

[17]
MINISTERUL ÎNVAȚĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC CLUJ

D. Brodeanu

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ
A CADRELOR DIDACTICE

2 — 5 APRILIE

COMUNICĂRI

EXTRAS



CALCULUL FORȚEI DE PRESIUNE HIDRODINAMICĂ PE UN SEMICILINDRU ELIPTIC

de

Doina Brădeanu

1. Expresia potențialului complex și a presiunii locale. Se presupune că un semicilindru cu secțiunea semieliptică (E), avînd semiaxele a și b ($a > b$), este atacat pe direcția semiaxei mari de un curent ideal incompresibil uniform cu viteza U_∞ (fig.1). Mișcarea plană, care se formează în jurul semicilindrului, are potențialul complex $f(\zeta)$, funcția de curent $\Psi(\xi, \eta)$ și viteza $V(\xi, \eta)$ date de formulele (ξ și η sînt coordonate eliptice) [1],

$$f(\zeta) = (a + b)U_\infty \operatorname{ch}(\zeta - \xi_0) \quad (1)$$

$$\Psi(\xi, \eta) = (a + b)U_\infty \sin \eta \operatorname{sh}(\xi - \xi_0) \quad (2)$$

$$V^2 = \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} = \frac{(a + b)^2}{c^2} U_\infty^2 \frac{\operatorname{ch} 2(\xi - \xi_0) - \cos 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \quad (3)$$

$$(\xi_0 = \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{b}{a}, z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta, z = c \operatorname{ch} \zeta, c^2 = a^2 - b^2, 0 \leq \eta \leq \pi). \quad (4)$$

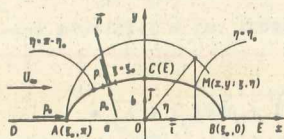


Fig.1

Deoarece linia de curent de zero, $\psi = 0$, are ecuațiile $\xi = \xi_0$ (arcul de elipsă ACB), $\eta = 0$ (segmentul BE de pe Ox) și $\eta = \pi$ (segmentul DA) rezultă că $f(\zeta)$ este într-adevăr, potențialul complex.

Pentru presiunea locală p , aplicînd formula lui Bernoulli, avem expresia

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_0 = p + \frac{(a + b)^2}{c^2} \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \frac{1 - \cos 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta}, \quad (5)$$

unde p_0 este presiunea de stagnație în A și B, egală cu presiunea atmosferică din interiorul semicilindrului.

2. Calculul forței totale de presiune. Forța totală $\vec{F}$ de pe suprafața semicilindrului de lățime l , cu normala exterioară $\vec{n}$, este

$$\vec{F} = l \int_{AB} (p_0 - p) \vec{n} ds \quad (6)$$

$$(x = a \cos \eta, y = b \sin \eta, \vec{n} ds = (b \cos \eta \vec{i} + a \sin \eta \vec{j}) d\eta). \quad (7)$$

Forța totală de presiune aerodinamică care acționează pe suprafața semicilindrului eliptic de lățime l este dată, folosind (5), (6) și (7), de formule

$$\vec{F} = \frac{l \rho (a + b) U_\infty^2}{2(a - b)} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} (b \cos \eta \vec{i} + a \sin \eta \vec{j}) d\eta \quad (8)$$

$$(\vec{F} = R\vec{i} + P\vec{j}) \quad (a \neq b).$$

Portanța aerodinamică P este dată de formula

$$P = \vec{F} \cdot \vec{j} = l \frac{a+b}{a-b} a \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} \sin \eta d\eta \quad (a \neq b). \quad (9)$$

Rezistența la înaintare se va calcula cu formula

$$R = \vec{F} \cdot \vec{i} = l \frac{a+b}{a-b} b \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} \cos \eta d\eta \quad (a \neq b). \quad (10)$$

Calculul rezistenței la înaintare R . Să calculăm la început, forța R . Funcția de sub semnul integralei din (10) fiind pară, vom putea scrie

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} \cos \eta d\eta = (1 - \operatorname{ch} 2\xi_0) \int_0^{\pi} \frac{\cos \eta d\eta}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{ch} 2\xi_0}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \eta d\eta}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta} = \frac{1 - \operatorname{ch} 2\xi_0}{-2i} \int_{(C)} \frac{(z^2 + 1) dz}{z^4 + 1 - 2z^2 \operatorname{ch} 2\xi_0} \end{aligned} \quad (11)$$

$$(e^{i\eta} = z, i z d\eta = dz, (C) = \text{cercul } |z| = 1).$$

Pentru calculul integralei complexe curbilini (11) pe cercul $|z| = 1$, folosim teorema reziduurilor. Avem

$$\begin{aligned} z^4 + 1 - 2z^2 \operatorname{ch} 2\xi_0 &= [z^2 - z\sqrt{2(1 + \operatorname{ch} 2\xi_0)} + 1][z^2 + z\sqrt{2(1 + \operatorname{ch} 2\xi_0)} + 1] = \\ &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4), \end{aligned}$$

unde

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2(1 + \operatorname{ch} 2\xi_0)} \pm \sqrt{2(1 + \operatorname{ch} 2\xi_0) - 4} \right],$$

$$z_{3,4} = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{2(1 + \operatorname{ch} 2\xi_0)} \pm \sqrt{2(1 + \operatorname{ch} 2\xi_0) - 4} \right]$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = 1, \quad |z_3| \cdot |z_4| = 1.$$

Dacă rădăcina z_2 se află în interiorul cercului $|z| = 1$, rădăcina z_1 se află în exteriorul acestui cerc (analog pentru z_3 și z_4).

Având identitatea

$$\frac{z^2 + 1}{z^4 + 1 - 2z^2 \operatorname{ch} 2\xi_0} = \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{z - z_i},$$

se deduce ușor că reziduurile funcției în poli simpli z_2 și z_3 sînt

$$A_{2,3} = \frac{1}{\mp 2\sqrt{2(1 + \operatorname{ch} 2\xi_0)} - 4} \Rightarrow A_2 + A_3 = 0.$$

În consecință, avem

$$\mathcal{J} = \frac{1 - \operatorname{ch} 2\xi_0}{-2i} \cdot 2\pi i \cdot \sum \operatorname{resid} = 0$$

și formula (10) se reduce la

$$R = 0. \quad (12)$$

Rezistența la înaintare, este deci nulă. Se ajunge la paradoxul lui D'Alembert care se întâlnește și în cazul cilindrului eliptic complet.

Calculul portanței P. Vom folosi formula (9) în care urmează să se evalueze integrarea dintr-o funcție impară. Deoarece avem

$$\xi_0 = \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}, \quad \operatorname{ch} 2\xi_0 = \operatorname{ch} \ln \frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}, \quad (13)$$

se deduce ușor, efectuând calcule directe, că

$$\mathcal{J} = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\eta}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \cos 2\eta} \sin \eta d\eta = 2 + \frac{b^2}{c^2} \int_0^\pi \frac{d(\cos \eta)}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \cos^2 \eta} = 2 + \frac{b^2}{ac} \ln \frac{a-c}{a+c}.$$

Avem deci, următoarea formulă pentru portanța P a semicilindrului eliptic de lățime l

$$P = l a \frac{\rho U_\infty^2}{2} \frac{a+b}{a-b} \left(2 + \frac{b^2}{ac} \ln \frac{a-c}{a+c} \right) \quad (14)$$

$$(a \neq b, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}).$$

Calculul momentului rezultat față de originea O. Pentru momentul $d\vec{M}_0$ al forței elementare de presiune $(p_0 - p)$ îndes de pe cilindru ($dl = 1$) avem formula

$$d\vec{M}_0 = \vec{r} \times (p_0 - p) \vec{n} ds = (a^2 - b^2)(p_0 - p) \sin \eta \cos \eta d\eta \vec{k}$$

$$(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}).$$

Prin urmare, pentru momentul M_0 , dirijat perpendicular în O pe planul mișcării Oxy, dacă folosim și formula (5), avem expresiile

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{a^2 - b^2}{2} \int_0^\pi (p_0 - p) \sin 2\eta d\eta = \frac{-(a+b)^2}{8} \rho U_\infty^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\eta}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \cos 2\eta} d(\cos 2\eta) = \\ &= \frac{(a+b)^2}{8} \rho U_\infty^2 \left[\frac{2b^2}{c^2} \int_0^\pi \frac{d(\cos 2\eta)}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \cos 2\eta} + \int_0^\pi d(\cos 2\eta) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{(a+b)^2}{8} \rho U_{\infty}^2 \left\{ \ln \left| \frac{a^2+b^2}{c^2} - \cos 2\eta \right| \right\}_0^{\pi} = 0. \quad (15)$$

De aici se deduce că portanța produsă pe semielipsă este o forță care trece prin originea O (axa centrală a presiunilor elementare de pe semielipsa (E) trece prin originea O; polul de moment nul, în plan, aparține axei centrale).

În concluzie, sistemul de forțe hidrodinamice elementare care acționează pe suprafața unui semicilindru eliptic de lățime l și semiaxe a și b , așezat într-un curent de fluid ideal de densitate ρ având viteza U_{∞} la infinit paralelă cu axa mare, este echivalent cu o forță unică (portanța) $\vec{F} = P\vec{j}$ care are o mărime P , dată de (14), și un suport perpendicular pe baza cilindrului (direcția curentului de la infinit), care trece prin mijlocul axei mari a semielipsei secțiune din mijlocul cilindrului.

După cum este cunoscut [1], referitor la un cilindru complet, rezultanta forțelor hidrodinamice (portanța și rezistența la înaintare) este nulă, dar, momentul rezultat al presiunilor este diferit de zero pentru un unghi de atac nenul față de axa mare (forțele aerodinamice se reduc, în acest caz, la un cuplu). Dacă unghiul de atac este nul și mișcarea are loc în direcția axei mari a cilindrului, atunci și momentul rezultat al presiunilor este nul. Prin urmare, comparativ cu cilindrul eliptic complet, semicilindrul eliptic, în aceleași condiții de mișcare, produce o portanță diferită de zero care se determină cu formula (14).

3. Aplicație. Să se calculeze presiunea totală (portanța aerodinamică) produsă de un vânt care se îndreaptă cu viteza $U_{\infty} = 50$ m/sec spre un hangar de forma unui semicilindru eliptic cu semiaxele $a = 10$ m, $b = 8$ m și lățimea $l = 30$ m (fig.2). Se ia $\rho = 1,23$ kg/m³.

Aplicând formula (14) găsim valoarea

$$P = 2700(2 - 1,06 \ln 4) \frac{1,23 \times 2500}{2} \text{ N} =$$

$$= 21937,5 \cdot 10^2 \text{ N} = 2237,3 \cdot 10^2 \text{ kgf}.$$

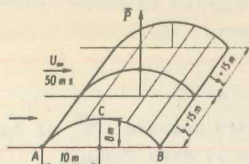


Fig.2

Primită la redacție la data de 24.IV.1971.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Milne-Thomson, L.M., Theoretical Hydrodynamics. Fourth Edition, London, Macmillan and Co. LTD, 1960.
- [2] Tasca, Dan și Băcanu, Ioan, Culegere de probleme de hidraulică tehnică. Ediția a doua, București, Editura tehnică, 1966.
- [3] Jeffreys, Sir Harold, and Swirles, Bertha, Methods of Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1966.

The Calculul of the Hydrodynamic Pressure
Force on an Elliptical Semicylinder

By means of formula (14) the lift size is calculated and it is shown that the support of this force passes through the middle of the major semi-axis of the ellipse, placed in the middle of the semi-cylinder. That support is perpendicular on the current direction from the infinite (semi-cylinder base).