

Lemma 4.2. (Kiš [4]). If $f(z)$ is analytic in $|z| < 1$ and continuous in $|z| \leq 1$, and if $F_n(z)$ is the Jackson mean, then

$$|f(e^{i\theta}) - F_n(e^{i\theta})| \leq 6\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

where $\omega(\delta)$ is the modulus of continuity of $f(z)$. The explicit form of Jackson mean $F_n(z)$ of degree $2n-2$ is given by

$$F_n(z) = \frac{3}{(2n^2+1)2\pi ni} \int_{|t|=1} f(t) t^{1-2n} \left(\frac{t^n - z^n}{t - z}\right)^4 dt.$$

Proof of Theorem 3. Let $N = [n/2]$. Then $F_N(z)$ is a polynomial of degree $\leq n-2$ and so $F_N^{(p)}(z)$ vanishes identically for $p \geq n-1$.

Therefore

$$\begin{aligned} f(z) - \Pi_n(z) &= f(z) - F_N(z) + F_N(z) - \Pi_n(z) = \\ &= f(z) - F_n(z) + \sum_{k=1}^n (F_N(z_k) - f(z_k)) R_k(z) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \beta_k S_k(z) - \sum_{k=1}^n \gamma_k S_k(z). \end{aligned}$$

Using Lemma 4.1, 4.2, and (2.23) we have

$$|f(z) - \Pi_n(z)| \leq 6\omega\left(\frac{1}{N}\right) + 6\omega\left(\frac{1}{N}\right)(16 + \log n) + o(1) = o(1)$$

since $\omega(\delta) \log \frac{1}{\delta} \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$. This completes proof of Theorem 3.

REFERENCES

- [1] Atkinson K. and Sharma A., *A partial characterization of poised Hermite Birkhoff interpolation problems*. SIAM Journ. on Num. Analyse, Series B, 6 (2), 230-235 (1969).
- [2] Curry H. B. and Schoenberg I. J., *On Polya Frequency functions IV*. Journal d'Analyse Math., 17, 71-107 (1966).
- [3] Fergusson D., *The question of uniqueness for G. D. Birkhoff interpolation problems*. (NRC Report, 861, Madison). Journ. Approx. Theory, 2, 1-28 (1969).
- [4] Kiš O., *Remarks on interpolation* (Russian). Acta Math. Acad. Scien. Hungaricae, 11, 49-64 (1960).
- [5] Sharma A., *Some remarks on lacunary interpolation in the roots of unity*. Israel Journal of Mathematics, 2 (1), 41-49 (1964).
- [6] Sharma A. and Prasad J., *Abel-Hermite-Birkhoff interpolation*, SIAM Journal, Series B (1968).
- [7] Surányi J. and Turán P., *Note on Interpolation I*. Acta. Math. Acad. Sci. Hungaricae, 6, 67-69 (1955).

Received 26. XII. 1968.

Department of mathematics,
University of Alberta,
Edmonton, Canada.

SUR UN PROBLÈME D'AFFECTATION

par

ȘTEFAN ȚIGAN

à Cluj

§ 1.

Introduction

Le problème d'affectation classique consiste en la détermination du minimum de la fonction

$$(1) \quad z'(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

de telle manière que l'on ait :

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(4) \quad x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$$

où $c_{ij} \geq 0$, $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$.

Dans les travaux [3], [4] on étudie le problème d'affectation suivant :

Déterminer le maximum de la fonction

$$(1') \quad z(X) = \min_i \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

de telle manière que les conditions (2)-(4) soient vérifiées. Un problème analogue est également étudié dans le travail [1].

Dans cette note on considère le problème d'affectation suivant :

Déterminer le maximum de la fonction $z(X)$ dans les conditions (2)–(4) et

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \leq K$$

où $d_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$) et $K \geq 0$.

§ 2.

Définitions et notations

Une matrice carrée d'ordre n , $X = [x_{ij}]$ s'appelle solution admissible du problème (1'), (2)–(4) ou du problème (1'), (2)–(5), si les éléments x_{ij} vérifient les conditions (2)–(4) respectivement les conditions (2)–(5). Une solution optimale pour l'un des problèmes (1'), (2)–(4), (1'), (2)–(5) est une solution admissible du problème respectif, pour laquelle la fonction $z(X)$ atteint son maximum.

L'ensemble des solutions admissibles du problème (1'), (2)–(4) sera désigné par A .

Désignons par M le produit cartésien $N \times N$, où $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Nous dirons qu'un ensemble $Q \subset M$ est un ensemble de r éléments indépendants, si $\text{card } Q = r$ et si pour deux éléments distincts quelconques (i, j) et (t, u) de Q on a $i \neq t$ et $j \neq u$.

On voit facilement que si l'ensemble $Q \subset M$ est un ensemble de n éléments indépendants, alors $X = [x_{ij}]$, où

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pour } (i, j) \notin Q \\ 1 & \text{pour } (i, j) \in Q, \end{cases}$$

est une solution admissible du problème (1'), (2)–(4).

Dans ce qui suit, au § 4 on obtient un algorithme pour la détermination d'une solution optimale pour le problème (1'), (2)–(5). Cet algorithme est basé sur l'algorithme du problème (1'), (2)–(4) présenté au § 3.

§ 3.

Algorithme pour le problème (1'), (2)–(4)

$$1^\circ. P_1 = \bigcup_{q=1}^n (T'_q \cup T''_q) \quad \text{où} \quad T'_q = \{(i, j) \in M \mid c_{ij} = \max_h c_{qh}\}, \\ T''_q = \{(i, j) \in M \mid c_{ij} = \max_k c_{kq}\}.$$

2°. a) Si à une itération quelconque s l'ensemble P_s contient un sous-ensemble Q de n éléments indépendants, alors une solution optimale du pro-

blème (1'), (2)–(4) est la matrice $X_0 = [x_{ij}^0]$, où

$$x_{ij}^0 = \begin{cases} 0, & \text{pour } (i, j) \notin Q \\ 1, & \text{pour } (i, j) \in Q. \end{cases}$$

b) Si la condition 2°a) n'est pas remplie, on passe à l'étape suivante 3°.

3°. $P_{s+1} = P_s \cup L_{s+1}$, où $L_{s+1} = \{(i, j) \in M \mid c_{ij} = C_{s+1}\}$ et $C_{s+1} = \max_{(k,h) \in M - P_s} c_{kh}$.

4°. $s := s + 1$ et on passe à l'étape 2°.

Pour établir si l'ensemble P_s contient ou non un sous-ensemble de n éléments indépendants, on peut employer l'algorithme d'Egervary ([2]) pour déterminer l'ensemble maximal des éléments 0-indépendants d'une matrice carrée.

§ 4.

Algorithme pour le problème (1'), (2)–(5)

1° a) Si

$$(6) \quad \min_{X \in A} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \leq K,$$

alors le problème a au moins une solution admissible et l'algorithme continue en passant à l'étape 2°.

b) Si la condition (6) n'est pas remplie alors le problème (1'), (2)–(5) n'a pas de solution.

2°. On détermine à l'aide de l'algorithme du § 3 une solution $X_0 \in A$, de telle manière que l'on ait $z(X_0) = \max_{X \in A} z(X)$.

3°. $P_1 = \{(i, j) \in M \mid c_{ij} \geq C_1 = z(X_0)\}$.

4°. A une itération quelconque s on détermine une matrice $X'_s \in A$, de telle sorte que l'on ait

$$(7) \quad v_s(X') = \min_{X \in A} v_s(X),$$

où $v_s(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}^s x_{ij}$ et $g_{ij}^s = \begin{cases} +\infty & \text{pour } (i, j) \notin P_s \\ d_{ij} & \text{pour } (i, j) \in P_s. \end{cases}$

5° a) Si $v_s(X'_s) \leq K$, alors X'_s est une solution optimale pour le problème (1'), (2)–(5).

b) Si $v_s(X'_s) > K$, alors l'algorithme continue en passant à l'étape 6°.

6°. $P_{s+1} = P_s \cup L_{s+1}$, où $L_{s+1} = \{(i, j) \in M \mid c_{ij} = C_{s+1}\}$ et $C_{s+1} = \max_{(k,h) \in M - P_s} c_{kh}$.

7° $s := s + 1$ et on passe à l'étape 4°.

Afin d'obtenir une solution admissible qui vérifie la condition (7) et de vérifier si la condition (6) est remplie, on peut employer l'une des métho-

des connues pour la résolution de problème d'affectation (1) — (4) (voir [2]).

On voit facilement que si la condition (6) n'est pas remplie, alors le problème (1'), (2) — (5) n'admet aucune solution admissible, parce que la condition (5) ne peut être remplie.

L'algorithme finit après un nombre fini d'itérations, parce que à chaque itération $\text{card}(M - P_s)$ diminue d'au moins une unité, et que l'algorithme s'arrête au cas le plus défavorable quand $\text{card}(M - P_s) = 0$.

Nous démontrons le théorème suivant:

THÉOREME. *La solution X'_s qui vérifie la condition $v_s(X'_s) \leq K$ est une solution optimale du problème (1'), (2) — (5).*

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que toute solution admissible $X \in A$ (du problème (1'), (2) — (4)) qui vérifie la condition

$$(8) \quad z(X) > z(X'_s)$$

n'est pas une solution admissible du problème (1'), (2) — (5).

Si $X = [x_{ij}]$ vérifie la condition (8), alors les éléments x_{ij} jouissent de la propriété suivante:

$$(9) \quad x_{ij} = 1 \text{ implique } (i, j) \in P_{s-1},$$

vu que s'il existe au moins un élément $x_{ij} = 1$ tel que $(i, j) \notin P_{s-1}$ alors $z(X) \leq c_{ij} \leq z(X'_s)$, ce qui contredit la relation (8). Mais si X vérifie la propriété (9), on a

$$(10) \quad v_{s-1}(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}.$$

Il résulte de (10) et de la relation $v_{s-1}(X) > K$, que X ne vérifie pas la condition (5). Il s'ensuit que X'_s est une solution admissible du problème (1'), (2) — (5), pour laquelle la fonction $z(X)$ prend la valeur maximum, donc qu'elle est une solution optimale du problème (1'), (2) — (5).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ducamp A., *Un problème d'affectation*. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherches Opérationnelles, 8, 1 (1966).
- [2] Egerváry J., *Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására*. MTA Mat. Kut. Int. Közl., IV, 1 (1959).
- [3] Fulkerson D., Glicksberg I., Gross O., *A Production Line Assignment Problem*. The RAND Corporation Research Memorandum RM-1102, Santa Monica, California (1953).
- [4] Gross O., *The Bottleneck Assignment Problem*. The RAND Corporation P-1630 (1959).
- [5] Uri Yechiali, *A Stochastic Bottleneck Assignment Problem*. Management Science, 14, 11 (1968).

Received 12. VII. 1969.

Académie de la République Socialiste Roumanie
Filiale de Cluj
Institut de Calcul

ON A NUMBER-THEORETIC FUNCTION

by

DIMITRIJE UGRIN ŠPARAC

Zagreb

Let us define a number-theoretic function thus

$$s_r(n) = \begin{cases} +1 & \text{for } n \equiv 1, 2, 3, \dots, 2R \pmod{4R} \\ -1 & \text{for } n \equiv 2R+1, 2R+2, \dots, 4R \pmod{4R}, \end{cases}$$

where $4R = 2^r$, $r = 2, 3, 4, \dots$

Certain interesting problems in number theory, connected with the above defined function, are easily solved by use of some analytic expressions for this function. Finding such analytic expressions is the principal aim of the present paper.

We apply the method of discrete Laplace transformation [1], [2]. Let $F(n)$ is a number-theoretic function. Discrete Laplace transform (shortly D -transform) of the function $F(n)$ is defined by

$$D\{F(n)\} = f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)e^{-nq},$$

where q is complex variable. The following two relations are easily proved:

$$(1) \quad D\{F(t+k)\} = e^{kq}(f(q) - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-nq}F(n)),$$

where t and k are nonnegative integers;

$$(2) \quad D\{e^{aq}\} = \frac{e^q}{e^q - e^a}$$

where a is arbitrary complex number (if $|e^{a-q}| < 1$).