

and also using the assumption

$$\|e\|_{L^\infty} = 1.$$

For the proof of (B.1) it is sufficient to consider the special case  $M = 1$ ,  $N = 2$  ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) also taking  $n = 1$ . If  $q \geq 2$  the proof becomes particularly simple. Namely it suffices to apply Hölder's inequality to the identity

$$\int |De|^q = -(q-2) \int |De|^{q-2} \operatorname{sgn}(De) D^2 e e$$

obtained readily by integration by parts.

*Remark* (added in proof). See also the recent work of Browder, Lions and Tartar.

#### REFERENCES

- [1] B. Enflo, *Uniform structures and square roots in topological groups*. *Israel J. Math.*
- [2] E. Gagliardo, *Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*. *Ricerche Mat.* **7**, 102–137 (1958).
- [3] E. Gagliardo, *Interpolations d'espaces de Banach et applications*, II, III, C.R. Acad. Sci. Paris **248**, 3388–3390, 3517–3518 (1959).
- [4] T. Holmstedt - J. Peetre, *On certain functionals arising in the theory of interpolation spaces*. *J. Functional Analysis* **4**, 88–94 (1969).
- [5] M. I. Kadec, *Topological equivalence of all separable Banach spaces*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **167**, 23–25 (1966) (Russian).
- [6] M. I. Kadec, *A proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces*. *J. Functional Anal.* **1**, 53–62 (1967) (Russian).
- [7] P. Krée, *Interpolation d'espaces qui ne sont ni normés, ni complets*. *Ann. Inst. Fourier* **17**, 137–174 (1968).
- [8] S. G. Krein - Jr. J. Petunin - E. M. Smenov, *Scales of Banach structures of measurable functions*. *Trudy Mosk. Mat. Obsc.* **17**, 293–322 (1967) (Russian).
- [9] G. G. Lorentz - T. Shimogaki, *Interpolation theorems for operators in function spaces*. *J. Functional Analysis* **2**, 31–51 (1968).
- [10] J. Marcinkiewicz, *Sur l'interpolation d'opérations*. *C.R. Acad. Sci. Paris* **208**, 1272–1273 (1939).
- [11] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **13**, 535–538 (1959).
- [12] W. Orlicz, *Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen*. *Studia Math.* **5**, 127–140 (1935).
- [13] W. Orlicz, *On a class of operators over the space of integrable functions*. *Studia Math.* **14**, 302–309 (1954).
- [14] J. Peetre, *A theory of interpolation of normed spaces*. *Notas de matematica*, **39**, 1968.
- [15] J. Peetre, *A new approach in interpolation spaces*. *Studia Math.* **34**, 23–42 (1970).
- [16] J. Peetre, *Zur Interpolation von Operatorräumen*. *Arch. Math.* (Basel).
- [17] E. I. Postyl'nik, *Interpolation theorems for  $L_p$  spaces with  $p < 1$* . *Sibirsk Mat. ž.* **4**, 318–324 (1963) (Russian).
- [18] M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*. *Acta Math.* **49**, 465–497 (1927).
- [19] T. Shimogaki, *An interpolation theorem on Banach function spaces*. *Studia Math.* **31**, 233–240 (1968).

Received 6. II. 1970.

## SUR UN CERTAIN TYPE DE TOPOLOGIE DÉFINIE SUR LA FAMILLE $\mathfrak{X}(X)$

par

PETRU PETRIȘOR

à Cluj

Dans cette note on étudie différentes propriétés de quelques opérateurs d'une certaine classe qui interviennent fréquemment dans beaucoup de problèmes de la topologie générale comme dans la théorie de l'interpolation.

À l'aide de ces opérateurs on obtient un théorème général de séparation (contenu dans le théorème 1) aussi bien qu'une caractérisation des ensembles séparés par rapport à la topologie induite par ces opérateurs (contenu dans le même théorème). En utilisant ces résultats on construit une topologie sur la famille  $\mathfrak{X}(X)$  en utilisant un opérateur de la classe mentionnée, l'opérateur  $\tau$ , qui sera défini par la suite.

Ce résultat présente de l'importance du fait qu'il permet de définir une topologie sur la famille  $\mathfrak{X}(X)$  en partant d'une topologie définie sur l'ensemble  $X$  et en même temps il met en évidence l'élément primitif (la notion fondamentale) de différents types de topologisation de la famille  $\mathfrak{X}(X)$ . Cet élément doit être cherché dans la classe d'opérateurs déjà mentionnée.

Un autre aspect de l'importance de cette classe d'opérateurs sera mis en évidence à l'occasion de la recherche de l'existence du prolongement d'une mesure [3].

Soit  $X$  un ensemble arbitraire et  $\mathfrak{X}(X)$  la famille des parties de l'ensemble  $X$ . On désigne par  $\Phi$  et  $\Psi$  des applications définies sur  $\mathfrak{X}(X)$  et à valeurs en  $\mathfrak{X}(X)$  telles que :

- (1) Pour toute famille  $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  de parties de l'ensemble  $X$  on a :

$$\Phi\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Phi(A_\gamma), \quad \Psi\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Psi(A_\gamma)$$

- (2) Pour tout sous-ensemble  $A \subset X$  on a :  $\Phi^2(A) = \Phi(A)$ ,  $\Psi^2(A) = \Psi(A)$ , c'est-à-dire les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  sont idempotentes.

(3) Pour tout sous-ensemble  $A$  de l'ensemble  $X$  on a :

$$\Phi[\Psi(A)] \subset \Phi(A), \Psi[\Phi(A)] \subset \Psi(A)$$

On désignera par  $\mathcal{J}_\Phi, \mathcal{J}_\Psi$  l'ensemble des valeurs des applications  $\Phi$  respectivement  $\Psi$  et par  $\mathcal{F}$  la famille des filtres définis sur  $X$  ayant la propriété que deux filtres quelconques de la famille  $\mathcal{F}$  non-disjoints sont comparables. Si  $A \subset X$  n'est pas vide alors la famille  $\{A\}$  est une base de filtre. Soit  $\mathcal{F}$  un filtre non-disjoint de cette base de filtre. Dans ce cas  $A \in \mathcal{F}$  et donc  $\mathcal{F}'$  (le filtre généré par la base de filtre  $\{A\}$ ) est moins fin que le filtre  $\mathcal{F}$ . Donc tout sous-ensemble non-vide de l'ensemble  $X$  appartient au moins à un élément de la famille  $\mathcal{F}$ .

**Définition 1.** Le sous-ensemble  $A$  de l'ensemble  $X$  est nommé  $\Phi$ -ensemble ( $\Psi$ -ensemble) si les ensembles  $A$  et  $\Phi(A)$  ( $A$  et  $\Psi(A)$ ) appartiennent à un filtre  $\mathcal{F}$  de la famille  $\mathcal{F}$ .

La classe des parties de  $X$  formée de  $\Phi$ -ensembles ( $\Psi$ -ensembles) est désignée par  $\mathfrak{M}^\Phi(X)$  ( $\mathfrak{M}^\Psi(X)$ ).

**Définition 2.** Sur la famille  $\mathfrak{M}^\Phi(X) \times \mathfrak{M}^\Psi(X)$  on définit la relation d'ordre  $<_{\Phi, \Psi}$  par :

$$(A_1, B_1) <_{\Phi, \Psi} (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subset A_2 \text{ et } B_1 \subset B_2$$

**Définition 3.** La famille  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{A}(X)$  est nommée famille d'interpolation par rapport à la surjection  $\Psi: \mathfrak{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}$  si pour tout  $A \in \mathcal{A}$  on a :  $\Psi(A) = A$ .

**THÉORÈME 1.** Si les applications  $\Phi: \mathfrak{A}(X) \rightarrow \mathfrak{A}(X)$ , et  $\Psi: \mathfrak{A}(X) \rightarrow \mathfrak{A}(X)$  vérifient les conditions (1), (2), (3) et famille  $\mathcal{J}_\Phi$  est une famille d'interpolation par rapport à l'application  $\Psi$ , alors il existe une topologie  $\gamma$  sur l'ensemble  $X$ , non-connexe et qui vérifie l'axiome  $T_5$  de séparation.

*Démonstration.* Soient  $A \in \mathfrak{M}^\Phi(X)$ ,  $B \in \mathfrak{M}^\Psi(X)$  tel que  $A \cap B = \emptyset$ . On considère la famille :

$$N = \{(\mathcal{C}_\gamma, \mathcal{D}_\gamma) : \mathcal{C}_\gamma \in \mathfrak{M}^\Phi(X), \mathcal{D}_\gamma \in \mathfrak{M}^\Psi(X), \gamma \in \Gamma, <_{\Phi, \Psi}\}$$

ayant les propriétés suivantes :

(1) Pour tout  $\gamma \in \Gamma$  on a  $\mathcal{C}_\gamma \cap \mathcal{D}_\gamma = \emptyset$

(2) Pour tout  $\gamma \in \Gamma$  on a  $\mathcal{C}_\gamma \supset A, \mathcal{D}_\gamma \supset B$ .

La famille  $N$  n'est pas vide puisque  $(A, B) \in N$ .

Soit  $Q = \{(\mathcal{C}'_\gamma, \mathcal{D}'_\gamma) : \gamma \in \Gamma'\}$  une sous-ensemble de la famille  $N$  totalement ordonné par la relation  $<_{\Phi, \Psi}$  et on considère la paire :  $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma, \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{D}'_\gamma)$ .

Cette paire a les propriétés suivantes :

(a) 
$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma \in \mathfrak{M}^\Phi(X), \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{D}'_\gamma \in \mathfrak{M}^\Psi(X).$$

On déduit cette propriété ainsi :  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma \supset \mathcal{C}'_\gamma$  et puisque  $\mathcal{C}'_\gamma \in \mathfrak{M}^\Phi(X)$  il en résulte qu'il existe le filtre  $\mathcal{F}_\gamma \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{C}'_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ . Donc :  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$ . De la propriété (1) de l'application  $\Phi$  on déduit :

$$\Phi\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \Phi(\mathcal{C}'_\gamma)$$

et donc  $\Phi\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma\right) \supset \Phi(\mathcal{C}'_\gamma)$ . Puisque  $\mathcal{C}'_\gamma \in \mathfrak{M}^\Phi(X)$  et  $\mathcal{C}'_\gamma \in \mathcal{F}_\gamma$  il en résulte que  $\Phi(\mathcal{C}'_\gamma) \in \mathcal{F}_\gamma$ , c'est-à-dire  $\Phi\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma\right) \in \mathcal{F}_\gamma$  ce qui montre que :

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma \in \mathfrak{M}^\Phi(X).$$

La relation  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{D}'_\gamma \in \mathfrak{M}^\Psi(X)$  est démontrée d'une manière analogue.

(b) 
$$\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma\right) \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{D}'_\gamma\right) = \emptyset.$$
 Cette propriété résulte de la condition  $\mathcal{C}'_\gamma \cap \mathcal{D}'_\gamma = \emptyset$  pour  $\gamma \in \Gamma'$ .

(c) 
$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma \supset A, \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{D}'_\gamma \supset B.$$
 Ces relations sont déduites des inclusions  $\mathcal{C}'_\gamma \supset A, \mathcal{D}'_\gamma \supset B$  vraies pour tout  $\gamma \in \Gamma$ .

Des propriétés (a), (b), (c) et de la définition de la relation  $<_{\Phi, \Psi}$  il résulte que la paire :

$$\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{C}'_\gamma, \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \mathcal{D}'_\gamma\right)$$

appartient à la famille  $N$  et on peut donc appliquer le lemme de Zorn : la famille  $(N, <_{\Phi, \Psi})$  contient un élément maximal  $(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$ .

En supposant remplie la condition :

$$\exists \Omega_0 \subset X \text{ tel que } \mathcal{D}' \cap \Phi(\mathcal{C}' \cup \Omega_0) \neq \emptyset$$

on désigne par  $Y$  l'ensemble  $\mathcal{D}' \cap \Phi(\mathcal{C}' \cup \Omega_0)$ . Puisque l'ensemble  $Y$  n'est pas vide, il résulte qu'il appartient à un filtre maximal  $\Gamma'' \in \mathcal{F}$ . Des inclusions  $Y \subset \mathcal{D}'$  et  $Y \subset \Phi(\mathcal{C}' \cup \Omega_0)$  il résulte :

$$\mathcal{D}' \in \Gamma'' \text{ et } \Phi(\mathcal{C}' \cup \Omega_0) \in \Gamma''.$$

De  $\mathcal{C}' \in \mathfrak{M}^\Phi(X)$  on déduit l'existence d'un élément  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$  tel que :  $\mathcal{C}' \in \mathcal{F}$  et  $\Phi(\mathcal{C}') \in \mathcal{F}$ . De l'inclusion  $\Phi(\mathcal{C}' \cup \Omega_0) \supset \Phi(\mathcal{C}')$  on déduit  $\Phi(\mathcal{C}' \cup \Omega_0) \in \mathcal{F}$  ce qui montre que  $\Phi(\mathcal{C}' \cup \Omega_0) \in \Gamma'' \cap \mathfrak{F}$  et donc  $\Gamma''$  et  $\mathcal{F}$  sont deux éléments de la famille  $\mathfrak{F}$  non-disjointe. De la définition de la famille  $\mathfrak{F}$  il résulte que ces deux filtres sont comparables. On a à analyser les cas :

(a<sub>1</sub>)  $\mathcal{F} < \Gamma''$ . Dans ce cas, puisque  $\mathcal{C}' \in \mathcal{F}$  il en résulte que  $\mathcal{C}' \in \Gamma''$ . De la définition du filtre  $\Gamma''$  il résulte que  $\mathcal{D}' \in \Gamma''$  et donc  $\mathcal{C}' \cap \mathcal{D}' \in \Gamma''$  ce qui est une contradiction, puisque  $\mathcal{C}' \cap \mathcal{D}' = \emptyset$  et que  $\Gamma''$  est un filtre.

(b<sub>1</sub>)  $\Gamma'' < \mathcal{F}$ . Dans ce cas, puisque  $\mathcal{D}' \in \Gamma''$  il résulte que  $\mathcal{D}' \in \mathcal{F}$ . Mais  $\mathcal{C}' \in \mathcal{F}$  et de là  $\mathcal{C}' \cap \mathcal{D}' \in \mathcal{F}$ , ce qui est une contradiction puisque  $\mathcal{C}' \cap \mathcal{D}' = \emptyset$  et que  $\mathcal{F}$  est un filtre.

La contradiction obtenue montre que la condition :

$$(I) \quad \forall \mathcal{D}' \cap \Phi(\mathcal{C}' \cup \Omega) = \emptyset$$

est remplie.

En supposant que l'ensemble  $\Omega = X \sim (\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}')$  n'est pas vide, soit  $Y$  l'ensemble  $\Phi(\Omega) \cup \mathcal{C}'$ . Puisque  $\mathcal{C}' \in \mathfrak{M}^\Phi(X)$  il résulte qu'il existe un filtre  $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$  qui contient les ensembles  $\mathcal{C}'$  et  $\Phi(\mathcal{C}')$ . De  $Y \supset \mathcal{C}'$  et  $\Phi(Y) = \Phi(\Omega) \cup \Phi(\mathcal{C}') \supset \Phi(\mathcal{C}')$  il résulte que le filtre  $\mathcal{F}$  contient les ensembles  $Y$  et  $\Phi(Y)$ , c'est-à-dire  $Y \in \mathfrak{M}^\Phi(X)$ .

Puisque  $\mathcal{C}'$  contient l'ensemble  $A$  on déduit que  $Y$  contient également cet ensemble.

On considère la paire  $(Y, \mathcal{D}')$ . De :  $Y \cap \mathcal{D}' = [\Phi(\Omega) \cup \mathcal{C}] \cap \mathcal{D}' = [\mathcal{D}' \cap \Phi(\Omega)] \cup (\mathcal{C}' \cap \mathcal{D}') = \emptyset$  (ici on a employé la condition (I)) il résulte que  $(Y, \mathcal{D}') \in N$ . De  $\mathcal{C}' \subset Y$  on déduit  $(\mathcal{C}', \mathcal{D}') <_{\Phi, \Psi}(Y, \mathcal{D}')$ , ce qui contredit le fait que  $(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$  est l'élément maximal de la famille  $N$ . Donc  $\Omega = \emptyset$  et  $X = \mathcal{C}' \cup \mathcal{D}'$ .

On définit l'application :  $\gamma_{\Phi, \Psi} : \mathfrak{E}(X) \rightarrow \mathfrak{E}(X)$  par  $\gamma_{\Phi, \Psi}(A) = A \cup \Phi(A) \cup \Psi(A)$ . Cette application a les propriétés suivantes :

(a<sub>2</sub>) Pour tout sous-ensemble  $A$  de l'ensemble  $X$  on a :  $A \subset \gamma_{\Phi, \Psi}(A)$

(b<sub>2</sub>) Pour deux sous-ensembles quelconques  $A$  et  $B$  de l'ensemble  $X$  on a :

$$\gamma_{\Phi, \Psi}(A \cup B) = \gamma_{\Phi, \Psi}(A) \cup \gamma_{\Phi, \Psi}(B).$$

On démontre cette égalité en utilisant la définition de l'application  $\gamma_{\Phi, \Psi}$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{\Phi, \Psi}(A \cup B) &= A \cup B \cup \Phi(A \cup B) \cup \Psi(A \cup B) = \\ &= A \cup B \cup \Phi(A) \cup \Phi(B) \cup \Psi(A) \cup \Psi(B) = \\ &= [A \cup \Phi(A) \cup \Psi(A)] \cup [B \cup \Phi(B) \cup \Psi(B)] = \\ &= \gamma_{\Phi, \Psi}(A) \cup \gamma_{\Phi, \Psi}(B). \end{aligned}$$

(c<sub>2</sub>) Pour tout sous-ensemble  $A$  de la  $X$  on a :

$$\gamma_{\Phi, \Psi}^2(A) = \gamma_{\Phi, \Psi}(A).$$

On démontre cette égalité en utilisant la définition de l'application  $\gamma_{\Phi, \Psi}$  et les axiomes (2), (3) par lesquels on définit les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{\Phi, \Psi}^2(A) &= \gamma_{\Phi, \Psi}[\gamma_{\Phi, \Psi}(A)] = \gamma_{\Phi, \Psi}(A) \cup \Phi[\gamma_{\Phi, \Psi}(A)] \cup \Psi[\gamma_{\Phi, \Psi}(A)] = \\ &= A \cup \Phi(A) \cup \Psi(A) \cup \Phi(A) \cup \Phi^2(A) \cup \Phi[\Psi(A)] \cup \\ &\quad \cup \Psi(A) \cup \Psi[\Phi(A)] \cup \Psi^2(A) = \\ &= A \cup \Phi(A) \cup \Psi(A) \cup \Phi[\Psi(A)] \cup \Psi[\Phi(A)] = \\ &= A \cup \Phi(A) \cup \Psi(A) = \gamma_{\Phi, \Psi}(A). \end{aligned}$$

Des propriétés (a<sub>2</sub>), (b<sub>2</sub>), (c<sub>2</sub>) de l'application  $\gamma_{\Phi, \Psi}$  il résulte que cette application est un opérateur de fermeture qui engendre une topologie unique  $\gamma$  définie sur  $X$ . À l'aide la définition de cet opérateur on peut écrire :

$$\bar{\mathcal{C}}^{\gamma} = \mathcal{C}' \cup \Phi(\mathcal{C}') \cup \Psi(\mathcal{C}')$$

où  $\bar{\mathcal{C}}^{\gamma}$  est la fermeture de l'ensemble  $\mathcal{C}'$  par rapport à la topologie  $\gamma$ . À l'aide de ces égalités on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}' \cap \bar{\mathcal{C}}^{\gamma} &= \mathcal{D}' \cap [\mathcal{C}' \cup \Phi(\mathcal{C}') \cup \Psi(\mathcal{C}')] = \\ &= (\mathcal{D}' \cap \mathcal{C}') \cup [\mathcal{D}' \cap \Phi(\mathcal{C}')] \cup [\mathcal{D}' \cap \Psi(\mathcal{C}')] = \emptyset \end{aligned}$$

une égalité qui résulte de la condition (I) en prenant  $\Omega \subset \mathcal{C}'$ . D'une manière analogue on trouve l'égalité  $\mathcal{C}' \cap \bar{\mathcal{D}}^{\gamma} = \emptyset$ . De ces deux égalités il résulte que les ensembles  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{D}'$  sont  $\gamma$ -séparés. Les ensembles  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{D}'$  étant  $\gamma$ -séparés et  $\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}'$  étant  $\gamma$ -ouverte (puisque  $X = \mathcal{C}' \cup \mathcal{D}'$ ) il en résulte que l'espace topologique  $(X, \gamma)$  n'est pas connexe.

Soient  $A \subset X$ ,  $B \subset X$  deux ensembles  $\gamma$ -séparés. Donc :

$$(II) \quad B \cap [A \cup \Phi(A) \cup \Psi(A)] = \emptyset, \quad A \cap [B \cup \Phi(B) \cup \Psi(B)] = \emptyset.$$

De ces égalités on déduit :

$$(\alpha) B \cap \Phi(A) = \emptyset, (\beta) B \cap \Psi(A) = \emptyset, (\gamma) A \cap \Phi(B) = \emptyset, (\delta) A \cap \Psi(B) = \emptyset.$$

On suppose que  $A \notin \mathfrak{N}^\Phi(X)$ ,  $B \notin \mathfrak{N}^\Psi(X)$ . D'après un résultat antérieur on sait que si  $A \in \mathfrak{N}^\Phi(X)$ ,  $B \in \mathfrak{N}^\Psi(X)$  on a :

$$\bigvee_{\Omega \subset X} B \cap \Phi(A \cup \Omega) = A \cap \Psi(B \cup \Omega) = \emptyset.$$

De ce critérium et de l'hypothèse admise on déduit la condition :

$$\exists_{\Omega_0 \subset X, \Omega_1 \subset X} B \cap \Phi(A \cup \Omega_0) \neq \emptyset \text{ et } A \cap \Psi(B \cup \Omega_1) \neq \emptyset.$$

Mais  $B \cup \Phi(\Omega_0) \neq \emptyset$  puisque de  $(\alpha)$  il résulte  $B \cap \Phi(A) = \emptyset$ . On a aussi  $A \cap \Psi(\Omega_1) \neq \emptyset$  puisque de  $(\beta)$  il résulte  $A \cap \Psi(B) = \emptyset$ . Soit  $Z = A \cap \Psi(\Omega_1)$ .

L'ensemble  $Y = B \cap \Phi(\Omega_0)$  étant non-vidé, il existe le filtre  $\mathcal{F}_Y \in \mathfrak{F}$  qui contient l'ensemble  $Y$ . De l'expression de cet ensemble il résulte que  $B$  et  $\Phi(\Omega_0)$  appartiennent au filtre  $\mathcal{F}_Y \in \mathfrak{F}$ ; l'ensemble  $Z$  étant non-vidé, il existe  $\mathcal{F}_Z \in \mathfrak{F}$  qui contient l'ensemble  $Z$  et de l'expression de l'ensemble  $Z$  on déduit que  $\mathcal{F}_Z$  contient les ensembles  $A$  et  $\Phi(\Omega_1)$ .

Cette relation ayant lieu pour tout  $\Omega'_1 \supset \Omega_1$ , on peut remplacer l'ensemble  $\Omega_1$  par l'ensemble  $\Omega'_1 = \Phi[\Phi(\Omega_0)] \cup \mathcal{E}$  où  $\mathcal{E} \supset \Omega_1$ . Donc  $\Psi(\Omega'_1) \in \mathcal{F}_Z$  mais  $\Phi(\Omega_0)$  est un point fixe pour l'application  $\Psi$ , il en résulte que  $\Psi(\Omega'_1) = \Phi(\Omega_0) \in \mathcal{F}_Y$ .

Donc  $\Psi(\Omega'_1) \in \mathcal{F}_Y \cap \mathcal{F}_Z$  c'est-à-dire  $\mathcal{F}_Y \cap \mathcal{F}_Z \neq \emptyset$  et de la définition de la famille  $\mathfrak{F}$  on déduit que  $\mathcal{F}_Y$  et  $\mathcal{F}_Z$  sont comparables. On a à analyser les cas :

(a<sub>3</sub>)  $\mathcal{F}_Y < \mathcal{F}_Z$ . De  $B \in \mathcal{F}_Y$  il résulte  $B \in \mathcal{F}_Z$ . Mais  $A \in \mathcal{F}_Z$  et donc  $A \cap B \in \mathcal{F}_Z$ , ce qui ne peut avoir lieu puisque  $A \cap B = \emptyset$ .

(b<sub>3</sub>)  $\mathcal{F}_Z < \mathcal{F}_Y$ . De  $A \in \mathcal{F}_Z$  il résulte  $A \in \mathcal{F}_Y$ . Mais  $B \in \mathcal{F}_Y$  et donc  $A \cap B \in \mathcal{F}_Y$  ce qui ne peut avoir lieu puisque  $A \cap B = \emptyset$ .

De (a<sub>3</sub>) et (b<sub>3</sub>) il résulte que :

$$A \in \mathfrak{N}^\Phi(X), B \in \mathfrak{N}^\Psi(X)$$

et de la (II) il résulte que  $A \cap B = \emptyset$ . De  $A \in \mathfrak{N}^\Phi(X)$ ,  $B \in \mathfrak{N}^\Psi(X)$  et des résultats antérieurs on déduit l'existence des ensembles  $\mathcal{C}' \in \mathfrak{N}^\Phi(X)$ ,  $\mathcal{D}' \in \mathfrak{N}^\Psi(X)$  qui sont  $\gamma$ -séparés,  $X = \mathcal{C}' \cup \mathcal{D}'$ ,  $\mathcal{C}' \cap \mathcal{D}' = \emptyset$ .

L'ensemble  $\mathcal{C}' \cup \mathcal{D}'$  étant  $\gamma$ -ouvert, il résulte que  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{D}'$  sont  $\gamma$ -ouvertes, donc  $(X, \gamma)$  vérifient l'axiome  $T_5$  de séparation et le théorème est démontré.

THÉORÈME 2. Pour toute famille  $\mathcal{A}$  de parties de l'ensembles  $X$  on a :

$$\tau_c^2(\mathcal{A}) = \tau_c(\mathcal{A}) \quad [3].$$

Démonstration. Soit  $Y \in \tau_c[\tau_c(\mathcal{A})]$ . Il existe l'ensemble  $B \in \tau_c(\mathcal{A})$  tel que  $Y \cap B \in \tau_c(\mathcal{A})$ . De  $B \in \tau_c(\mathcal{A})$  il résulte l'existence de l'ensemble

$A \in \mathcal{A}$  tel que  $B \cap A \in \mathcal{A}$ . De ces relations il résulte que:  $B \cap Y \cap A \in \tau_c(\mathcal{A})$  parce que  $\mathcal{A} \subset \tau_c(\mathcal{A})$ . De la définition de l'application  $\tau_c$  on déduit l'existence de l'ensemble  $\Omega \in \mathcal{A}$  tel que  $Y \cap (A \cap B \cap \Omega) \in \mathcal{A}$  et puisque les ensembles  $A, B, \Omega$  appartiennent à la famille  $\mathcal{A}$ , il en résulte  $Y \in \tau_c(\mathcal{A})$  c'est-à-dire :

$$\tau_c^2(\mathcal{A}) \subset \tau_c(\mathcal{A}).$$

Soit  $Y \in \tau_c(\mathcal{A})$ . Il existe l'ensemble  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $Y \cap A \in \mathcal{A}$ . Donc  $(Y \cap A) \cap A \in \mathcal{A}$  c'est-à-dire  $Y \cap A \in \tau_c(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ . On en déduit  $Y \in \tau_c^2(\mathcal{A})$ . Donc  $\tau_c(\mathcal{A}) \subset \tau_c^2(\mathcal{A})$ .

THÉORÈME 3. Pour toute classe  $\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  fermée par rapport à la réunion de famille de parties de l'ensemble  $X$  on a :

$$\tau_c(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \tau_c(\mathcal{A}_\gamma).$$

Démonstration. Soit  $Y \in \tau_c(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma)$ . Il existe l'ensemble  $A \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$  tel que  $Y \cap A \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$ . Donc il existe un  $\gamma_0 \in \Gamma$  et l'ensemble  $A \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$  tels que  $Y \cap A \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$ , où  $\gamma_1 \in \Gamma$ . Soit  $\mathcal{A}_{\gamma'} = \mathcal{A}_{\gamma_0} \cup \mathcal{A}_{\gamma_1}$ . On a  $A \in \mathcal{A}_{\gamma'}$  et  $Y \cap A \in \mathcal{A}_{\gamma'}$ , c'est-à-dire :

$$Y \in \tau_c(\mathcal{A}_{\gamma'}) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \tau_c(\mathcal{A}_\gamma)$$

et on a l'inclusion :

$$\tau_c(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \tau_c(\mathcal{A}_\gamma).$$

Soit  $Y \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \tau_c(\mathcal{A}_\gamma)$ , donc  $Y \in \tau_c(\mathcal{A}_{\gamma_0})$  où  $\gamma_0 \in \Gamma$ . Il existe un  $A \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$  tel que  $Y \cap A \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$ . Donc il existe un  $A \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$  tel que :

$$Y \cap A \in \tau_c(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma)$$

et de là on obtient l'inclusion :

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \tau_c(\mathcal{A}_\gamma) \subseteq \tau_c(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma)$$

et le théorème est démontré.

THÉORÈME 4. Si la famille  $\mathcal{J}_{\tau_c}$  est une famille d'interpolation par rapport à l'application  $\tau_c$ , alors il existe sur la famille  $\mathfrak{A}(X)$  une topologie  $u$ , non-connexe telle que l'espace topologique  $(\mathfrak{A}(X), u)$  vérifie l'axiome  $T_5$  de séparation.