

ASUPRA ALURII ȘIRULUI NUMERELOR NATURALE $\leq n$ ȘI PRIME CU NUMĂRUL NATURAL n .

de Tiberiu Popoviciu (Cluj)

1. La 31 decembrie 1971 se implinise 50 de ani de la înființarea societății matematice (mai târziu transformată în societatea științifică) a elevilor liceului „Moise Nicoară” din Arad [1]. Această societate a dăinuit mulți ani și a contribuit substanțial la pregătirea elevilor dornici ca mai târziu să se dedice unei cariere în care cunoștințele matematice joacă un rol însemnat.

În primii ani de existență societatea s-a menținut grație entuziasmului citorva elevi, printre care trebuie pomenit Valeriu NOVACU, azi un distins profesor de fizică teoretică la Universitatea din București și membru corespondent al Academiei R.S.R. Mai târziu societatea a fost mult sprijinită de inimosul fost director al liceului „Moise Nicoară” din Arad, Ascaniu CRIȘAN.

Frământărilor de atunci se datorește și revista „Jurnal Matematic” (litografiată). Din această revistă au apărut în total 12 numere la Arad în anul 1924 continuate apoi cu încă 5 numere scoase la București în anul 1925. Revista „Jurnal Matematic” a fost de repetate ori favorabil semnalată și în coloanele vechii Gazete Matematice și citată chiar în cunoscute reviste de specialitate străine („Mathesis”).

2. În „Jurnal Matematic”, vol. I, p. 35 (din 1 februarie 1924) am propus următoarea problemă:

11. Să se găsească toate numerele pentru care numerele inferioare și prime cu el sînt în progresie aritmetică sau geometrică.

Se subînțelege că în acest enunț este vorba numai de numere naturale.

Studiul numerelor naturale $\leq n$ și prime cu numărul natural n prezintă interes în diferite probleme de algebră, geometrie, etc. Numărul lor se notează cu $\varphi(n)$ (funcția lui Euler) și se mai numește *indicatorul* lui n . Funcția $\varphi(n)$ are numeroase proprietăți interesante și importante. Aceste proprietăți pot fi găsite în mai toate tratatele de aritmetică sau de teoria numerelor. Mă voi mărgini aici la a cita numai excelenta carte a lui W. SIERPINSKI [3].

3. Să considerăm șirul crescător

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_\varphi, (\varphi = \varphi(n)).$$

al numerelor naturale $\leq n$ și prime cu n . Dacă notăm cu (a, b) c.m.c.d. al numerelor a, b , șirul (1) este caracterizat de următoarele proprietăți:

a) $(a_v, n) = 1, v = 1, 2, \dots, \varphi$

b) $a_v < a_{v+1}, v = 1, 2, \dots, \varphi - 1$, dacă $\varphi(n) > 1$.

Avem $\varphi(n) = 1$ dacă și numai dacă $n = 1$ sau $n = 2$. Avem $\varphi(n) = 2$ pentru $n = 3, 4$ și 6 și pentru orice alt n , $\varphi(n)$ este un număr par > 2 .

Pentru uniformitatea exprimării convenim ca un șir de numere cu un singur termen să fie considerat crescător.

* Prezentată la sesiunea de comunicări științifice a liceului „I. Slavici” din Arad în ziua de 16 mai 1971.

În cele ce urmează, printre altele, vom da soluția nepublicată, cel puțin în revista în care am propus-o, a problemei de mai sus din „Jurnal Matematic”.

Deoarece o progresie aritmetică cu rația nenulă și o progresie geometrică de numere pozitive cu rația diferită de 1 sînt șiruri crescătoare sau descrescătoare, problema II revine la a găsi toate numerele naturale n pentru care șirul (1) definit mai sus, este o progresie aritmetică sau geometrică.

Un șir de numere cu 2 termeni este totdeauna o progresie aritmetică, iar dacă primul termen este diferit de 0 este și o progresie geometrică*).

Și aici, pentru uniformitatea exprimării, convenim ca orice șir de numere cu un singur termen să fie considerat ca o progresie aritmetică și o progresie geometrică (în acest caz fără rație).

4. Să vedem care sînt numerele pentru care șirul (1) de mai sus este o progresie aritmetică.

Trebuie să distingem următoarele cazuri:

Cazul 1. n este impar. Lăsînd la o parte cazul banal $n = 1$, observăm că $a_2 = 2$ și rezultă că rația progresiei trebuie să fie egală cu 1. Rezultă că primele $n - 1$ numere naturale $1, 2, \dots, n - 1$ trebuie să fie prime cu n , ceea ce are loc dacă și numai dacă n este un număr prim.

Cazul 2. n este un număr par. Atunci $n = 2^z a$, unde z este un număr natural iar a un număr natural impar. Aici distingem două subcazuri:

Subcazul 2.1. $a = 1$ Atunci șirul (1) se reduce la șirul $1, 3, \dots, 2^z - 1$ al primilor 2^{z-1} numere impare. Acest șir este o progresie aritmetică cu rația 2 (dacă $z > 1$).

Subcazul 2.2. $a > 1$. În acest caz numerele $a - 2, a + 2$ sînt numere naturale $< n$ și sînt prime cu n . Însă $a - 1, a, a + 1$ nu sînt prime cu n , deci $a - 2, a + 2$ sînt doi termeni consecutivi ai șirului (1). Dacă deci (1) este o progresie aritmetică rația sa este egală cu 4. Aceasta înseamnă că avem $a_1 = 1, a_2 = 5$, dacă șirul are doi termeni, ceea ce are loc dacă și numai dacă $n = 6$. Dacă șirul (1) ar avea mai mult de doi termeni, ar trebui să avem $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 9, \dots$. Acest lucru este însă imposibil căci $(9, n) = 1 \Rightarrow (3, n) = 1$ iar 3 nu ar figura în șirul (1).

Se mai poate obține acest rezultat observînd că dacă $n > 6$, numerele $a + 2, a + 4$ sînt doi termeni consecutivi ai șirului (1). Putem lăsa pe seama cititorului demonstrarea acestei proprietăți. Rația progresiei ar trebui să fie 2 și numărul (impar) a ar trebui deci să aparțină șirului (1), ceea ce este imposibil.

Putem dar enunța

TEOREMA 1. Șirul (1) este o progresie aritmetică în următoarele cazuri:

- a) n este un număr prim impar.
- b). n este o putere întreagă nenegativă a lui 2.
- c). $n = 6$.

și numai în aceste cazuri.

5. Un șir (finit) de numere $(u_n)_{n=1}^m$ se zice *simetric* dacă suma termenilor egal depărtați de termenii extremi este egală cu un același număr. Cu alte

*) Adoptăm bineînțeles definiția obișnuită a unei progresii aritmetice respectiv geometrice ca fiind un șir (finit sau infinit) de numere în care fiecare termen (începînd cu al doilea) este egal cu precedentul adunat respectiv înmulțit cu un același număr numit rația progresiei

Unul cel puțin din șirurile cu doi termeni u_1, u_2 și u_2, u_1 este totdeauna o progresie geometrică.

cuvinte dacă și numai dacă numerele $u_v + u_{m+1-v}$, $v = 1, 2, \dots, m$ sînt egale. Pentru uniformitatea exprimării vom conveni ca orice șir avînd numai 1 sau 2 termeni să fie considerat simetric. Cu aceasta, denumirea de șir simetric este justificată de proprietatea că punctele (v, u_v) , $v = 1, 2, \dots, m$ raportate la un sistem de două axe de coordonate Oxy din plan formează o mulțime finită care are ca centru de simetrie punctul $\left(\frac{m+1}{2}, s\right)$, unde $2s$ este tocmai valoarea comună a sumelor $u_v + u_{m+1-v}$, $v = 1, 2, \dots, m$.

În particular o progresie aritmetică este un șir simetric. Este ușor de dat exemple de șiruri care nu sînt simetrice.

Șirurile simetrice $(u_v)_{v=1}^m$ au în comun cu progresele aritmetice proprietatea cunoscută că suma $\sum_{v=1}^m u_v = m \frac{u_1 + u_m}{2}$ a termenilor lor este egală cu numărul termenilor înmulțit cu semisuma termenilor extremi.

Un caz important de șir simetric este șirul (1) definit mai sus al numerelor $\leq n$ și prime cu n . Acest lucru rezultă din proprietatea (dacă $n > 1$) că dacă r este un număr natural $< n$, avem $(r, n) = 1 \Leftrightarrow (n - r, n) = 1$. Deducem de aici că $a_{n+1-v} = n - a_v$, $v = 1, 2, \dots, \varphi$ (dacă $n > 1$).

Avem acum

TEOREMA 2. *Dacă o progresie geometrică cu cel puțin 3 termeni și cu termenii pozitivi este un șir simetric, toți termenii acestei progresii sînt (numeric) egali (are deci rația egală cu 1).*

Într-adevăr, în acest caz, $u_1 = a$, $u_2 = aq$, $u_{m-1} = aq^{m-2}$, $a = aq^{m-1}$, unde $a > 0$, $q > 0$, $m \geq 3$. Din condiția de simetrie rezultă $a + aq^{m-1} = aq + aq^{m-2}$, sau $a(q - 1)(q^{m-2} - 1) = 0$, de unde $q = 1$ și rezultă proprietatea din enunțul teoremei.

Lăsăm pe seama cititorului, ca un bun exercițiu, să determine toate progresele geometrice simetrice (fără ipoteza ca termenii să fie pozitivi).

Ca o consecință avem

CONSECINȚA 1. *În afară de cazurile banale $n = 1, 2, 3, 4$ și 6, șirul (1) nu poate să fie o progresie geometrică.*

Într-adevăr, în cazul contrar, pe baza teoremei 2, șirul (1) ar trebui să aibă toți termenii egali, ceea ce contrazice ipoteza că el este crescător și deci, ipso facto, are termenii numeric diferiți.

6. Să considerăm un șir finit de numere $(u_v)_{v=1}^m$, cu cel puțin 3 termeni ($m \geq 3$). Numerele $\Delta u_v = u_{v+1} - u_v$, $v = 1, 2, \dots, m - 1$ se numesc diferențele succesive de ordinul 1 iar $\Delta^2 u_v = \Delta u_{v+1} - \Delta u_v = u_{v+2} - 2u_{v+1} + u_v$, $v = 1, 2, \dots, m - 2$ diferențele succesive de ordinul 2 ale termenilor șirului $(u_v)_{v=1}^m$. Șirul $(\Delta u_v)_{v=1}^{m-1}$ se numește șirul diferențelor de ordinul 1 iar $(\Delta^2 u_v)_{v=1}^{m-2}$ șirul diferențelor de ordinul 2 al șirului $(u_v)_{v=1}^m$.

Se zice că șirul $(u_v)_{v=1}^m$ este *neconcav* dacă șirul diferențelor de ordinul 2, $(\Delta^2 u_v)_{v=1}^{m-2}$ este nenegativ, deci dacă $\Delta^2 u_v \geq 0$, $v = 1, 2, \dots, m - 2$ și că este *neconvex* dacă șirul $(\Delta^2 u_v)_{v=1}^{m-2}$ este nepozitiv, deci dacă $\Delta^2 u_v \leq 0$, $v = 1, 2, \dots, m - 2$.

În particular, dacă toate diferențele de ordinul 2, $\Delta^2 u_\nu$, sînt pozitive șirul (u_ν) se zice *convex* iar dacă toate aceste diferențe sînt negative șirul se zice *concav*. Proprietatea $\Delta^2 u_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, m-2$ caracterizează progresele aritmetice (cu m termeni). O progresie aritmetică este în același timp un șir neconcav și neconvex și acestea sînt singurele șiruri care se bucură de această proprietate.

Un șir cu 3 termeni este totdeauna sau convex, sau concav sau este o progresie aritmetică.

Avem și

TEOREMA 3. *Un șir simetric $(u_\nu)_{\nu=1}^m$, cu cel puțin 3 termeni ($m \geq 3$) nu poate să fie neconcav sau neconvex decât dacă se reduce la o progresie aritmetică.*

Pe baza simetriei șirului (u_ν) , avem

$$\Delta^2 u_{m-1-\nu} + \Delta^2 u_\nu = \Delta^2(u_{m+1-\nu} + u_\nu) = 0, \nu = 1, 2, \dots, m-2,$$

de unde rezultă că dacă diferențele $\Delta^2 u_\nu$, sînt toate de același semn (toate ≥ 0 sau toate ≤ 0), ele trebuie să fie egale.

Cu aceasta teorema 3 este demonstrată.

Putem aplica acest rezultat la șirul (1). Ținînd seamă de teorema 1, deducem

CONSECINȚA 2. *În afară de cazurile banale $n = 1, 2, 3, 4$, și 6, șirul (1) este neconcav sau neconvex în cazurile și numai în cazurile cînd acest șir se reduce la o progresie aritmetică, cazuri care sînt specificate în enunțul teoremei 1.*

7. Putem interpreta rezultatele precedente și altfel.

O proprietate caracteristică a progreseilor aritmetice (de ordinul 1) (u_ν) este că diferențele Δu_ν sînt toate egale cu un același număr (rația progresiei). Un șir (u_ν) pentru care diferențele de ordinul al doilea $\Delta^2 u_\nu$, sînt toate egale cu un același număr se numește o *progresie aritmetică de ordinul 2*. O progresie aritmetică de ordinul 2 este sau un șir convex sau un șir concav sau se reduce la o progresie aritmetică obișnuită (de ordinul 1).

Pentru uniformitatea exprimării putem conveni ca orice șir cu cel mult 3 termeni să fie considerat ca o progresie aritmetică de ordinul 2.

Din teorema 3 se deduce

CONSECINȚA 3. *Un șir simetric este o progresie aritmetică de ordinul 2 dacă și numai dacă el se reduce la o progresie aritmetică obișnuită (de ordinul 1).*

8. Proprietatea din enunțul consecinței 3 se poate demonstra și altfel. Această demonstrație se bazează pe

LEMA 1. a). *Pentru ca un șir (u_ν) să fie o progresie aritmetică (de ordinul 1) este necesar și suficient ca el să fie de forma $(P(\nu))$ unde $P(x) = \alpha x + \gamma$ este un polinom de gradul 1.*

b). *Pentru ca un șir (u_ν) să fie o progresie aritmetică de ordinul 2 este necesar și suficient ca el să fie de forma $(P(\nu))$ unde $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ este un polinom de gradul 2.*

Cu alte cuvinte să avem $u_\nu = P(\nu)$, pentru toate valorile lui ν , $P(x)$ fiind un polinom de gradul 1 respectiv de gradul 2.

Lăsăm pe seama cititorului demonstrațiile acestor proprietăți, de altfel bine cunoscute. Reamintim numai că necesitatea condițiilor respectiv rezultă din formulele

$$u_v = \sum_{i=1}^{v-1} \Delta u_i + u_1, (v > 1); u_v = \sum_{i=1}^{v-2} (v-1-i) \Delta^2 u_i + (v-1) \Delta u + u, (v > 2)$$

respective.

O progresie aritmetică obișnuită este un caz particular de progresie aritmetică de ordinul 2. Este suficient ca cel mai înalt coeficient α al polinomului $P(x)$ din lema 1 să fie egal cu 0.

Pentru ca o progresie aritmetică de ordinul 2, $(P(v))_{v=1}^m$ ($m \geq 3$), unde $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, să fie un șir simetric este necesar ca $P(1) + P(m) = P(2) + P(m-1)$, de unde $\alpha[m^2 + 1 - (m-1)^2 - 4] = 2\alpha(m-2) = 0$, deci $\alpha = 0$. Proprietatea din enunțul consecinței 3 rezultă de aici.

Deducem de aici și

CONSECINȚA 4. *Șirul (1) este o progresie aritmetică de ordinul 2 dacă și numai dacă el este o progresie aritmetică obișnuită (de ordinul 1), cazuri care sînt specificate în teorema 1.*

9. Noțiunea de progresie aritmetică se poate generaliza și prin aceea de progresie aritmetică cu mai multe rații, despre care s-a vorbit de asemenea în „Jurnal Matematic” [2]*).

*) Progresiile aritmetice cu mai multe (un număr finit) de rații sînt caracterizate prin aceea că șirul diferențelor de ordinul 1 al lor este un șir periodic.

O progresie aritmetică cu 2 rații este un șir de numere (u_v) în care fiecare termen se obține din precedentul adunîndu-i alternativ una din cele două rații date. Cu alte cuvinte dacă $u_{2v} = u_{2v-1} + r_1$, $u_{2v+1} = u_{2v} + r_2$, $v = 1, 2, \dots$, unde r, r_2 sînt cele două rații ale progresiei.

În particular orice progresie aritmetică obișnuită este o progresie aritmetică cu 2 rații egale și orice progresie aritmetică cu două rații egale este o progresie aritmetică obișnuită.

Orice șir cu 3 termeni este o progresie aritmetică cu 2 rații și orice șir simetric cu 4 termeni este o progresie aritmetică cu două rații și reciproc. Demonstrațiile acestor proprietăți le putem lăsa pe seama cititorului.

Pentru uniformitatea exprimării convenim ca orice șir cu cel mult 2 termeni să fie totdeauna considerat ca o progresie cu 2 rații.

Ca o generalizare a teoremei 1 să ne propunem să determinăm toate numerele n pentru care șirul (1) este o progresie aritmetică cu 2 rații.

Dacă $\varphi(n) \leq 4$, proprietatea este adevărată. Numerele n pentru care avem $\varphi(n) = 4$ sînt 5, 8, 10, 12. Pentru orice n diferit de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 și 12, $\varphi(n)$ este un număr par ≥ 6 .

Procedăm ca și la stabilirea rezultatului din enunțul teoremei 1. Să presupunem că șirul (1) definit mai sus este o progresie aritmetică cu 2 rații. Mai departe putem presupunem că $n > 6$ deși unele din celelalte cazuri sînt implicit cuprinse în discuția de mai jos. Trebuie să distingem mai multe cazuri :

Cazul 1. n este impar (≥ 5). În acest caz $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ și $(4, n) = 1$. Trebuie să distingem două subcazuri :

Subcazul 1.1. n este prim cu 3. Atunci $a_3 = 3$ și șirul (1) este o progresie aritmetică cu rația 1. Revenim la un caz studiat la teorema 1 (cazul 1 de acolo).

Subcazul 1.2. n se divide cu 3. Atunci $n = 3^\beta b$, unde β este un număr natural și b un număr natural impar prim cu 3. Dacă $\beta = 1$, avem $b \geq 5$. Avem acum $a_3 = 4$ și rațiile progresiei sînt 1 și 2. Se deduce că șirul (1) este format din toate numerele $< n$ care nu se divid cu 3 și numai din

aceste numere. Printre aceste numere figurează însă și numărul b . Trebuie deci să avem $b = 1$ și deci $n = 3^\beta$.

Cazul 2. n este par (> 6). Atunci $n = 2^\alpha a$, unde α este un număr natural iar a un număr natural impar. Pentru $a = 1$ revenim la un caz deja studiat la teorema 1 (subcazul 2.1 de acolo). Șirul (1) este atunci o progresie aritmetică (de ordinul 1) cu rația 2. Dacă $a > 1$, observăm că numerele $a - 2$, $a + 2$, $a + 4$ sînt prime cu n iar $a - 1$, a , $a + 1$, $a + 3$ nu sînt prime cu n . Rezultă că $a - 2$, $a + 2$, $a + 4$ sînt 3 termeni consecutivi ai șirului (1), care fiind presupus o progresie aritmetică cu 2 rații, are rațiile egale cu 2 și 4. Inegalitatea $a + 4 < n$ este verificată în ipoteza $n > 6$. Distingem acum următoarele 2 subcazuri :

Subcazul 2.1. a este prim cu 3. Atunci $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$. Dacă $a = 5$ numărul 10 este o soluție a problemei. Dacă $a > 5$, avem $n > 12$ și deci $\varphi(n) \geq 6$. Trebuie atunci să mai avem $a_5 = 13$, $a_6 = 15$. Acest lucru este însă imposibil căci $(15, n) = 1 \Rightarrow (5, n) = 1$, dar 5 nu figurează în șirul (1).

Subcazul 2.2. a se divide cu 3. În acest caz $n = 2^\alpha 3^\beta b$, α, β fiind două numere naturale și b un număr natural impar care este prim cu 3. Se deduce că șirul (1) este format din toate numerele impare $< n$ și care nu se divid cu 3 și numai din aceste numere. Printre ele figurează însă și numărul b . Se deduce că $b = 1$ și deci $n = 2^\alpha 3^\beta$.

Avem deci următoarea

TEOREMA 4. Șirul (1) este o progresie aritmetică cu două rații în următoarele cazuri :

- a). n este un număr prim > 3 ,
 - b). n este de forma $2^\alpha 3^\beta$, unde α, β sînt numere întregi nenegative,
 - c). $n = 10$,
- și numai în aceste cazuri.

Cele de mai sus sugerează și alte proprietăți și generalizări analoge pe care, din lipsă de spațiu, le lăsăm pe seama cititorului.

BIBLIOGRAFIE

1. *Darea de seamă asupra activității societății științifice a elevilor licenței Moise Nicoară din Arad din anii 1921–25* dirijată de Valeriu NOVACU, Arad, 1927
2. POPOVICIU, T. *Asupra progresiilor cu mai multe rații*, Jurnal Matematic, I. 68–70 (1924).
3. SIERPINSKI, Wacław, *Elementary Theory of Numbers*, Warszawa, 1964.