

TRANSFORMĂRI CONTINUE ALE SPAȚIILOR LUI CEBÎȘEV ȘI ALE SPAȚIILOR LUI CEBÎȘEV AVÎND PROPRIETATEA I_n^*

DE

A. B. NÉMETH

(Cluj)

În lucrare se demonstrează conexitudinea prin arce a mulțimii subspațiilor lui Cebîșev de dimensiune n din spațiul $C^0[0, 1]$ și a mulțimii subspațiilor lui Cebîșev de dimensiune n avînd proprietatea I_n^* , din spațiul $C^n[0, 1]$.

0. Fie X o mulțime conexă și compactă de pe axa reală. Notăm cu $C^v(X)$ spațiul liniar normat al funcțiilor reale avînd derivate de ordin v , continue pe X , norma elementului f din $C^v(X)$ fiind definită prin egalitatea :

$$\|f\| = \max_{0 \leq i \leq v} \max_{x \in X} |f^{(i)}(x)|.$$

DEFINIȚIA 1. (i) Spunem că sistemul de elemente $f_1, f_2, \dots, f_n$ din spațiul $C^0(X)$ este un sistem al lui Cebîșev, dacă

$$\det \|f_i(x_j)\|_{i,j=1,2,\dots,n} \neq 0,$$

pentru orice puncte distincte $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, din X .

(ii) Subspațiul n -dimensional L_n din spațiul $C^0(X)$ se numește spațiu al lui Cebîșev, dacă are o bază cu proprietatea (i).

(iii) Se spune că șirul de elemente $f_1, f_2, \dots, f_m$ din spațiul $C^0(X)$ este un șir al lui Cebîșev-Markov, dacă orice subșir de forma $f_1, f_2, \dots, f_k$, $k \leq m$, satisface o condiție de tipul (i), pentru $n = k$.

(iv) Spunem că spațiul lui Cebîșev L_n posedă o bază a lui Markov, dacă are o bază cu proprietatea (iii).

DEFINIȚIA 2. (i) Spunem că sistemul de elemente $f_1, f_2, \dots, f_n$ din spațiul $C^n(X)$ formează un sistem al lui Cebîșev cu proprietatea I_n^* , dacă oricare ar fi numărul natural $m, 1 \leq m \leq n$, oricare ar fi punctele distincte $x_i, i = 1, 2, \dots, m$ din mulțimea X și oricare ar fi numerele naturale $k_i, i = 1, 2, \dots, m$, cu proprietatea $\sum_{i=1}^m k_i = n$, avem

$$\det ||f_k^{(j)}(x_i)||_{j=0, 1, \dots, k_i-1, i=1, 2, \dots, m} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(ii) Subspațiul n -dimensional L_n din spațiul $C^n(X)$ se numește spațiu al lui Cebîșev cu proprietatea I_n^* , dacă posedă o bază cu proprietatea (i).

(iii) Spunem că șirul de elemente $f_1, f_2, \dots, f_m$ din spațiul $C^n(X)$ este un șir al lui Cebîșev-Markov cu proprietatea I_m^* , dacă orice subșir de forma $f_1, f_2, \dots, f_k, k \leq m$, satisface o condiție de tipul (i), pentru $n = k$.

(iv) Spunem că spațiul lui Cebîșev L_n cu proprietatea I_n^* posedă o bază a lui Markov cu proprietatea I_n^* , dacă are bază avînd proprietatea (iii).

Într-o lucrare recentă [7] am introdus noțiunea de familie n -parametrică diferențială (F_nD) ca fiind o varietate diferențiabilă din spațiul $C^0[0, 1]$, omeomorfă cu spațiul euclidian real n -dimensional $\mathbf{R}^n$, și avînd proprietatea că orice spațiu tangent al ei este un spațiu al lui Cebîșev de dimensiune n din spațiul $C^0[0, 1]$ (a se vedea definiția 1. (ii)). În lucrarea citată am rezolvat un caz particular al următoarei probleme generale: Date fiind două subspații ale lui Cebîșev de dimensiune n din spațiul, $C^0[0, 1]$, să se construiască o varietate diferențiabilă constituind o F_nD , avînd spațiile lui Cebîșev date drept spații tangente în două puncte distincte.

O condiție necesară pentru ca problema generală să fie rezolvabilă este ca în spațiul $C^0[0, 1]$ orice spațiu al lui Cebîșev de dimensiune n să fie deformabil continuu în orice alt subspațiu al lui Cebîșev de aceeași dimensiune, toate spațiile intermediare în cursul acestei deformări fiind tot spații cu această proprietate, adică e necesar ca mulțimea subspațiilor lui Cebîșev de dimensiune n din spațiul $C^0[0, 1]$ să fie conexă prin arce.

În prezenta lucrare vom stabili conexitudinea prin arce a mulțimii subspațiilor lui Cebîșev de dimensiune n din spațiul $C^0[0, 1]$ și a mulțimii subspațiilor lui Cebîșev de dimensiune n , avînd proprietatea I_n^* (a se vedea definiția 2. (ii)) din spațiul $C^n[0, 1]$. Se vor stabili și alte proprietăți ale acestor mulțimi.

Metoda aplicată în lucrare se bazează pe utilizarea anumitor rezultate privind bazele lui Markov din spațiile lui Cebîșev avînd baze ale lui Markov (a se vedea definiția 1. și 2. (iv)). Aceste cercetări au fost inițiate în anul 1936 de T. Popoviciu [9], [10], [11] și reluate recent de M. A. Rutman [12] și S. Karlin și W. Studden [5].

1. Introducem notația

$$C_n^v = \times_1^n C^v[0, 1], \quad v = 0, n,$$

unde simbolul $\times_1^n$ înseamnă produsul cartezian a n exemplare din mulțimea care îl urmează.

Fie $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ și $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ elemente din spațiul C_n^* . Introducem relația de echivalență $f \sim g$, dacă $L(f_1, f_2, \dots, f_n) = L(g_1, g_2, \dots, g_n)$, unde prin $L(h_1, h_2, \dots, h_n)$ notăm învelitoarea liniară a funcțiilor $h_1, h_2, \dots, h_n$ (adică subspațiul generat de aceste funcții). Fie L' submulțimea vectorilor $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ din spațiul C_n^* , care au proprietatea că elementele $f_1, f_2, \dots, f_n$ sînt liniar independente în spațiul $C^*[0, 1]$. Considerăm mulțimea L' topologizată prin topologia indusă. Notăm cu

$$\mathcal{L}^v = L'/\sim, \quad v = 0, n$$

spațiul topologic obținut din factorizarea spațiului topologic L' prin relația de echivalență introdusă mai sus. Astfel elementele din spațiul topologic $\mathcal{L}^v$ pot fi identificate cu subspațiile n -dimensionale din spațiul $C^*[0, 1]$. Procedeu de mai sus constituie o cale naturală de introducere a unei topologii în mulțimea subspațiilor n -dimensionale din spațiul $C^*[0, 1]$. Proiecția canonică a lui L' pe $\mathcal{L}^v$ (aplicația care îi pune în corespondență vectorului $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ din L' spațiul generat de acest vector în $\mathcal{L}^v$) se va nota în cele ce urmează cu p . Este ușor de văzut că în cazul nostru aplicația p este aplicație deschisă.

Introducem câteva notații. Notăm cu $\mathcal{C}^0$ submulțimea din $\mathcal{L}^0$ a tuturor spațiilor lui Cebîșev (definiția 1. (ii)), cu $\mathcal{M}^0$ submulțimea din $\mathcal{C}^0$ a tuturor spațiilor lui Cebîșev avînd bază a lui Markov (definiția 1. (iv)). Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 1. (i) Mulțimea $\mathcal{C}^0$ este conexă prin arce.

(ii) Mulțimea $\mathcal{M}^0$ este conexă prin arce.

(iii) $\text{int } \mathcal{C}^0 = \emptyset$ (în $\mathcal{L}^0$).

(iv) Mulțimea $\mathcal{M}^0$ este densă în $\mathcal{C}^0$.

(v) Dacă elementul $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ din L^0 are proprietatea că funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$ formează un sistem al lui Cebîșev pe intervalul $(0, 1)$ (adică ele satisfac condiția (i) din definiția 1. pentru punctele x , din intervalul $(0, 1)$), dar nu au această proprietate pe $[0, 1]$, atunci spațiul liniar $L(f_1, f_2, \dots, f_n)$ aparține aderenței lui $\mathcal{C}^0$ și prin urmare $\mathcal{C}$ nu este o submulțime închisă din mulțimea $\mathcal{L}^0$.

Notăm cu $\mathcal{D}$ submulțimea din $\mathcal{L}^n$ a spațiilor care constituie spații ale soluțiilor unor ecuații diferențiale liniare ordinare, omogene, de ordin n , de formă normală și cu coeficienți continui pe intervalul $[0, 1]$, sau, ceea ce este același lucru, mulțimea spațiilor liniare generate de funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$ avînd proprietatea că wronskianul lor, $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ nu se anulează pe intervalul $[0, 1]$ (adică ele satisfac condiția (i) din definiția 2 cu $m = 1$). Fie $\mathcal{C}^n$ submulțimea din $\mathcal{D}$ a spațiilor lui Cebîșev (definiția 1, (ii)), $\mathcal{K}$ submulțimea din $\mathcal{C}^n$ a spațiilor cu proprietatea I_n^* (definiția 2, (ii)), iar $\mathcal{M}^n$ submulțimea din $\mathcal{K}$ a spațiilor lui Cebîșev cu proprietatea I_n^* avînd baze a lui Markov cu proprietatea I_n^* (definiția 2, (iv)).

TEOREMA 2. (i) *Submulțimile $\mathcal{K}$ și $\mathcal{M}^n$ sînt identice și deschise în spațiul topologic $\mathcal{E}^n$.*

(ii) *Mulțimea $\mathcal{C}^n$ este conexă prin arce.*

(iii) *Mulțimea $\mathcal{M}^n$ este conexă prin arce.*

(iv) *Submulțimea $\mathcal{M}^n$ este densă în $\mathcal{C}^n$.*

(v) *Punctele din $\mathcal{C}^n \setminus \mathcal{M}^n$ sînt puncte frontieră pentru mulțimea $\mathcal{C}^n$.*

2. Înainte de a trece la demonstrarea teoremelor enunțate, observăm că topologizarea mulțimii $\mathcal{Q}$ putea fi făcută pe o altă cale, folosind ecuațiile diferențiale pentru care elementele din $\mathcal{Q}$ servesc ca spații de soluții. Mai precis, are loc următoarea propoziție :

Spațiile topologice $\mathcal{Q}$ și C_n^0 sînt omeomorfe, omeomorfismul fiind realizat de aplicația

$$L \mapsto (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0),$$

unde $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ sînt coeficienții ecuației diferențiale ordinare liniare, omogene, de ordin n , de formă normală și cu coeficienții continui pe intervalul $[0, 1]$, pentru care L servește drept spațiu al soluțiilor.

În propoziția de mai sus s-a presupus că mulțimea $\mathcal{Q}$ e topologizată prin procedeul descris la punctul 1.

3. Demonstrația teoremei 1. Fie $V[0, 1]$ spațiul liniar normat al funcțiilor cu valori reale, continue la dreapta, cu variație mărginită, definite în intervalul $[0, 1]$, supuse restricției $f(0) = 0$, $f \in V[0, 1]$, spațiu, în care norma elementului f se definește prin

$$\|f\| = V_0^1 f,$$

unde prin $V_0^1 f$ înțelegem variația totală a funcției f pe intervalul $[0, 1]$. Considerăm spațiul liniar normat

$$V = \bigtimes_1^m V[0, 1].$$

Fie K conul convex din spațiul V definit prin

$$K = K_0 \times \left(\bigtimes_1^{m-1} K_1 \right),$$

unde K_0 este conul convex al funcțiilor continue și monoton crescătoare, iar K_1 conul funcțiilor monoton crescătoare din $V[0, 1]$.

Vom demonstra următoarea leamnă :

LEMA 1. *Aplicația definită prin integrala*

$$\int_0^x d\sigma_1(x) \int_0^x d\sigma_2(x) \dots \int_0^x d\sigma_m(x),$$

unde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in K$, iar integrala reprezintă integrare repetată în sens Lebesgue-Stieltjes în ordinea inversă a indicilor, este o aplicație continuă a conului K în spațiul $C^0[0, 1]$.

Demonstrație. Fie dat șirul $\{\sigma_n\}$, $\sigma_n \in K$, $\sigma_n = (\sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \dots, \sigma_{mn})$, $n = 1, 2, \dots$, care tinde spre elementul $\sigma \in K$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ în sensul normei spațiului V . Introducem notațiile

$$F_0(x) = \int_0^x d\sigma_1(x) \int_0^x d\sigma_2(x) \dots \int_0^x d\sigma_m(x),$$

$$F_n(x) = \int_0^x d\sigma_{1n}(x) \int_0^x d\sigma_{2n}(x) \dots \int_0^x d\sigma_{mn}(x),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Demonstrația lemei revine la demonstrarea continuității funcțiilor F_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ și a convergenței uniforme

$$F_n(x) \rightarrow F_0(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in [0, 1].$$

(a) Funcțiile F_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ sînt continue. Într-adevăr, sub semnul ultimei integrale din formulele de definiție ale lor figurează funcții monoton crescătoare, iar funcțiile σ_1, σ_{1n} , $n = 1, 2, \dots$ în raport cu care se efectuează această ultimă integrare, sînt funcții continue. Afîindu-ne în cadrul condițiilor de integrabilitate în sens Riemann-Stieltjes, printr-o aplicare simplă a formulei de medie pentru aceste integrale (a se vedea de exemplu [3], 582 1°), concluzia noastră rezultă.

(b) Considerăm acum funcțiile

$$G(x) = \int_0^x f(x) dg(x), \quad G_n(x) = \int_0^x f_n(x) dg_n(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

unde $f, f_n \in K_1$ și $g, g_n \in K_1$ sau K_0 . Presupunem că $f_n(x) \rightarrow f(x)$ $n \rightarrow \infty$, uniform în raport cu $x \in [0, 1]$ și $g_n \rightarrow g$, $n \rightarrow \infty$, în sensul normei spațiului V $[0, 1]$. Vom arăta că are loc convergența uniformă

$$G_n(x) \rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in [0, 1].$$

Considerăm conul K definit la începutul acestui punct. Notăm cu K^+ conul convex al funcțiilor pozitive din spațiul $C^0[0, 1]$. Aplicația ψ_{m+1} a conului convex

$$\mathcal{K}_{m+1} = K^+ \times K$$

în spațiul $C^0[0, 1]$ definită prin formula

$$\psi_{m+1} : (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m+1}) \mapsto \sigma_1(x) \int_0^x d\sigma_2(x) \dots \int_0^x d\sigma_{m+1}(x)$$

$x \in [0, 1]$, este o aplicație continuă. Acest lucru rezultă din lema 1 și continuitatea operației de produs în algebra funcțiilor continue. Vom nota cu ψ aplicația $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ a lui $\mathcal{K}_n$ în spațiul C_n^0 .

Din rezultatul lui M. A. Rutman, citat mai sus, rezultă egalitatea

$$\mathcal{K}^0 = p \circ \psi(\mathcal{K}_n).$$

Mulțimea $\mathcal{K}_n$ fiind convexă în spațiul liniar normat

$$C^0[0, 1] \times V, \quad (m = n - 1)$$

rezultă că $\mathcal{K}^0$ fiind imaginea continuă a lui $\mathcal{K}_n$, este o mulțime conexă prin arce.

Trecem acum la demonstrarea punctului (i). Pentru aceasta vom arăta că orice punct L din mulțimea $\mathcal{C}^0$ poate fi unit printr-un arc din această mulțime cu un punct din mulțimea $\mathcal{K}^0$, de unde, pe baza conexității prin arce a mulțimii $\mathcal{K}^0$ demonstrate mai sus, rezultă afirmația (i). Vom folosi ideea folosită de noi în [6], la demonstrarea Lemei 4 și Teoremei 6. Fie $f_1, f_2, \dots, f_n$ o bază oarecare a spațiului lui Cebîșev L și fie a un punct fixat din intervalul $(0, 1)$. Considerăm aplicația

$$x = (1 - \lambda a)y + \lambda a \quad y \in [0, 1],$$

unde λ este un număr dat cu proprietatea $0 \leq \lambda \leq 1$, aplicație a mulțimii $[0, 1]$ pe mulțimea $[\lambda a, 1]$. Sistemul de funcții

$$f_1((1 - \lambda a)y + \lambda a), f_2((1 - \lambda a)y + \lambda a), \dots, f_n((1 - \lambda a)y + \lambda a)$$

formează un sistem al lui Cebîșev pentru y din $[0, 1]$, deoarece aplicația dată mai sus este un omeomorfism între mulțimile $[0, 1]$ și $[\lambda a, 1]$ și astfel funcțiile de y considerate mai sus pot fi privite ca restricții ale funcțiilor f_i la intervalul $[\lambda a, 1]$. Fie $h_{i,\lambda}(x) = f_i((1 - \lambda a)x + \lambda a)$, $x \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Din continuitatea uniformă pe intervalul $[0, 1]$ a funcțiilor f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, rezultă că mulțimea $\tau = \{(h_{1,\lambda}, h_{2,\lambda}, \dots, h_{n,\lambda}) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ constituie un arc în mulțimea $p^{-1}(\mathcal{C}^0)$. Deoarece mulțimile $[0, \lambda a]$ pentru $\lambda > 0$ au o infinitate de puncte, din [6], Lema 4 rezultă că sistemul de funcții $f_1, f_2, \dots$

... f_n restrinse la intervalul $[\lambda a, 1]$ generează un spațiu al lui Cebîșev avînd o bază a lui Markov. Deci sistemul de funcții $h_{1,\lambda}, h_{2,\lambda}, \dots, h_{n,\lambda}$ generează un spațiu al lui Cebîșev avînd bază a lui Markov pentru orice $0 < \lambda \leq 1$. Rezultă că $p(\tau)$ este un arc care unește punctul L cu un punct din mulțimea $\mathfrak{M}^0$ și chiar mai mult, că toate punctele acestui arc, exceptînd eventual L , se află în $\mathfrak{M}^0$, de unde rezultă afirmațiile (i) și (iv) (această din urmă fiind de fapt identică cu teorema 6 din [6]).

Vom arăta acum că $\text{int } \mathcal{C}^0 = \emptyset$. Fie L un punct oarecare din mulțimea $\mathcal{C}^0$ și fie funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$ o bază a spațiului L . Presupunem pe $\varepsilon > 0$ dat și determinăm pe $0 < \delta_\varepsilon < 1$ în așa fel, încît să avem $|f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon$ ori de cîte ori $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$. Definim funcțiile $g_1, g_2, \dots, g_n$ pe $[0, 1]$, punînd $g_i(x) = f_i(\delta_\varepsilon)$ pentru x din intervalul $[0, \delta_\varepsilon]$ și $g_i(x) = f_i(x)$ pentru restul punctelor x din $[0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Avem în mod evident $(g_1, g_2, \dots, g_n) \in L^0 \setminus p^{-1}(\mathcal{C}^0)$, și cum $|f_i(x) - g_i(x)| < \varepsilon$, pentru ε ales arbitrar, rezultă că în orice vecinătate a punctului $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ din $p^{-1}(\mathcal{C}^0)$ există puncte din $L^0 \setminus p^{-1}(\mathcal{C}^0)$. Folosind acum continuitatea aplicației p rezultă afirmația (iii).

Presupunem acum că punctul $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ din L^0 are proprietatea enunțată la punctul (v). Vom arăta că spațiul L generat de funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$ aparține aderenței mulțimii $\mathcal{C}^0$. Fie $\varepsilon > 0$ un număr dat și $0 < \delta_\varepsilon < 1/2$ astfel ales, încît $|f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon$ dacă $|x' - x''| \leq \delta_\varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$. Considerăm aplicația

$$x = (1 - 2\delta_\varepsilon)y + \delta_\varepsilon, \quad y \in [0, 1],$$

a intervalului $[0, 1]$ pe intervalul $[\delta_\varepsilon, 1 - \delta_\varepsilon]$, care este un omeomorfism. Funcțiile

$$g_i(x) = f_i((1 - 2\delta_\varepsilon)x + \delta_\varepsilon), \quad x \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

formează un sistem al lui Cebîșev. Avem totodată

$$|f_i(x) - g_i(x)| = |f_i(x) - f_i((1 - 2\delta_\varepsilon)x + \delta_\varepsilon)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

deoarece $|x - (1 - 2\delta_\varepsilon)x - \delta_\varepsilon| = |2x - 1| \delta_\varepsilon \leq \delta_\varepsilon$, de unde rezultă, aplicînd un raționament asemănător cu cel de la aliniatul precedent, că L aparține aderenței lui $\mathcal{C}^0$.

Cu aceasta teorema 1 a fost în întregime demonstrată.

4. Demonstrația teoremei 2. În linii mari vom urma calea de la demonstrația teoremei 1. Vom demonstra înainte de toate următoarea leamă:

LEMA 2. *Considerăm spațiul liniar normal*

$C^n[0, 1] \times C^{n-1}[0, 1] \times \dots \times C^{n-m+1}[0, 1]$, unde $n - m + 1 > 0$. Fie K conul din acest spațiu format din elementele $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$, unde $\delta_i(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Aplicația definită prin integrala

$$\Psi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m; x) = \int_0^x \delta_1(x) dx \int_0^x \delta_2(x) dx \dots \int_0^x \delta_m(x) dx,$$

a conului K în $C^{n+1}[0, 1]$ este continuă.

Prin formula din lema 2 înțelegem integrare repetată în ordinea inversă a indexării.

Demonstrație. Pentru $m = 1$ și $n \geq 1$ oarecare afirmația este evidentă. Presupunem lema adevărată pentru $m - 1$ și o vom demonstra pentru m (n se presupune oarecare, $n \geq m$). Are loc identitatea

$$\begin{aligned} \Psi^{(j)}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m; x) - \Psi^{(j)}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m; x) = \\ = \left(\int_0^x (\delta_1(x) - \gamma_1(x)) dx \int_0^x \delta_2(x) dx \dots \int_0^x \delta_m(x) dx \right)^{(j)} + \\ + \left(\int_0^x \gamma_1(x) dx \left(\int_0^x \delta_2(x) dx \dots \int_0^x \delta_m(x) dx - \int_0^x \gamma_2(x) dx \dots \int_0^x \gamma_m(x) dx \right) \right)^{(j)}. \end{aligned}$$

Aplicind la termenii acestei sume formula de derivare a produsului (indicele j din formula de mai sus se consideră ordin de derivare), folosind unele evaluări clasice din calculul integral, rezultă lema.

Vom avea nevoie de următoarea propoziție, care rezultă din teoremele II și IV demonstrate de G. Pólya în lucrarea [8], folosind un rezultat al lui O. Aramă [2] privind forma intervalului maximal de interpolare cu soluții ale ecuațiilor diferențiale ordinare, liniare, de formă normală și cu coeficienți continui:

Condiția necesară și suficientă pentru ca subspațiul n -dimensional L din $C^n[0, 1]$ să aibă proprietatea I_n^ , este ca să posedă o bază $f_1, f_2, \dots, f_n$, avînd proprietatea*

(1) $W(f_1; x) > 0$, $W(f_1, f_2; x) > 0, \dots, W(f_1, f_2, \dots, f; x) > 0$, $x \in [0, 1]$, unde cu $W(f_1, f_2, \dots, f_i; x)$ am notat valoarea în punctul x al wronskianului funcțiilor $f_1, f_2, \dots, f_i$.

Vom folosi de asemenea următorul rezultat aparținînd lui O. Aramă [1]:

Subspațiul n -dimensional L din spațiul liniar $C^n(0, 1)$ are proprietatea I_n^ , dacă și numai dacă posedă o bază care satisface condiția (i) din definiția 2 pentru $m = 1$ și $m = n$.*

Punctul (i) al teoremei noastre rezultă din teorema lui Pólya enunțată mai sus. Într-adevăr, dacă au loc inegalitățile (1), atunci pe baza acestei teoreme rezultă că funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$ formează un șir al lui Cebîșev — Markov cu proprietatea I_n^* , deci orice element din $\mathcal{K}$ este și element din $\mathcal{M}^n$. Incluziunea inversă avînd loc prin definiție, rezultă egalitatea celor două mulțimi. Din continuitatea operatorilor $W(f_1, f_2, \dots, f_i; x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, rezultă, ținînd cont de inegalitățile (1), că pentru funcții din $C^n[0, 1]$ destul de apropiate de funcțiile f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, aceste inegalități au de asemenea loc, deci și aceste funcții for-

mează un sistem cu proprietatea I_n^* . Ne rămîne acum să aplicăm un raționament simplu pentru a deduce că mulțimea $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{K}$ este deschisă în $\mathfrak{L}^*$. Acest raționament se bazează pe faptul că proiecția canonică p este o aplicație deschisă.

Amintim că faptul că mulțimea $\mathfrak{M}^*$ este deschisă în $\mathfrak{L}^*$ se poate demonstra și fără a face uz de teorema lui Pólya, aplicînd următoarea condiție necesară și suficientă pentru ca un sistem de n funcții din $C^*[0,1]$ să formeze sistem cu proprietatea I_n^* :

Condiția necesară și suficientă pentru ca funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$ din $C^[0,1]$ să formeze un sistem al lui Cebîșev cu proprietatea I_n^* este ca să avem*

$$\det \| [x_1, x_2, \dots, x_j; f_i] \|_{i,j=1,2,\dots,n} \neq 0,$$

oricare ar fi punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$ din $[0,1]$, unde cu $[x_1, x_2, \dots, x_j; f]$ s-a notat diferența divizată a funcției f pe nodurile $x_1, x_2, \dots, x_j$.

Pentru demonstrarea punctului (iii) din teorema 2, presupunem că L este un punct din $\mathfrak{M}^*$. Conform cu Teorema 1.2. cap. XI din cartea lui S. Karlin și W. Studden [5], L posedă o bază $f_1, f_2, \dots, f_n$ cu proprietatea că

$$f_1(x) = \delta_1(x),$$

$$f_2(x) = \delta_1(x) \int_0^x \delta_2(x) dx,$$

$$f_3(x) = \delta_1(x) \int_0^x \delta_2(x) dx \int_0^x \delta_3(x) dx,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_n(x) = \delta_1(x) \int_0^x \delta_2(x) dx \dots \int_0^x \delta_n(x) dx,$$

unde δ_i este element din conul convex al funcțiilor pozitive al spațiului $C^{n-i+1}[0,1]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Repetînd acum raționamentul folosit la demonstrarea teoremei 1, punctul (ii) făcînd uz aici de rezultatul mai sus citat și lema 2, demonstrația rezultă.

Pentru a demonstra punctul (ii), observăm că în conformitate cu teorema lui O. Aramă citată mai sus, dacă funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$ din spațiul $C^n[0,1]$ satisfac condiția (i) din definiția 2, pentru $m = 1$ și $m = n$, atunci au proprietatea I_n^* pe intervalul $(0,1)$. Fie acum $0 < \alpha < \beta < 1$ și fie

$$(2) \quad x = ((1 - y) \alpha + y \beta) \lambda + (1 - \lambda) y, \quad y \in [0, 1]$$

o aplicație a intervalului $[0, 1]$ pe intervalul $[\alpha, \beta]$ pentru $\lambda = 1$, care pentru orice $0 < \lambda \leq 1$ transformă pe $[0, 1]$ într-un interval conținut în

(0,1). Cum aplicația (2) este un omeomorfism de clasă C^∞ (deci și de clasă C^n) a lui $[0,1]$ pe $[\alpha\lambda, \beta\lambda + 1 - \lambda]$, rezultă că funcțiile

$$g_{i,\lambda}(x) = f_i(((1-x)\alpha + x\beta)\lambda + (1-\lambda)x), \quad x \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

care pot fi considerate restricțiile funcțiilor f_i la intervalul $[\alpha\lambda, \beta\lambda + 1 - \lambda]$, formează un sistem de funcții avînd proprietatea I_n^* . Fie $\tau = \{(g_{1,\lambda}, g_{2,\lambda}, \dots, g_{n,\lambda}) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Atunci $p(\tau)$ este un arc din mulțimea $\mathcal{C}^n$, care unește punctul L (spațiul generat de funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$), cu un punct din $\mathcal{M}^n$, de unde rezultă punctul (ii) al teoremei. Din metoda aplicată rezultă în același timp și punctul (iv).

Vom arăta acum că în orice vecinătate a punctului $L \in \mathcal{C}^n \setminus \mathcal{M}^n$ există puncte din mulțimea $\mathcal{E}^n \setminus \mathcal{C}^n$, de unde, folosind punctul (iv) rezultă (v). Prolungim funcțiile f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ care formează o bază a lui L , pe intervalul $[\alpha, \beta]$, unde $[0, 1] \subset (\alpha, \beta)$, astfel ca ele să aibă derivate de ordin n continue pe $[\alpha, \beta]$. Fie $\varepsilon > 0$ un număr dat și fie $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ales, încît $|f_i^{(j)}(x') - f_i^{(j)}(x'')| < \varepsilon/2$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, dacă $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$, $x', x'' \in [\alpha, \beta]$. Fie $|1 - (\beta - \alpha)| + |\alpha| < \delta_\varepsilon$ și punem

$$g_i(x) = f_i((\beta - \alpha)x + \alpha), \quad x \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Aplicația $y = (\beta - \alpha)x + \alpha$ este un omeomorfism derivabil de orice ordin a intervalului $[0,1]$ pe intervalul $[\alpha, \beta]$. Funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$, formînd o bază a spațiului L , satisfac condiția (i) din definiția 2, pentru $m = 1$ și $m = n$, dar nu au această proprietate pe nici un interval de forma $[\alpha, \beta]$, deoarece în caz contrar, ar urma, pe baza teoremei lui O. Aramă că ele au proprietatea I_n^* pe intervalul (α, β) , deci și pe intervalul $[0,1]$, în contradicție cu ipoteza noastră făcută asupra spațiului L . Avem în același timp

$$\begin{aligned} |f_i^{(j)}(x) - g_i^{(j)}(x)| &= |f_i^{(j)}(x) - (\beta - \alpha)^j f_i^{(j)}((\beta - \alpha)x + \alpha)| \leq \\ &\leq |f_i^{(j)}(x) - f_i^{(j)}((\beta - \alpha)x + \alpha)| + |f_i^{(j)}((\beta - \alpha)x + \alpha)| |1 - (\beta - \alpha)^j| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + M |1 - (\beta - \alpha)^j|, \end{aligned}$$

unde $M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f_i^{(j)}(x)|$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, n$. Fie acum α atît de aproape de 0 și β atît de aproape de 1, încît să avem $|1 - (\beta - \alpha)^n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Atunci vom avea

$$|f_i^{(j)}(x) - g_i^{(j)}(x)| < \varepsilon,$$

$i = 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, n$, de unde, aplicînd faptul că p este aplicație continuă, rezultă punctul (v) al teoremei.

Cu aceasta teorema 2 a fost în întregime demonstrată.

Primit la redacție la 28.02.1970

Institutul de calcul, Cluj

CONTINUOUS TRANSFORMATIONS OF THE CHEBYSHEV SPACES AND OF THE CHEBYSHEV SPACES WITH THE PROPERTY I_n^*

(ABSTRACT)

By a factorization of the n^{th} Cartesian product of the spaces $C^0[0, 1]$, respective $C^n[0, 1]$ it is introduced a natural topology in the set $\mathfrak{L}^0$, respective $\mathfrak{L}^n$ of all n -dimensional subspaces of these spaces. The following notations are introduced: $\mathfrak{D}$ is the subset of $\mathfrak{L}^n$ of the subspaces in $C^n[0, 1]$ which are solution spaces for linear, homogeneous, normal form differential equations with continuous coefficients on $[0, 1]$. Denote by $\mathfrak{C}^0$ the subset of Chebyshev spaces in $\mathfrak{L}^0$, by $\mathfrak{M}^0$ the subset in $\mathfrak{C}^0$ of Chebyshev spaces having Markov bases. Denote by $\mathfrak{C}^n$ the subset in $\mathfrak{D}$ of the Chebyshev spaces, by $\mathfrak{M}^n$ the subset in $\mathfrak{C}^n$ of the Chebyshev spaces having the property I_n^* (i.e., the spaces in which any Hermite-type interpolation problem is solvable). The following results are obtained:

- In $\mathfrak{L}^0$:
- (i) The set $\mathfrak{C}^0$ is pathwise connected.
 - (ii) The set $\mathfrak{M}^0$ is pathwise connected.
 - (iii) $\mathfrak{M}^0$ is dense in $\mathfrak{C}^0$.
 - (iv) $\text{int } \mathfrak{C}^0 = \emptyset$ (in $\mathfrak{L}^0$).
- In $\mathfrak{L}^n$:
- (i) The set $\mathfrak{C}^n$ is pathwise connected.
 - (ii) The set $\mathfrak{M}^n$ is pathwise connected.
 - (iii) The set $\mathfrak{M}^n$ is dense in $\mathfrak{C}^n$.
 - (iv) The set $\mathfrak{M}^n$ is open in $\mathfrak{L}^n$.

BIBLIOGRAFIE

1. ARAMĂ O., *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuații diferențiale lineare*. St. și cerc. mat. (Cluj) **10**, 207 — 257 (1959).
2. „ *Intervale de neoscilație la ecuații diferențiale lineare*. St. și cerc. mat. (Cluj) **13**, 213 — 239 (1962).
3. FIHTENHOLT, G. M., *Curs de calcul diferențial și integral*. Ed. Tehnică, București, 1964, III.
4. KAMKE, E., *Das Lebesgue — Stieltjes Integral*, Ed. B. G. Teubner, Leipzig, 1956.
5. KARLIN, S. și W. STUDDEN, *Tschebycheff Systems with Applications in Analysis and Statistics*. Interscience, New York, 1966.
6. NÉMETH A. B., *Transformation of the Chebychev systems*. Mathematica, **8** (31), 315 — 333 (1966).
7. „ *Differentiable n -parameter families*. Rev. Rom. Math. Pure Appl., **15**, 111 — 118 (1970).
8. PÓLYA G., *On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation*. Trans. Amer. Math. Soc. **24**, 312 — 324 (1922).
9. ПОРОВИЦУ, Т., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur I*. Mathematica, **22**, 81 — 92 (1936).
10. „ *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur II*. Mathematica, **22**, 227 — 233 (1936).
11. „ *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur IX*. Bull. Math. Soc. Roum. Sci., **43**, 83 — 141 (1941).
12. РУТМАН, М. А., *Интегральное представление функций образующих ряд Маркова*. Докл. Акад. Наук СССР, **164**, 989—992 (1965).