

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

EXTRAS

7

TOMUL 23

1971

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

O GENERALIZARE A PRODUSULUI DE COMPOZIȚIE AL RELAȚIILOR

DE

A. KOVÁCS

(Cluj)

În această lucrare se studiază problema generalizării a produsului de compoziție al relațiilor precum și anumite probleme legate de geometria relațiilor din plan.

0. În lucrarea [1] se face un studiu asupra relațiilor binare definite pe mulțimea numerelor reale precum și asupra produsului relațiilor binare. În același timp se prezintă geometria relațiilor liniare din plan.

Scopul acestei lucrări este de a da o generalizare a noțiunii de produs de compoziție prezentat în [1], și câteva rezultate despre geometria relațiilor din plan.

Ideea de a studia anumite probleme legate de geometria relațiilor a fost sugerată de St. N. Berți. În același timp mi-a dat numeroase sugestii valoroase, pentru care îi aduc mulțumirile mele.

1. Să considerăm mulțimile nevide X, Y, Z și relațiile $\mathfrak{R} = (G, X, Z)$ și $\mathfrak{S} = (H, Z, Y)$ unde $G \subset X \times Z$ și $H \subset Z \times Y$. Definim produsul de compoziție generalizat al relațiilor $\mathfrak{R}$ și $\mathfrak{S}$ notat cu $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}$ prin

$$\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S} = \{(x, y) \in X \times Y \mid \exists z \in Z : x \mathfrak{R} f(z) \text{ \& } g(z) \mathfrak{S} y\},$$

unde f și g sînt două aplicații definite pe Z și cu valori în Z .

Fie $X=Y=Z=R$, $f(z)=\alpha z+\beta$, $g(z)=\gamma z+\delta$, unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ și să presupunem că $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Dreptele

$$\mathfrak{R} : \quad ax + by + c = 0$$

$$\mathfrak{S} : \quad Ax + By + C = 0$$

pot fi interpretate ca și mulțimea perechilor ordonate $(x, y) \in R^2$ care satisfac aceste ecuații, adică $\mathfrak{R}$ și $\mathfrak{S}$ sînt graficele unor relații definite pe $\mathfrak{R}$. Atunci pe baza definiției produsului de compoziție $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}$ avem:

$$\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S} = \{(x, y) \in R^2 \mid \exists z \in R : x\mathfrak{R}(\alpha z + \beta) \& (\gamma z + \delta)\mathfrak{S}y\}.$$

Deci condițiile impuse cer existența elementului $z \in R$ astfel ca

$$ax + b(\alpha z + \beta) + c = 0$$

$$A(\gamma z + \delta) + By + C = 0,$$

pentru care este necesar și suficient ca

$$\frac{ax + c}{\alpha b} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{By + C}{\gamma A} + \frac{\delta}{\gamma} \quad (Ab \neq 0)$$

și deci sîntem conduși la relația

$$(1) \quad \mathfrak{R} \circ \mathfrak{S} : \quad aA\gamma x - bB\alpha y + cA\gamma - bC\alpha - bA\Delta = 0$$

unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

În consecință pentru ca un asemenea $z \in R$ să existe este necesar și suficient ca $(x, y) \in R^2$ să se afle pe dreapta (1).

Observația 1. Punind $\alpha = \gamma = 1$ și $\beta = \delta = 0$, obținem relația studiată în [1].

Vom nota cu $D(K, L, M) = \{(x, y) \in R^2 \mid Kx + Ly + M = 0\}$, unde $K, L, M \in R$, iar cu

$$(2) \quad \mathfrak{D} = \{D(K, L, M) \mid K, L, M \in R\}.$$

Cu aceste notații avem

$$(3) \quad D(a, b, c) \circ D(A, B, C) = D(aA\gamma, -bB\alpha, cA\gamma - bC\alpha - bA\Delta).$$

Are loc următoarea

PROPRIETATEA 1. Oricare ar fi $D(a, b, c)$, $D(A, B, C)$ și $D(K, L, M)$ din $\mathfrak{D}$ avem

$$[D(a, b, c) \circ D(A, B, C)] \circ D(K, L, M) =$$

$$= D(a, b, c) \circ [D(A, B, C) \circ D(K, L, M)],$$

adică produsul de compoziție (3) este asociativ.

Demonstrație se face direct, pe baza definiției produsului de compoziție.

PROPRIETATEA 2. Există un $D(A, B, C) \in \mathfrak{D}$ astfel încît oricare ar fi $D(a, b, c) \in \mathfrak{D}$,

$$D(a, b, c) \circ D(A, B, C) = D(A, B, C) \circ D(a, b, c) = D(a, b, c),$$

unde

$$A = \frac{1}{\gamma}, \quad B = -\frac{1}{\alpha}, \quad C = -\frac{\Delta}{\alpha\gamma},$$

adică dreapta unitate $I = D\left(\frac{1}{\gamma}, -\frac{1}{\alpha}, -\frac{\Delta}{\alpha\gamma}\right)$ are forma

$$I : \quad \frac{1}{\gamma} \cdot x - \frac{1}{\alpha} \cdot y - \frac{\Delta}{\alpha\gamma} = 0.$$

Demonstrație. Din condiția $D(a, b, c) \circ D(A, B, C) = D(a, b, c)$ pe baza definiției (3) obținem următorul sistem:

$$\begin{cases} aA\gamma = a \\ -bB\alpha = b \\ cA\gamma - bC\alpha - bA\Delta = c. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu A, B, C obținem valorile din enunț. Analog se procedează pentru ecuația $D(A, B, C) \circ D(a, b, c) = D(a, b, c)$, și din sistemul corespunzător obținem aceleași valori pentru A, B, C .

PROPRIETATEA 3. Oricare ar fi $D(a, b, c) \in \mathfrak{D}$ ($a \cdot b \neq 0$), există un $D(A, B, C) \in \mathfrak{D}$ astfel încît

$$D(a, b, c) \circ D(A, B, C) = D(A, B, C) \circ D(a, b, c) =$$

$$= D\left(\frac{1}{\gamma}, -\frac{1}{\alpha}, -\frac{\Delta}{\alpha\gamma}\right) = I,$$

unde

$$A = \frac{1}{a\gamma^2}, \quad B = \frac{1}{b\alpha^2}, \quad C = \frac{c\alpha\gamma + \Delta(a\gamma - b\alpha)}{ab\alpha^2\gamma^2},$$

adică dreapta inversă $D^{-1}(a, b, c)$ a dreptei $D(a, b, c)$ are forma

$$D^{-1}: \frac{1}{a\gamma^2} \cdot x + \frac{1}{b\alpha^2} \cdot y + \frac{c\alpha\gamma + \Delta(a\gamma - b\alpha)}{ab\alpha^2\gamma^2} = 0.$$

Demonstrație. Din condiția $D(a, b, c) \circ D(A, B, C) = I$ se obține următorul sistem:

$$\begin{cases} aA\gamma = \frac{1}{\gamma} \\ -bB\alpha = -\frac{1}{\alpha} \\ cA\gamma - bC\alpha - bA\Delta = -\frac{\Delta}{\alpha\gamma}, \end{cases}$$

soluția sistemului fiind valorile date în enunț, unde se presupune că $a \cdot b \neq 0$. Din condiția $D(A, B, C) \circ D(a, b, c) = I$ obținem aceleași valori pentru A, B, C .

Pe baza proprietăților 1–3 rezultă următoarea:

TEOREMA 1. Mulțimea $\mathfrak{D}$ înzestrată cu operația de compoziție generalizată „ $\circ$ ” formează un grup $G = (\mathfrak{D}, \circ)$.

Observația 2. Fie $d = d(a, b, c) \in \mathfrak{D}$ și $D = D(A, B, C) \in \mathfrak{D}$. Condiția necesară și suficientă pentru ca produsul de compoziție să fie permutabil ($dD = Dd$) este ca

$$\gamma(Ca - cA) - \alpha(Bc - bC) = \Delta(Ba - bA).$$

2. Pe baza definiției produsului de compoziție putem defini pătratul respectiv radicalul unui element $D(a, b, c) \in \mathfrak{D}$.

Făcând $A = a, B = b, C = c$ [pe baza relației (3)] avem

$$D^2(a, b, c) = D(a, b, c) \circ D(a, b, c) =$$

$$= D(a^2\gamma, -b^2\alpha, ac\gamma - bc\alpha - ab\Delta).$$

Analog putem defini pe $D^n(a, b, c)$.

Prin radicalul elementului $D(a, b, c) \in \mathfrak{D}$ înțelegem elementul $D(u, v, w) \in \mathfrak{D}$, unde $D^2(u, v, w) = D(a, b, c)$.

Să notăm cu $\sqrt{D(a, b, c)}$ mulțimea tuturor elementelor $D(u, v, w) \in \mathfrak{D}$ cu această proprietate. Fără restrângerea generalității putem presupune că $a > 0$. Atunci are loc următoarea:

TEOREMA 2. Dacă $\frac{a}{\gamma} > 0$ și $\frac{b}{\alpha} < 0$, atunci

$$\sqrt{D(a, b, c)} = \begin{cases} \left\{ D \left(\sqrt{\frac{a}{\gamma}}, \sqrt{-\frac{b}{\alpha}}, \frac{c + \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{\alpha}} \cdot \Delta}{\sqrt{\frac{a}{\gamma}} \cdot \gamma - \sqrt{-\frac{b}{\alpha}} \cdot \alpha} \right); \right. \\ \left. ; D \left(\sqrt{\frac{a}{\gamma}}, -\sqrt{-\frac{b}{\alpha}}, \frac{c - \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{\alpha}} \cdot \Delta}{\sqrt{\frac{a}{\gamma}} \cdot \gamma + \sqrt{-\frac{b}{\alpha}} \cdot \alpha} \right) \right\}, \\ \text{dacă } \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \gamma \neq \sqrt{-\frac{b}{\alpha}} \alpha; \\ \left\{ D \left(\sqrt{\frac{a}{\gamma}}, -\sqrt{-\frac{b}{\alpha}}, \frac{c - \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{\alpha}} \cdot \Delta}{\sqrt{\frac{a}{\gamma}} \cdot \gamma + \sqrt{-\frac{b}{\alpha}} \cdot \alpha} \right) \right\}, \\ \text{dacă } \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \gamma = \sqrt{-\frac{b}{\alpha}} \alpha. \end{cases}$$

Demonstrație. Din condiția $D(a, b, c) = D^2(u, v, w)$ obținem următorul sistem pentru u, v, w :

$$\begin{cases} u^2\gamma = a \\ -v^2\alpha = b \\ uv\gamma - vw\alpha - uv\Delta = c. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem în raport cu u, v, w , obținem afirmația teoremei.

TEOREMA 3a. Oricare ar fi $D(a, b, c) \in \mathfrak{D} (a \cdot b \neq 0)$ și $D(A, B, C) \in \mathfrak{D}$, există un $D(x, y, z) \in \mathfrak{D}$, astfel încât

$$(4) \quad D(a, b, c) \circ D(x, y, z) = D(A, B, C),$$

unde

$$x = \frac{A}{a\gamma}, \quad y = -\frac{B}{b\alpha}, \quad z = \frac{\gamma(cA - aC) - bA\Delta}{ab\alpha\gamma}.$$

Demonstrație. Să arătăm că $D^{-1}(a, b, c) \circ D(A, B, C)$ verifică ecuația (4). În adevăr, pe baza proprietăților 1-3

$$\begin{aligned} D(a, b, c) \circ [D^{-1}(a, b, c) \circ D(A, B, C)] &= \\ &= [D(a, b, c) \circ D^{-1}(a, b, c)] \circ D(A, B, C) = I \circ D(A, B, C) = D(A, B, C). \end{aligned}$$

Pentru determinarea parametrilor x, y, z avem

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= D^{-1}(a, b, c) \circ D(A, B, C) = \\ &= D\left(\frac{1}{a\gamma^2}, \frac{1}{b\alpha^2}, \frac{c\alpha\gamma + \Delta(a\gamma - b\alpha)}{ab\alpha^2\gamma^2}\right) \circ D(A, B, C) \end{aligned}$$

și efectuând compoziția obținem valorile din enunț, în ipoteza că $a \cdot b \neq 0$.

De asemenea are loc

TEOREMA 3b. *Oricare ar fi $D(a, b, c) \in \mathfrak{D}$ și $D(A, B, C) \in \mathfrak{D}$ ($a \cdot b \neq 0$), există un $D(x, y, z) \in \mathfrak{D}$, astfel încât*

$$D(x, y, z) \circ D(a, b, c) = D(A, B, C),$$

unde

$$x = \frac{A}{a\gamma}, \quad y = -\frac{B}{b\alpha}, \quad z = \frac{\alpha(bC - Bc) - aB\Delta}{ab\alpha\gamma}.$$

Demonstrația teoremei este asemănătoare cu demonstrația teoremei precedente.

Observația 3. În mod asemănător pot fi studiate ecuațiile de forma

$$D(a, b, c) \circ D^2(x, y, z) = D(A, B, C); \quad D^2(x, y, z) \circ D(a, b, c) = D(A, B, C)$$

și altele.

Primit la redacție la 5.02.1970

Institutul de calcul, Cluj

EINE VERALLGEMEINERUNG DES KOMPOSITIONSPRODUKTES VON RELATIONEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen, $\mathfrak{A} = (G, X, Z)$, $\mathfrak{B} = (H, Z, Y)$ zwei Relationen ($G \subset X \times Z$, $H \subset Z \times Y$), f und g zwei Abbildungen von Z in Z .

Dann wird das verallgemeinerte Kompositionsprodukt der Relationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = \{(x, y) \in X \times Y \mid \exists z \in Z: x\mathfrak{A}f(z) \& g(z)\mathfrak{B}y\}$ definiert.

Falls f und g lineare Funktionen sind, wird gezeigt, daß die Menge

$$\mathfrak{D} = \{D(K, L, M) \mid K, L, M \in R\},$$

wo

$$D(K, L, M) = \{(x, y) \in R^2 \mid Kx + Ly + M = 0\}$$

mit der verallgemeinerten Kompositionsoperation „ $\circ$ ” versehen, eine Gruppe $G = (\mathfrak{D}, \circ)$ bildet.

BIBLIOGRAFIE

1. BERȚI, ȘT. N., *Teoria relațiilor binare și unele aplicații* G.M.A., **LXXIII**, 11, 428 — 434 București, 1968.