, avec $G^-(\rho, \sigma)$ donnée par (35).

2°. À l'ensemble Σ^- du point 1° on adjoint le nombre c et on désigne par $\Sigma^{\text{②}} = \{\sigma_k^{\text{②}}; k = 1, 2, \dots, k^{\text{②}}\}$ l'ensemble obtenu de la sorte. On choisit parmi les paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{\text{②}})$ fournies par P^- et $\Sigma^{\text{②}}$ celles pour lesquelles $\rho_i^- < \sigma_k^{\text{②}}$, $G^-(s) \geq 0$ dans l'intervalle $\rho_i^- \leq s \leq \sigma_k^{\text{②}}$ et $F^-(s)$ reste finie dans cet intervalle. Si l'ensemble des paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{\text{②}})$ obtenu de la sorte est désigné par $\Sigma^{\text{②}} = \{(\rho_i^{\text{②}}, \sigma_i^{\text{②}}); i \in I^{\text{②}}\}$, on désigne par $\lambda^{\text{②}} = \min_{i \in I^{\text{②}}} G^-(\rho_i^{\text{②}}, \sigma_i^{\text{②}})$.

3°. On désigne par $P^+ = \{\rho_i^+; i \in I^+ = 1, 2, \dots, i^+\}$ l'ensemble des racines de l'équation (37) comprises dans l'intervalle (b, c) . On résout les équations (36) et $A^+(\alpha_1) = 0$ (hypothèse H_2). De la dernière on ne retient que la plus petite et la plus grande des racines. On désigne par Σ^+ l'ensemble des racines obtenues dans (b, c) . À cet ensemble on adjoint le nombre b et on désigne par $\Sigma^{\text{③}} = \{\sigma_k^{\text{③}}; k = 1, 2, \dots, k^{\text{③}}\}$ l'ensemble des nombres obtenus de la sorte et compris dans l'intervalle $[b, c)$. On choisit parmi les paires $(\rho_i^+, \sigma_k^{\text{③}})$ fournies par P^+ et $\Sigma^{\text{③}}$ celles pour lesquelles $\rho_i^+ > \sigma_k^{\text{③}}$, $G^+(s)$ de (38) est négative ou nulle dans l'intervalle $\rho_i^+ \leq s \leq \sigma_k^{\text{③}}$ et $F^+(s)$ (avec $F^+(s) = G^+(s)$) reste finie dans cet intervalle. Si l'ensemble des paires obtenues de la sorte est désigné par $\Sigma^{\text{③}} = \{(\rho_i^{\text{③}}, \sigma_i^{\text{③}}); i \in I^{\text{③}}\}$, on désigne par $\lambda^{\text{③}} = \min_{i \in I^{\text{③}}} G^+(\rho_i^{\text{③}}, \sigma_i^{\text{③}})$, avec $G^+(\rho, \sigma)$ donnée par (38).

4°. À l'ensemble Σ^+ du point 3° on adjoint le nombre c , et on désigne par $\Sigma^{\text{④}} = \{\sigma_k^{\text{④}}; k = 1, 2, \dots, k^{\text{④}}\}$ l'ensemble obtenu de la sorte. On choisit parmi les paires $(\rho_i^+, \sigma_k^{\text{④}})$ fournies par P^+ et $\Sigma^{\text{④}}$ celles pour lesquelles $\rho_i^+ < \sigma_k^{\text{④}}$, $G^+(s) \geq 0$ dans l'intervalle $\rho_i^+ \leq s \leq \sigma_k^{\text{④}}$ et $F^+(s)$ reste finie dans cet intervalle. Si l'ensemble des paires obtenues de la sorte est désigné par $\Sigma^{\text{④}} = \{(\rho_i^{\text{④}}, \sigma_i^{\text{④}}); i \in I^{\text{④}}\}$, on désigne par $\lambda^{\text{④}} = \min_{i \in I^{\text{④}}} G^+(\rho_i^{\text{④}}, \sigma_i^{\text{④}})$.

5°. On a la délimitation

$$(42) \quad \begin{cases} (b) & \lambda \geq \lambda_0 = \min(\lambda^{\text{①}}, \lambda^{\text{②}}, \lambda^{\text{③}}, \lambda^{\text{④}}), \\ (a) & \lambda \geq \lambda^{\text{①}} \text{ ou } \lambda \geq \lambda^{\text{②}} \text{ ou } \lambda \geq \lambda^{\text{③}} \text{ ou } \lambda \geq \lambda^{\text{④}}. \end{cases}$$

Remarque 7. Il est évident que si un ensemble $I^{[i]}$ ($i = 1, 2, 3$, ou 4) est vide, le nombre $\lambda^{[i]}$ sera écarté de la formule (42).

En effet, si le cas i signalé en (41) se produisait, l'ensemble $I^{[i]}$ ne serait pas vide, attendu que l'ensemble de paires (ρ_i, σ_k) obtenu au cas i comprendrait au moins la paire $(\alpha_1(0), \alpha_1(\lambda))$. Le cas i de (41) ne se produit donc pas et $\lambda^{[i]}$ n'entre pas en ligne de compte dans la formule (42).

§ 4.

On fera à présent l'hypothèse supplémentaire qui, ainsi qu'il a été mentionné au § 1, permet de présenter un ensemble $\mathfrak{M}$ de nombres qui comprend le nombre λ .

Hypothèse H_5 . Les équations $A^-(\alpha_1) = 0$ et $A^+(\alpha_1) = 0$ (hypothèse H_2) n'ont aucune racine dans l'intervalle (b, c) .

Pour utiliser cette hypothèse, on se servira de la

Remarque 8. Pour tout $x \in [0, \lambda]$ on a $\alpha_1(x) \neq b$ et $\alpha_1(x) \neq c^*$.

En effet, on a établi ([1], formule (8)) des relations qui, dans notre cas ($n = 2$ et $F(\beta_1, B_2) = \beta_2^2 - P(\beta_1)$) se réduisent à la relation

$$-\frac{\varphi'_{\alpha, L}(x)}{P'(\alpha_1(x))} = \frac{\varphi_{\alpha, L}(x)}{2\alpha_2(x)}$$

valable pour tout $x \in [0, \lambda]$. Si l'on avait $\alpha_1(x_0) = b$ ou $\alpha_1(x_0) = c$, donc $\alpha_2^2(x_0) = P(\alpha_1(x_0)) = 0$, avec $x_0 \in [0, \lambda]$, la relation ci-dessus n'aurait pas lieu dans un voisinage convenablement choisi de x_0 , attendu que la définition de λ et l'hypothèse $l_0 \neq 0$ font que le second membre tend vers l'infini quand x tend vers x_0 , tandis que (1₂) donne $P'(\alpha_1(x_0)) \neq 0$, de sorte que le premier membre de la même relation tend vers une valeur finie quand x tend vers x_0 . En effet, le fait que $\alpha_1(x)$ et $\alpha_2(x) \in C[0, \infty)$ assure que $\varphi'_{\alpha, L}(x)$ est continue, donc finie dans tout l'intervalle $[0, \lambda]$.

Il résulte donc de (13) et de la remarque 8 que $\alpha'_1(x)$ est — dans l'hypothèse H_5 — strictement positive ou négative dans tout l'intervalle $[0, \lambda]$, auquel cas on déduit de (14), (20) et (25) que si on désigne, à la différence de (26₂) par $\Sigma = \{\sigma_k; k = 1, 2, \dots, k_0\}$ l'ensemble des racines de la fonction $\Phi(\alpha_1)$ de (24), et, s'il y a lieu, des nombres b et c , alors λ est l'un des nombres de l'ensemble $G(\rho_i, \sigma_k)$ avec $G(\rho, \sigma)$ donnée par (28). Il en résulte le procédé suivant pour la détermination d'un ensemble $\mathfrak{M}$ qui comprend le nombre λ , dans lequel nous sommes à nouveau obligés de tenir compte des quatre cas possibles énumérés en (41).

Procédé 2. 1°. On désigne par $P^- = \{\rho_i^-; i \in J^- = 1, 2, \dots, i^-\}$ l'ensemble des racines de l'équation (34) comprises dans l'intervalle (b, c) , par Σ^- l'ensemble des racines de l'équation (33) comprises dans l'intervalle

* Cette remarque rend inutile l'examen du cas $\alpha_1(x_0) = c$ distingué dans la démonstration du lemme page 331, ainsi que la dernière proposition qui figure dans la démonstration de la remarque 5.

(b, c) et par $\Sigma^{(1)} = \{\sigma_k^{(1)}; k = 1, 2, \dots, k^{(1)}\}$ l'ensemble obtenu en adjoignant à l'ensemble Σ^- le nombre b . On choisit parmi les paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{(1)})$ fournies par P^- et $\Sigma^{(1)}$ celles pour lesquelles $\rho_i^- > \sigma_k^{(1)}$, $G^-(s)$ de (35) est négative ou nulle dans l'intervalle $\rho_i^- \leq s \leq \sigma_k^{(1)}$ et $F^-(s)$ (avec $F^-(s) = G^-(s)$) reste finie dans cet intervalle. L'ensemble des paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{(1)})$ obtenu de la sorte est désigné par $\Sigma^{[1]} = \{(\rho_i^{[1]}, \sigma_i^{[1]}); i \in I^{[1]}\}$ (où $I^{[1]}$ est ou bien un ensemble vide, ou bien un ensemble d'indices $1, 2, \dots, i^{[1]}$). On constitue l'ensemble $\Lambda^{[1]} = \{G^-(\rho_i^{[1]}, \sigma_i^{[1]}); i \in I^{[1]}\}$. 2°. À l'ensemble Σ^- du point 1° on adjoint le nombre c et on désigne par $\Sigma^{(2)} = \{\sigma_k^{(2)}; k = 1, 2, \dots, k^{(2)}\}$ l'ensemble obtenu de la sorte. On choisit parmi les paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{(2)})$ fournies par P^- et $\Sigma^{(2)}$ celles pour lesquelles $\rho_i^- < \sigma_k^{(2)}$, $G^-(s) \geq 0$ dans l'intervalle $\rho_i^- \leq s \leq \sigma_k^{(2)}$, et $F^-(s)$ reste finie dans cet intervalle. On désigne par $\Sigma^{[2]} = \{(\rho_i^{[2]}, \sigma_i^{[2]}); i \in I^{[2]}\}$ l'ensemble des paires $(\rho_i^-, \sigma_k^{(2)})$ obtenues de la sorte.

On constitue l'ensemble $\Lambda^{[2]} = \{G^-(\rho_i^{[2]}, \sigma_i^{[2]}); i \in I^{[2]}\}$.

3°. On désigne par $P^+ = \{\rho_i^+; i \in J^+ = 1, 2, \dots, i^+\}$ l'ensemble des racines de l'équation (37) comprises dans l'intervalle (b, c) , par Σ^+ l'ensemble des racines de l'équation (36) comprises dans l'intervalle (b, c) et par $\Sigma^{(3)} = \{\sigma_k^{(3)}; k = 1, 2, \dots, k^{(3)}\}$ l'ensemble obtenu en joignant à l'ensemble Σ^+ le nombre b . On choisit parmi les paires $(\rho_i^+, \sigma_k^{(3)})$ fournies par P^+ et $\Sigma^{(3)}$ celles pour lesquelles $\rho_i^+ > \sigma_k^{(3)}$, $G^+(s)$ de (38) est négative ou nulle dans l'intervalle $\rho_i^+ \leq s \leq \sigma_k^{(3)}$ et $F^+(s)$ (avec $F^+(s) = G(s)$) reste finie dans cet intervalle. L'ensemble des paires $(\rho_i^+, \sigma_k^{(3)})$ obtenu de la sorte est désigné par $\Sigma^{[3]} = \{(\rho_i^{[3]}, \sigma_i^{[3]}); i \in I^{[3]}\}$.

On constitue l'ensemble $\Lambda^{[3]} = \{G^+(\rho_i^{[3]}, \sigma_i^{[3]}); i \in I^{[3]}\}$.

4°. À l'ensemble Σ^+ du point 3° on adjoint le nombre c et on désigne par $\Sigma^{(4)} = \{\sigma_k^{(4)}; k = 1, 2, \dots, k^{(4)}\}$ l'ensemble obtenu de la sorte. On choisit parmi les paires $(\rho_i^+, \sigma_k^{(4)})$ fournies par P^+ et $\Sigma^{(4)}$ celles pour lesquelles $\rho_i^+ < \sigma_k^{(4)}$, $G^+(s) \geq 0$ dans l'intervalle $\rho_i^+ \leq s \leq \sigma_k^{(4)}$ et $F^+(s)$ reste finie dans cet intervalle. On désigne par $\Sigma^{[4]} = \{(\rho_i^{[4]}, \sigma_i^{[4]}); i \in I^{[4]}\}$ l'ensemble des paires $(\rho_i^+, \sigma_k^{(4)})$ obtenues de la sorte. On constitue l'ensemble :

$$\Lambda^{[4]} = \{G^+(\rho_i^{[4]}, \sigma_i^{[4]}); i \in I^{[4]}\}.$$

5°. Le nombre λ est compris dans l'ensemble

$$(43) \quad \mathfrak{N} = \Lambda^{\overline{1}} \cup \Lambda^{\overline{2}} \cup \Lambda^{\overline{3}} \cup \Lambda^{\overline{4}}.$$

Remarque 9. On pourrait remarquer qu'on ne sait pas si les ensembles $\Lambda^{\overline{i}}$ ($i = \overline{1,4}$) qui figurent au procédé 2 sont constitués seulement par des racines de la solution minimale $\varphi_{\alpha,L}(x)$, même si les ensembles P se composent d'un seul nombre (qui est alors la valeur de $\alpha_1(0)$, donc unicité de la racine de l'équation (20)). En effet, si les relations (13) et (24) avaient lieu pour tout $x \geq 0^*$) il serait immédiat d'en déduire que si en (24) $\Phi(\overline{\alpha}_1) = 0$, alors

$$(44) \quad \bar{x} = X(\overline{\alpha}_1) \quad (\text{avec } X(\alpha_1) \text{ de (24) donnée par (13): } X(\alpha_1) = \int_{\alpha_1(0)}^{\alpha_1} G(s) ds)$$

est une racine de $\varphi_{\alpha,L}(x)$ et qu'inversement toute racine $\bar{x}$ de $\varphi_{\alpha,L}(x)$ est de la forme $\bar{x} = X(\overline{\alpha}_1)$, avec $\Phi(\overline{\alpha}_1) = 0$ (vu que de la remarque 8 et de la monotonie stricte de $\alpha_1(x)$, il résulte que $\alpha_1(x) \neq b$ et $\alpha_1(x) \neq c$ pour tout $x \geq 0$, donc que les relations (13) et (24) ont lieu pour tout $x \geq 0$). L'ensemble des racines de $\varphi_{\alpha,L}(x)$ coïnciderait dans ce cas avec l'ensemble des nombres $X(\overline{\alpha}_1)$, avec $X(\alpha_1)$ donnée par (44), $\Phi(\alpha_1)$ par (24) et $\Phi(\overline{\alpha}_1) = 0$ et λ serait le plus petit nombre de cet ensemble. Si l'on connaissait le nombre $\alpha_1(0)$ (c'est-à-dire si l'équation (20) avait une seule racine), λ serait le plus petit nombre positif de cet ensemble. Mais les relations (13) et (24) ont été déduites des relations (4), (5), (6) qui, ainsi qu'il été remarqué à propos des relations (2) et (3), ont lieu dans l'intervalle $[0, \lambda]$, conformément au principe du maximum ([3], pages 25, 26, 58). Si la fonction $\Phi(\alpha_1)$ de (24) a des racines $\overline{\alpha}_1$ pour lesquelles $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1(\bar{x})$ avec $\bar{x} > \lambda$, la relation (24) n'est pas démontrée pour ces valeurs de $\bar{x}$ et de $\overline{\alpha}_1$; par conséquent, même si la valeur $\alpha_1(0)$ était connue (unicité de la racine de l'équation (20)), on ne sait pas si le nombre $\bar{x} = X(\overline{\alpha}_1)$ est une racine de $\varphi_{\alpha,L}(x)$.

§ 5.

Nous allons présenter une application simple des procédés proposés. Nous reprendrons le cas (considéré en [1] où $F(\beta_1, \beta_2) = \beta_1^2 + \beta_2^2 - R^2$, c'est-à-dire où (D) est borné par un cercle (S) de centre l'origine et de rayon R . On peut assurer l'hypothèse H_4 , par exemple, par la condition, (45) en (1), $|a'_2(x)| \leq K < R$ pour tout $x \in [0, \infty)$. En effet, si $\alpha_2(x)$ de (1₃) changeait de signe dans l'intervalle $(0, \lambda)$, il existerait un $x_0 \in (0, \lambda)$ tel que $\alpha_2(x_0) = 0$, donc à cause de (4) $\alpha_1(x_0) = \pm R$ et $\alpha'_1(x_0) = 0$ (étant donné que la tangente au cercle (S) aux points $(\pm R, 0)$ est parallèle à l'axe $O\beta_2$ et que $\alpha'_1(x)$ et $\alpha(x)$ sont, conformément à (1₃), bornées en $[0, \lambda]$).

Or, (5) s'écrit dans notre cas ($P(\beta_1) = R^2 - \beta_1^2$) $\alpha'_1(x)\alpha_2(x) - \alpha'_2(x) \cdot \alpha_1(x) + \alpha_1^2(x) + R^2\alpha_2(x) = 0$.

*) ce qui suppose d'ailleurs que le point $(\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ est situé sur (S) pour tout $x \geq 0$ et que $\alpha_1(x)$ est, conformément à l'hypothèse H_5 , strictement monotone dans l'intervalle $[0, \infty)$.

Cette relation donne pour $x = x_0$ si, pour fixer les idées, $\alpha_1(x_0) = R$; $R = \alpha'_2(x_0)$, ce qui contredit la relation $|\alpha'_2(x)| \leq K$, qui résulte de (45) et du fait, facile à établir, que $\alpha'_2(x)$ est la limite uniforme d'une suite de dérivées de fonctions $a_2(x)$ de (1).

L'hypothèse H_5 n'est pas assurée, vu que dans notre cas ($P(\beta_1) = R^2 - \beta_1^2$; $b = -R, c = R$) les fonctions $A^-(\alpha_1)$ et $A^+(\alpha_1)$ de l'hypothèse H_2 ont la forme

$$(45_1) \quad \frac{1}{4} A^-(\alpha_1) = -\alpha_1^2 + R^2 \sqrt{R^2 - \alpha_1^2}; \quad \frac{1}{4} A^+(\alpha_1) = -(\alpha_1^2 + R^2 \sqrt{R^2 - \alpha_1^2}).$$

Nous sommes donc obligés de nous reporter aux points 1°–5° de ce procédé 1.

1°. L'équation (34) s'écrit $-\frac{\alpha_1}{\sqrt{R^2 - \alpha_1^2}} = \frac{l_1}{l_0}$ et a dans l'intervalle $(-R, R)$ la seule racine

$$(46) \quad \rho_1^- = -\frac{R\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \quad \text{avec } \rho = \frac{l_1}{l_0}.$$

L'équation (33) s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi^-(\alpha_1) &= \exp \left(R^2 \int_{\text{const}}^{\alpha_1} \frac{s}{(R^2 - s^2)(R^2 \sqrt{R^2 - s^2} - s^2)} ds \right) = \\ &= \text{const} \sqrt{R^2 - \alpha_1^2} \left(\sqrt{R^2 - \alpha_1^2} + \frac{R}{2} (R + \sqrt{4 + R^2}) \right)^{-\frac{1}{2} \frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{\sqrt{4 + R^2}}} (\sqrt{R^2 - \alpha_1^2} - \\ &\quad - \frac{R}{2} (-R + \sqrt{4 + R^2}))^{-\frac{1}{2} \frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{\sqrt{4 + R^2}}} = 0 \end{aligned}$$

et n'admet pas de racines dans l'intervalle $(-R, R)$. L'ensemble $\Sigma^{(1)}$ est donc composé des nombres $-R, -\rho_0$ et ρ_0 , avec

$$(46_1) \quad \rho_0 = R \sqrt{\frac{R}{2} (-R + \sqrt{4 + R^2})}.$$

La relation (35) donne

$$\begin{aligned} G^-(s) &= \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - s^2} (s^2 - R^2 \sqrt{R^2 - s^2})} \\ F^-(s) &= \int G^-(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2R(4 + R^2)}} \left[2\sqrt{-R + \sqrt{4 + R^2}} \right]. \end{aligned}$$

$$(47) \quad \arctg \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{4 + R^2}}{R}} \frac{R - \sqrt{R^2 - s^2}}{s} + \\ + \sqrt{R + \sqrt{4 + R^2}} \log \left| \frac{R - \sqrt{\frac{1}{R}(-2 + \sqrt{4 + R^2})s - \sqrt{R^2 - s^2}}}{R + \sqrt{\frac{1}{R}(-2 + \sqrt{4 + R^2})s - \sqrt{R^2 - s^2}}} \right| + \text{const.}$$

Tableau 1.

S	$-R$	$-\rho_0$	0	ρ_0	R
$\frac{1}{4} A^-(s)$	$-R^2$	$\nearrow 0$	$\nearrow R^2$	$\searrow 0$	$\searrow -R^2$

On a donc $\text{sg } G^-(s) = -\text{sg } A^-(s)$ avec $A^-(s)$ donnée par (45₁). Par suite, on doit avoir au tableau 1 $[\sigma_k^{(1)}, \rho_1^-] \subseteq [-\rho_0, \rho_0]$, pour que $G^-(s) \leq 0$ pour $s \in [\sigma_k^{(1)}, \rho_1^-]$. Or, $F^-(s)$ de (47) devient infinie pour les (seules) valeurs $s = \pm \rho_0$. Il en résulte que l'ensemble $\Sigma^{[1]}$ est vide.

2°. Pour les mêmes raisons que celles du point 1°, l'ensemble $\Sigma^{[2]}$ est vide si $\rho_1^- \leq \rho_0$ et est constitué par la paire (ρ_1^-, R) si $\rho_1^- > \rho_0$. En ce cas (35), (46) et (47) donnent

$$(48) \quad \lambda^{[2]} = F^-(R) - F^-(\rho_1^-) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2R(4 + R^2)}} \left[2\sqrt{-R + \sqrt{4 + R^2}} \arctg \cdot \right. \\ \left. \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{4 + R^2}}{R}} \frac{-1 + \rho + \sqrt{1 + \rho^2}}{\rho - (-1 + \sqrt{1 + \rho^2})} \frac{-2 + \sqrt{4 + R^2}}{R} + \right. \\ \left. + \sqrt{R + \sqrt{4 + R^2}} \log \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{R}(-2 + \sqrt{4 + R^2})}}{1 + \sqrt{\frac{1}{R}(-2 + \sqrt{4 + R^2})}} \cdot \right. \\ \left. \frac{-1 + \sqrt{1 + \rho^2} - \rho \sqrt{\frac{1}{R}(-2 + \sqrt{4 + R^2})}}{-1 + \sqrt{1 + \rho^2} + \rho \sqrt{\frac{1}{R}(-2 + \sqrt{4 + R^2})}} \right].$$

Cette expression très simple peut se simplifier davantage si l'on pose:

$$(49) \quad q = -\rho + \sqrt{1 + \rho^2}, \quad A = \frac{1}{2}(R + \sqrt{4 + R^2} + \sqrt{2R(R + \sqrt{4 + R^2})}).$$

On en déduit en effet

$$(50) \quad \rho = \frac{1 - q^2}{2q}, \quad R = \frac{(A^2 - 1)^2}{2A(A^2 + 1)},$$

et portant ces valeurs dans (48), il vient

$$(51) \quad \lambda^{[2]} = \frac{2A(A^2 + 1)}{(A^2 - 1)(A^4 + 6A^2 + 1)} \left[(A^2 + 1) \log \frac{Aq - 1}{A(q - A)} + 4A \arctg \frac{A^2 - 1}{2A + q(A^2 + 1)} \right].$$

3°. L'équation (37) s'écrit $\frac{\alpha_1}{\sqrt{R^2 - \alpha_1^2}} = \frac{l_1}{l_0}$ et a dans l'intervalle $(-R, R)$ la seule racine

$$(52) \quad \rho_1^+ = \frac{R\rho}{\sqrt{1 + \rho^2}} \quad \text{avec } \rho = \frac{l_1}{l_0}.$$

L'équation (36) s'écrit

$$\Phi^+(\alpha_1) = \exp \left(-R^2 \int_{\text{const}}^{\alpha_1} \frac{s}{(R^2 - s^2)(s^2 + R^2 \sqrt{R^2 - s^2})} ds \right) = \\ = \text{const} \sqrt{R^2 - \alpha_1^2} \left[\sqrt{R^2 - \alpha_1^2} - \frac{R}{2} (R + \sqrt{4 + R^2}) \right]^{-\frac{1}{2} \frac{-R + \sqrt{4 + R^2}}{\sqrt{4 + R^2}}} \left[\sqrt{R^2 - \alpha_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{R}{2} (-R + \sqrt{4 + R^2}) \right]^{-\frac{1}{2} \frac{R + \sqrt{4 + R^2}}{\sqrt{4 + R^2}}} = 0$$

et n'admet pas de racines dans l'intervalle $(-R, R)$.

On déduit de (38) dans notre cas

$$G^+(s) = -\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - s^2}(s^2 + R^2 \sqrt{R^2 - s^2})},$$

$$(53) \quad F^+(s) = \int G^+(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2R(4 + R^2)}} \left[-2\sqrt{-R + \sqrt{4 + R^2}} \arctg \cdot \right. \\ \left. \sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 + R^2}}{R}} \cdot \frac{R - \sqrt{R^2 - s^2}}{s} + \right. \\ \left. + \sqrt{R + \sqrt{4 + R^2}} \log \left| \frac{R - \sqrt{\frac{1}{R}(2 + \sqrt{4 + R^2})s - \sqrt{R^2 - s^2}}}{R + \sqrt{\frac{1}{R}(2 + \sqrt{4 + R^2})s - \sqrt{R^2 - s^2}}} \right| \right] + \text{const.}$$

L'ensemble $\Sigma^{[3]}$ est donc constitué par la paire $(\rho_1^-, -R)$, auquel cas (38), (52) et (53) donnent

$$\begin{aligned} \lambda^{[3]} &= F^+(-R) - F^+(\rho_1^+) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2R(4+R^2)}} \left[2\sqrt{-R + \sqrt{4+R^2}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2+\sqrt{4+R^2}}{R}} + \right. \right. \\ (54) \quad &\left. \left. + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2+\sqrt{4+R^2}}{R}} \cdot \frac{-1+\sqrt{1+\rho^2}}{\rho} \right) + \right. \\ &\left. + \sqrt{R + \sqrt{4+R^2}} \log \frac{1 + \sqrt{\frac{2+\sqrt{4+R^2}}{R}} - 1 + \sqrt{1+\rho^2} + \rho}{-1 + \sqrt{\frac{2+\sqrt{4+R^2}}{R}} - (-1 + \sqrt{1+\rho^2}) + \rho} \sqrt{\frac{2+\sqrt{4+R^2}}{R}} \right]. \end{aligned}$$

Si l'on se reporte à la relation

$$(55) \quad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1-ab}{a+b} \quad (a \geq 0; a+b \geq 0),$$

qui a lieu entre les déterminations principales de arc tg et si l'on se sert des valeurs (50), l'expression (54) devient

$$(56) \quad \lambda^{[3]} = \frac{2A(A^2+1)}{(A^2-1)(A^4+6A^2+1)} \left[(A^2+1) \log A \frac{A+q}{1+q} + \right. \\ \left. + 4A \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{-2A+q(1+A^2)}{A^2-1} \right) \right].$$

Il est facile de voir que

$$(57) \quad \lambda^{[2]} > \lambda^{[3]}.$$

Une comparaison directe entre ces deux valeurs n'est pas possible. En effet, le nombre $\lambda^{[2]}$ n'existe que si $\rho_1^- > \rho_0$. Avec les expressions (46) et (46₁) cette inégalité est équivalente à l'inégalité $\rho < -\sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4+R^2})$, qui s'écrit avec les valeurs (50) $q > A$, de sorte que en (56) on a $\frac{-2A+q(1+A^2)}{A^2-1} > 0$ et en (51) $Aq > A^2 > 1$, donc $\frac{Aq-1}{A(q-A)} > 0$. A l'aide de la relation (55) on déduit alors de suite que les termes concernant les logarithmes dans (51) et (56) sont en rapport de grandeur inverse que ceux

contenant des arc tg. Toutefois, pour démontrer l'inégalité (57) il suffit d'écrire à l'aide de (55) la différence

$$f(p) = \lambda^{[2]} - \lambda^{[3]} = \frac{2A(A^2+1)}{(A^2-1)(A^4+6A^2+1)} \left[(A^2+1) \log \frac{A^2p-1}{A^2(p-A^2)} - \right. \\ \left. - 4A \operatorname{arctg} \frac{4A(A^2-1)}{(A^2+1)^2p + A^4 - 6A^2 + 1} \right]$$

(où $p = q^2 > A^2$) et de remarquer que

$$f'(p) = - \frac{2A(A^2-1)^2(A^2+1)^3(p+1)^2}{(p-A^2)(A^2p-1)[(A^2+1)^2p^2 + 2(A^2+1)^2(A^4-6A^2+1)p + (A^4-6A^2+1)^2 + 16A^2(A^2-1)^2]} < 0$$

de sorte qu'alors que $p = q^2$ croît de A^2 à ∞ , $f(p)$ décroît de ∞ à 0, donc $\lambda_1^{[2]} > \lambda^{[3]}$.

4°. Vu que (49) donne $G^+(s) < 0$, la condition $G^+(s) \geq 0$ ne peut être satisfaite et l'ensemble $\Sigma^{[1]}$ est vide.

Il reste à se reporter au point 5° du procédé, pour obtenir le

THÉORÈME 1. Si, dans les notations du § 1, le domaine (D) est un cercle de centre l'origine des axes $O\beta_1\beta_2$ et de rayon R et si les hypothèses H_1 , H_2 , H_3 et H_4^* sont assurées, alors $\lambda \geq \lambda^{[3]}$ avec $\lambda^{[3]}$ donné par (56) et (49). On peut remplacer l'hypothèse H_5 par d'autres, par exemple par la suivante :

Hypothèse H_6 . Les fonctions $a_1(x)$ de (1) sont telles que toute fonction — limite d'une suite $\{a_{1,n}(x)\} (n=1, 2, \dots)$ quelconque de telles fonctions ne prend pas de valeur constante sur aucun intervalle du demi-axe positif Ox .

En ce cas, conformément au lemme, la fonction $\alpha_1(x)$ est strictement monotone dans l'intervalle $[0, \lambda]$, ce qui rend — ainsi qu'on l'a constaté au § 4 — l'utilisation du procédé 2 possible.

Nous admettrons donc l'hypothèse H_6 dans le cas particulier traité ci-dessus et nous nous reporterons aux points 1°—5° du procédé 2; nous nous servirons des relations respectives utilisées au cours de l'application du procédé 1 au même cas particulier.

1° L'ensemble P^- est constitué par le nombre ρ_1^- de (46) et l'ensemble $\Sigma^{(1)}$ par le nombre $-R$. Ainsi qu'on l'a remarqué à propos de l'application du procédé 1, l'ensemble $\Sigma^{[1]}$ est vide (l'inclusion $[-R, \rho_1^-] \subseteq [-\rho_0, \rho_0]$ n'ayant pas lieu).

2°. L'ensemble $\Sigma^{(2)}$ est composé du nombre R . L'ensemble $\Sigma^{[2]}$ est donc vide si $\rho_1^- \leq \rho_0$ et composé de la paire (ρ_1^-, R) si $\rho_1^- > \rho_0^*$ auquel cas l'ensemble $\Lambda^{[2]}$ est constitué par le nombre $\lambda^{[2]}$ de (51).

* l'hypothèse H_2 est assurée (conformément à (46), (46₁), et au tableau 1) si (et seulement si) $\rho^2 \neq \frac{R}{2}(R + \sqrt{4+R^2})$.

* conformément au tableau 1 et à (47).

3°. L'ensemble P^+ est constitué par le nombre ρ_1^+ de (52) et l'ensemble $\Sigma^{[3]}$ par le nombre $-R$. L'ensemble $\Sigma^{[3]}$ est composé de la paire $(\rho_1^+, -R)$. L'ensemble $\Lambda^{[3]}$ est constitué par le nombre $\lambda^{[3]}$ de (56).

4°. L'ensemble $\Sigma^{[4]}$ est constitué par le nombre R . L'ensemble $\Sigma^{[4]}$ est vide (la relation $G^+(s) \geq 0$ n'ayant pas lieu en (53)).

5°. Si $\rho_1^- \leq \rho_0$ (ce qui, avec les valeurs (46) et (46₁) s'écrit $\rho \geq -\sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4 + R^2})$ et avec les valeurs (49): $q \leq A$), l'ensemble $\mathfrak{M}$ de (43) se compose du seul nombre $\lambda^{[3]}$ donné par (56), par conséquent $\lambda = \lambda^{[3]}$. Si $\rho_1^- > \rho_0$ (ce qui équivaut à $\rho < -\sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4 + R^2})$ ou à $q > A$) l'ensemble $\mathfrak{M}$ se compose des nombres $\lambda^{[2]}$ et $\lambda^{[3]}$. On a donc le

THÉORÈME 2. Si, dans les notations du § 1, le domaine (D) est un cercle de centre l'origine des axes $O\beta_1\beta_2$ et de rayon R , et si les hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4 et H_6 sont assurées, alors: si $\rho > -\sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4 + R^2})$ (c'est-à-dire avec les valeurs (49) si $q < A$), on a $\lambda = \lambda^{[3]}$ (donné par (56)), tandis que si $\rho < -\sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4 + R^2})$ (c'est-à-dire si en (49) $q > A$), le nombre λ est l'un des nombres $\lambda^{[2]}$ ou $\lambda^{[3]}$ (donnés respectivement par (51) et (56)).

Remarque 10. Le théorème 1 a été obtenu en application de la délimitation (42) (b). Si, après l'utilisation faite ci-dessus des points 1°-4° du procédé 1 on se reporte à la délimitation (42) (a), on obtient le

THÉORÈME 3. Si dans les notations du § 1, le domaine (D) est un cercle de centre l'origine des axes $O\beta_1\beta_2$ et de rayon R et si les hypothèses H_1, H_2, H_3 et H_4 sont assurées*, alors: si $\rho > -\sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4 + R^2})$ (ce qui équivaut en (49) à $q < A$) on a $\lambda \geq \lambda^{[3]}$ (donné par (56)), tandis que si $\rho < -\sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4 + R^2})$ (c'est-à-dire si en (49) $q > A$) on a $\lambda \geq \lambda^{[2]}$ ou $\lambda \geq \lambda^{[3]}$ (avec $\lambda^{[2]}$ donné par (51)).

Les nombres $\lambda^{[2]}$ et $\lambda^{[3]}$ sont respectivement égaux aux nombres $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}$ du théorème 2 de [1]. Le théorème 3 ci-dessus assigne donc à λ des valeurs au moins égales à celles assignées par ce théorème.

* On peut, conformément au renvoi page 351, rayer l'hypothèse H_2 de cet énoncé, ainsi que de l'énoncé du théorème 2, à la condition de compléter la relation $\rho > -\sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4 + R^2})$ par la relation $\rho \neq \sqrt{\frac{R}{2}}(R + \sqrt{4 + R^2})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ripianu D., *Asupra problemei bilocale pentru ecuații diferențiale liniare* (I). Studii și cercetări matematice, 17, 8, 1281-1295 (1965).
- [2] Lasota A. et Opial Z., *L'application du principe de Pontriaghin à l'évaluation de l'intervalle d'existence et d'unicité des solutions d'un problème aux limites*. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences Math., astr. et phys. XI., 2, 41-45 (1963).
- [3] Понтрягин Л., Больтянский В., Гамкрелидзе Р., Мищенко Е., *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва. 1961.

Reçu le 26.XII.1967.

Ce travail a été présenté au Colloque sur la Théorie de l'Approximation des Fonctions, du 1^{er} au 20 Septembre 1967, à Cluj (Roumanie)