Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 21 (1—2), (1970), pp. 21—26.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES „FONCTIONS SPLINE”

Par

D. V. IONESCU (Cluj)

Hommage au Professeur G. ALEXITS, *à l'occasion de son 70e anniversaire*

Considérons la différence divisée $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$ de la fonction f sur les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_n$ où $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ et supposons que la fonction f soit de la classe $c\,[x_0, x_n]$. Nous avons donné [2], la représentation intégrale

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \int_{x_0}^{x_n} \psi(s) f^{(n)}(s)\, ds, \tag{1}$$

où la fonction ψ a été obtenue par la solutions d'un problème aux limites et les conditions aux limites nous ont permis de démontrer que la fonction ψ est positive sur l'intervale (x_0, x_n) et qu'on a

$$\int_{x_0}^{x_n} \psi(s)\, ds = \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

Considérons la différence d'ordre n, de la fonction f avec des pas différents $h_1, h_2, \dots, h_n$ définie par la formule

$$\mathop{\Delta}_{h_1, h_2, \dots, h_n}^{n} f(x) = f(x + h_1 + \dots + h_n) - \sum f(x + h_1 + \dots + h_{n-1}) + \dots + (-1)^n f(x). \tag{3}$$

M. FRÉCHET [1] a donné une caractérisation fonctionnelle des polynômes par le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Les solutions continues de l'équation fonctionnelle*

$$\mathop{\Delta}_{h_1, h_2, \dots, h_n}^{n} f(x) = 0, \tag{4}$$

quels que soient x et les pas $h_1, h_2, \dots, h_n$, sont des polynomes de degré $n-1$ au plus.

En supposant que $0 < h_1 \leqq h_2 \leqq \dots \leqq h_n$ et que $f \in C^n[x, x + h_1 + \dots + h_n]$ nous avons montré [3] qu'on a la représentation intégrale

$$\mathop{\Delta}_{h_1, h_2, \dots, h_n}^{n} f(x) = \int_{x}^{x + h_1 + \dots + h_n} \theta(s) f^{(n)}(s)\, ds, \tag{5}$$

où la fonction θ s'obtient par la solution d'un problème aux limites. Les conditions aux limites nous ont permis de démontrer que la fonction θ est positive sur l'intervale $[[x, x + h_1 + \dots + h_n]$ et que

$$\int_{x}^{x + h_1 + \dots + h_n} \theta(s)\, ds = h_1 h_2 \dots h_n. \tag{6}$$

T. POPOVICIU [6] a considéré la fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x+\alpha_i h), \tag{7}$$

où les coefficients A_i et α_i sont liés par les équations

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \alpha_i^j = 0, \tag{8}$$

pour $j=0, 1, \ldots, m-1$, et

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \alpha_i^m \neq 0. \tag{9}$$

T. Popoviciu a donné une caractérisation fonctionnelle des polynômes par le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Dans les conditions* (8) *et* (9), *les solutions continues de l'équations fonctionnelle*

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x+\alpha_i h) = 0, \tag{10}$$

quels que soient x et h, sont des polynômes de degré $m-1$ au plus.

Les exemples précédents nous conduisent à considérer en général la fonctionnelle $L[f]$, de la forme

$$L[f] = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n), \tag{11}$$

où la fonction f est définie sur les noeuds $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. On suppose que les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ soient tels que l'on ait

$$L[1] = 0,\ L[x] = 0, \ldots, L[x^{m-1}] = 0,\ L[x^m] = 1 \tag{12}$$

avec $m < n+1$. Nous avons donc les relations:

$$\begin{aligned} A_0 \quad &+ A_1 \quad + \ldots + A_n \quad = 0,\\ A_0 x_0 \quad &+ A_1 x_1 \quad + \ldots + A_n x_n \quad = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_0 x_0^{m-1} &+ A_1 x_1^{m-1} + \ldots + A_n x_n^{m-1} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

et

$$A_0 x_0^m + A_1 x_1^m + \ldots + A_n x_n^m = 1. \tag{14}$$

Dans ce travail nous montrerons surtout que, si $f \in C^m[x_0, x_n]$, on a la représentation intégrale

$$L[f] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) f^{(m)}(s)\, ds, \tag{15}$$

où la fonction φ s'obtient par la solution d'un problème aux limites.

Si les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont donnés, on peut fixer les coefficients $A_m, A_{m+1}, \ldots, A_n$ et alors les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ sont parfaitement déterminés par les équations (13). On peut aussi écrire les coefficients $A_m, A_{m+1}, \ldots, A_n$ sous la forme $HA_m', HA_{m+1}', \ldots, HA_n'$ où $A_m', A_{m+1}', \ldots, A_n'$ sont donnés et alors les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ seront de la forme $HA_0', HA_1', \ldots, HA_{m-1}'$. Si $A_0x_0^m + A_1x_1^m + \ldots + A_nx_n^m \neq 0$, on peut déterminer le facteur H par la condition (14).

Pour déterminer les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ on peut ajouter aux équations (13) d'autre équations entre ces coefficients qu'on peut prendre de différentes manières. De cette façon on obtient des classes de fonctionnelles de la forme (11).

Nous donnons l'exemple suivant:

Supposons que les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forment une progression arithmétique de raison h et qu'on envisage la fonctionnelle (11), lorsque entre les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ on a les équations

$$A_0 = A_n = 1,\ A_1 = A_{n-1}, \ldots, A_{p-1} = A_{n-p+1}, \qquad (16)$$
$$A_p = A_{p+1} = \ldots = A_{n-p}.$$

On suppose que les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$ soient donnés par les formules

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_1 - C'_{2p}\lambda_0 \\ A_2 &= \lambda_2 - C'_{2p}\lambda_1 + C^2_{2p}\lambda_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p &= \lambda_p - C'_{2p}\lambda_{p-1} + \ldots + (-1)^p C^p_{2p}\lambda_0, \end{aligned} \qquad (17)$$

où

$$\lambda_j = \frac{C^p_{j+p}C^p_{n-p-j}}{C^p_{n-p}} \qquad (18)$$

pour $j = 0, 1, \ldots, p$.

Dans ces conditions, nous avons montré que

$$L[1] = 0,\ L[x] = 0, \ldots, L[x^{2p-1}] = 0 \qquad (19)$$

et que si $f \in C^{2p}[x_0, x_n]$, nous avons la représentation intégrale

$$L[f] = \int_{x_0}^{x_n} \theta(s) f^{(2p)}(s)\, ds, \qquad (20)$$

où la fonction θ est positive sur l'intervalle (x_0, x_n).

Les résultats de ce travail ont été communiqués au «Colloque sur les équations fonctionnelles», Bucarest—Mamaia [4] (11—17 sept. 1968).

1. Supposons que $f \in C^m[x_0, x_n]$ et cherchons une représentation intégrale de la fonctionnelle (11). Pour cela rattachons aux intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ les polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ solutions des équations différentielles

$$\varphi_1^{(m)} = 0,\ \varphi_2^{(m)} = 0, \ldots, \varphi_n^{(m)} = 0. \qquad (21)$$

Nous pouvons écrire alors les formules suivantes:

$$\begin{aligned} (\varphi_1^{(m-1)} f - \varphi_1^{(m-2)} f' + \ldots + (-1)^{m-1}\varphi_1 f^{(m-1)})_{x_0}^{x_1} &= (-1)^{m-1} \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1 f^{(m)}\, ds, \\ (\varphi_2^{(m-1)} f - \varphi_2^{(m-2)} f' + \ldots + (-1)^{m-1}\varphi_2 f^{(m-1)})_{x_1}^{x_2} &= (-1)^{m-1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 f^{(m)}\, ds, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\varphi_n^{(m-1)} f - \varphi_n^{(m-2)} f' + \ldots + (-1)^{m-1}\varphi_n f^{(m-1)})_{x_{n-1}}^{x_n} &= (-1)^{m-1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_n f^{(m)}\, ds. \end{aligned} \qquad (22)$$

Relativement à ces formules nous traiterons le

Problème aux limites: déterminer les polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ qui vérifient les conditions aux limites

$$\varphi_1(x_0) = 0, \varphi_1'(x_0), \ldots, \varphi_1^{(m-2)}(x_0) = 0, \quad \varphi_1^{(m-1)}(x_0) = (-1)^m A_0$$

$$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), \ \varphi_1'(x_1) = \varphi_2'(x_1), \ldots, \varphi_1^{(m-2)}(x_1) = \varphi_2^{(m-2)}(x_1),$$

$$\varphi_1^{(m-1)}(x_1) - \varphi_2^{(m-1)}(x_1) = (-1)^{m-1} A_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(23) \quad \begin{aligned} &\varphi_{n-1}(x_{n-1}) = \varphi_n(x_{n-1}), \ \varphi_{n-1}'(x_{n-1}) = \varphi_n'(x_{n-1}), \ldots, \\ &\qquad \varphi_{n-1}^{(m-2)}(x_{n-1}) = \varphi_n^{(m-2)}(x_{n-1}), \\ &\qquad \varphi_{n-1}^{(m-1)}(x_{n-1}) - \varphi_n^{(m-1)}(x_{n-1}) = (-1)^{m-1} A_{n-1} \\ &\varphi_n(x_n) = 0, \ \varphi_n'(x_n) = 0, \ldots, \varphi_n^{(m-2)}(x_n) = 0, \ \varphi_n^{(m-1)}(x_n) = (-1)^{m-1} A_n. \end{aligned}$$

Il est facile de résoudre ce problème, On vérifie sans difficulté que les polynomes

$$(24) \quad \begin{aligned} &\varphi_1(s) = (-1)^m A_0 \frac{(s-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}, \\ &\varphi_2(s) = (-1)^m \left[A_0 \frac{(s-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + A_1 \frac{(s-x_1)^{m-1}}{(m-1)!} \right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(s) = (-1)^m \left[A_0 \frac{(s-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + A_1 \frac{(s-x_1)^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_{n-1} \frac{(s-x_{n-1})^{m-1}}{(m-1)!} \right] \end{aligned}$$

vérifient les conditions aux limites (23) aux points $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Il reste à montrer que les conditions aux limites au point x_n sont également vérifiées. En effet, ces conditions s'expriment par

$$(25) \quad \begin{array}{llll} A_0 & + A_1 & + \ldots + A_{n-1} + A_n & = 0, \\ A_0(x_n - x_0) & + A_1(x_n - x_1) & + \ldots + A_{n-1}(x_n - x_{n-1}) & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \multicolumn{4}{l}{A_0(x_n - x_0)^{m-1} + A_1(x_n - x_1)^{m-1} + \ldots + A_{n-1}(x_n - x_{n-1})^{m-1} = 0,} \end{array}$$

et il est facile voir que ces conditions peuvent être écrites sous la forme:

$$(26) \quad \begin{array}{llll} A_0 & + A_1 & + \ldots + A_n & = 0, \\ A_0 x_0 & + A_1 x_1 & + \ldots + A_n x_n & = 0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \multicolumn{4}{l}{A_0 x_0^{m-1} + A_1 x_1^{m-1} + \ldots + A_n x_n^{m-1} = 0} \end{array}$$

et ces conditions se confondent avec les équations (13), ce qui veut dire qu'elles sont satisfaites.

Ainsi le problème aux limites est parfaitement résolu. En remplaçant dans les formules (22) les polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ par les formules (24) et en ajoutant membre à membre toutes ces formules, on obtient, d'après les conditions aux limites (23), la représentation intégrale

$$L[f] = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n) = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s) f^{(m)}(s)\, ds, \tag{27}$$

où la fonction φ coïncide sur les intervales $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ avec es polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

2. En employant la notation des „fonctions spline"

$$(s-x_i)_+^{m-1} = \begin{cases} (s-x_i)^{m-1} & \text{si} \quad s \geqq x_i \\ 0 & \text{si} \quad s \leqq x_i. \end{cases} \tag{28}$$

On peut écrire les formules (24) sous la forme

$$\varphi(s) = (-1)^m \left[A_0 \frac{(s-x_0)_+^{m-1}}{(m-1)!} + A_1 \frac{(s-x_1)_+^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_{n-1} \frac{(s-x_{n-1})_+^{m-1}}{(m-1)!} \right] \tag{29}$$

ou encore, sous la forme

$$\varphi(s) = (-1)^m \left[A_0 \frac{(s-x_0)_+^{m-1}}{(m-1)!} + A_1 \frac{(s-x_1)_+^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + A_n \frac{(s-x_n)_+^{m-1}}{(m-1)!} \right] \tag{30}$$

puisque le derniere terme est nul sur l'intervalle $[x_0, x_n]$.

La fonction φ de la représentation intégrale (27), jouit aussi de la propriété exprimée par la formule

$$\int_{x_0}^{x_n} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{m!}. \tag{31}$$

En effet si nous remplaçons dans la formule (27), la fonction f par x^m et l'on tient compte de la formule (14), il en résultera la formule (31).

Nous avons étendu ainsi la propriété que la différence divisée $[x_0, x_1, \ldots, x_n; f]$ peut être représentée par une intégrale définie de la forme (1), à des fonctionnelle de la forme (11) où entre les coefficients et les noeuds il y a les m équations (13), le nombre $n+1$ des noeuds étant plus grand que m. (Le cas $m=n$ correspond au cas de la différence divisée.)

3. I. J. SCHOENBERG [7] a défini la fonction spline d'ordre $m-1$ relativement aux noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ où $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ sur toute la droite, par la formule

$$\psi(x) = P_{m-1}(s) + \sum_{i=0}^{n} \mu_i (s-x_i)_+^{m-1}, \tag{32}$$

où $P_{m-1}(s)$ est un polynôme de degré $m-1$ au plus et $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des coefficients constants.

Il résulte de cette définition que la fonction ψ est égale au polynôme $P_{m-1}(s)$ pour $s \leqq x_0$ et au polynôme

$$P_{m-1}(s) + \sum_{i=0}^{n} \mu_i (s-x_0)^{m-1} \tag{33}$$

pour $s \geqq x_n$.

Lorsque les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont donnés la fonction spline dépend de $m+n+1$ paramètres, les coefficients de $P_{m-1}(s)$ et les coefficients μ_i.

On peut identifier la fonction φ de la représentation intégrale (27) avec une fonction spline. Mais pour réaliser cette identité, il faut d'abord prolonger la fonction φ donnée par la formule (30) à gauche de x_0 par $\varphi_0(s) = 0$ et à droite de x_n, comme dans le cas des fonctions spline, par

$$\varphi_{n+1}(s) = (-1)^m \sum_{i=0}^{n} A_i \frac{(s-x_i)^{m-1}}{(m-1)!}. \tag{34}$$

Les équations (13) montrent que nous avons $\varphi_{n+1}(s) = 0$.

En faisant ce prolongement on peut dire que *la fonction φ de la représentation* (27) *est la fonction spline* (32) *d'ordre $m-1$, relativement aux noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ avec le polynôme $P_{m-1}(s)$ identiquement nul et dont les coefficients μ_i sont égaux à*

$$\mu_i = (-1)^m \frac{A_i}{(m-1)!}. \tag{35}$$

(Reçu le 2 avril 1969.)

CLUJ, STR. PAVLOV 18/A,
ROMANIA

Bibliographie

[1] M. FRÉCHET, Une définition fonctionnelle des polynômes, *Nouvelles Annales des Mathématiques*, **9** (1909), p. 145—162.

[2] D. V. IONESCU, *Cuadraturi numerice* (Bucuresti, Editura tehnică, 1957).

[3] D. V. IONESCU, Sur l'équation fonctionnelle de M. Fréchet. Colloque sur les équations fonctionnelles (Oberwolfach, 16—23 Juin 1968).

[4] D. V. IONESCU, La représentation des différences divisées par des intégrales définies et les „fonctions spline". Colloque sur les équations fonctionnelles (Bucarest—Mamaia, 11—17 sept. 1968).

[5] D. V. IONESCU, Une identité et la représentation intégrale d'une fonctionnelle linéare, *Bull. de l'Inst. Polyt. de Bucarest* (1969) (sous presse).

[6] T. POPOVICIU, Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynômes, *Mathematica*, **X** (1935), p. 194—208.

[7] I. J. SCHOENBERG, Spline functions, convex curves, and mechanical quadrature, *Bull. Am. Math. Soc.*, **64** (1958), p. 352—357.