

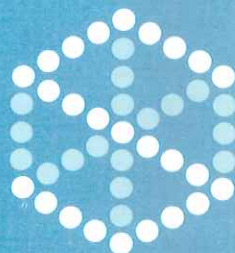
SEMA (Metra International)
direction scientifique

35, boulevard Brune Paris 14^e téléphone 842 60 00



SEMA (Metra International)
direction scientifique

35, boulevard Brune Paris 14^e téléphone 842 60 00



SEMA (Metra International)

Société anonyme au capital de 18 193 300 F

Siège Social : 13/15, rue des Sablons Paris 16^e

téléphone : 704 85 10 - 553 17 54

RC SEINE 64 B 509 INSEE 818 75 116 0 149

DIRECTION SCIENTIFIQUE

Note de Travail n° 157

Août 1971

SUR QUELQUES PROBLEMES D'AFECTATION

I.S. TIGAN

SEMA (Metra International)
35, Bd Brune - Paris 14ème

0 - RESUME

Dans cette note on présente un algorithme de résolution du "problème d'affectation monotone" (problème d'optimisation dont les contraintes sont celles du problème d'affectation classique mais dont la fonction objective est une fonction monotone non linéaire).

Cet algorithme est bâti à partir d'une méthode de résolution des programmes monotones à contraintes linéaires et variables continues que l'on présentera tout d'abord et qui est une variante de la méthode du Kucker [3] .

Cet algorithme d'affectation monotone est itératif, chaque itération consistant à résoudre un problème d'affectation linéaire classique. La solution optimale sera obtenue après un nombre fini d'itérations.

L'approche s'applique en particulier au "problème d'affectation rationnel" (problème d'affectation dont la fonction objective est le quotient de deux formes linéaires).

L'algorithme 3 pour le problème d'affectation rationnel (ou hyperbolique) s'apparente avec celui obtenu dans [5] pour la programmation hyperbolique en variables bivalentes.

I - INTRODUCTION

On considère le problème suivant :

$$(1) \max f(X)$$

où $X = (X_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$) vérifient les conditions :

$$(2) \sum_{i=1}^n X_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(3) \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(4) X_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(5) X_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, n)$$

Nous appellerons le problème (1) - (5) : problème d'affectation monotone si $f(X)$ est une fonction monotone* sur le domaine convexe D défini par les contraintes (2), (3) et (4).

Pour résoudre le problème d'affectation monotone nous employerons quelques résultats de la programmation monotone continue, résultats que nous allons rappeler. Pour exposer ces résultats nous considérerons le problème de programmation monotone (continue) suivant :

$$(6) \max g(y)$$

sous les conditions :

$$(7) \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(8) y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

où $g(y)$ est une fonction monotone et différentiable sur le domaine convexe G,

* Une fonction $g(X)$ est appelée monotone sur un domaine convexe $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si, quels que soient les points X^1, X^2 de K, on a :

$$\min \{g(X^1), g(X^2)\} \leq g(\lambda X^1 + (1 - \lambda) X^2) \leq \max \{g(X^1), g(X^2)\}$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

défini par les contraintes (7), (8), et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit :

$$(9) \quad \bar{g}(\bar{y}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(\bar{y})}{\partial y_j} \cdot y_j \equiv \nabla g(\bar{y}) \cdot y,$$

où $\bar{y}$ est un point extrémal de l'ensemble convexe G et $\nabla g(\bar{y}) = (\frac{\partial g(\bar{y})}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g(\bar{y})}{\partial y_n})$.

Alors on a les théorèmes suivants :

Théorème 1 : Si la fonction monotone g est deux fois continuellement différentiable sur le domaine G et si le point $\bar{y}$ de G est tel que :

$$(10) \quad \bar{g}(\bar{\bar{y}}) > \bar{g}(\bar{y}),$$

alors :

$$g(\bar{\bar{y}}) > g(\bar{y}).$$

La démonstration de ce théorème est analogue à la démonstration du théorème 1 de [3], et elle se base sur la formule de Taylor pour la fonction g au voisinage du point $\bar{X}$ et sur la monotonie de la fonction g .

En effet, soit :

$$(11) \quad y = \bar{y} + \theta(\bar{\bar{y}} - \bar{y})$$

où : $\theta \in [0, 1]$.

De la formule de Taylor, (9) et (11) on a :

$$\begin{aligned} (12) \quad g(y) - g(\bar{y}) &= \theta(\bar{\bar{y}} - \bar{y}) \cdot \nabla g(\bar{y}) + \theta^2 d^2 g(\zeta) = \\ &= \theta [\bar{\bar{y}} \cdot \nabla g(\bar{y}) - \bar{y} \cdot \nabla g(\bar{y})] + \theta^2 d^2 g(\zeta) = \\ &= \theta [\bar{g}(\bar{\bar{y}}) - \bar{g}(\bar{y})] + \theta^2 d^2 g(\zeta), \end{aligned}$$

où :

$$\zeta = \bar{y} + \mu(y - \bar{y})$$

et :

$$\mu \in [0, 1].$$

De (10) et (12), il résulte que pour θ assez petit, on a :

$$g(y) - g(\bar{y}) > 0$$

ou :

$$g(y) > g(\bar{y})$$

d'où vue la monotonie de la fonction g , on tire :

$$g(\bar{\bar{y}}) \geq g(y) > g(\bar{y}),$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème 2 : Si la fonction monotone g est de deux fois continuellement différentiable sur G ; si :

$$\nabla g(\bar{y}) \neq 0$$

et si on a de plus :

$$(13) \quad \max_{y \in G} \bar{g}(y) = \bar{g}(\bar{y}),$$

alors la solution $\bar{y}$ est une solution optimale pour le problème de programmation monotone (6) - (8).

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 2 de [3] .

Les théorèmes qui viennent d'être exposés nous permettront d'obtenir un algorithme pour la programmation monotone continue, que nous pourrions employer, en particulier, pour le problème d'affectation monotone.

II - ALGORITHME 1 (POUR LE PROBLEME DE PROGRAMMATION MONOTONE CONTINUE)

1° Déterminer une solution initiale y^1 admissible pour le problème (6) - (8).

2° Poser $\bar{y} := y^1$

3° Calculer le vecteur $\nabla g(\bar{y}) = (\frac{\partial g(\bar{y})}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g(\bar{y})}{\partial y_n})$.

4° Déterminer si la solution $\bar{y}$ est solution optimale pour le problème de programmation linéaire :

$$(14) \quad \max_{y \in G} \bar{g}(y)$$

Si la condition (13) est remplie, alors y est solution optimale pour le problème (6) - (8).

Sinon, on passe à 5°.

5° Déterminer une solution optimale $\hat{y}$ pour le problème (10).

6° Poser $\bar{y} := \hat{y}$ et passer à 3°.

Le théorème 3 que nous allons présenter donne des conditions suffisantes pour que l'algorithme 1 pour la programmation monotone continue converge en un nombre fini d'itérations.

Théorème 3 : Si la fonction monotone g est deux fois continuellement différentiable sur G , si l'on a :

$$(15) \quad \nabla g(y) \neq 0$$

en chaque point extrémal y de l'ensemble G , et si le domaine G est borné, alors l'algorithme 1 détermine une solution optimale du problème (6) - (8) après un nombre fini d'itérations.

Le théorème 3 résulte immédiatement des théorèmes 1 et 2.

III - ALGORITHME 2 (POUR LE PROBLEME D'AFFECTION MONOTONE)

En partant de l'algorithme 1, pour le problème de programmation monotone continue, et du fait que les solutions extrémales du problème (1) - (4) (continue) sont entières, on peut obtenir tout de suite un algorithme pour le problème d'affectation monotone (1) - (5), qui converge après un nombre fini d'itérations si la fonction f est deux fois continuellement différentiable, et si $\nabla f(X) \neq 0$ pour tout X solution admissible pour le problème (1) - (5).

1° Déterminer une solution admissible initiale X^1 pour le problème (1) - (5).

2° Poser $\bar{X} := X^1$

3° Calculer la matrice

$$\bar{C} = [\bar{C}_{ij}]$$

où

$$\bar{C}_{ij} = \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial X_{ij}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, n).$$

4° Si $\bar{X}$ est solution optimale pour le problème d'affectation linéaire suivant : maximiser la fonction :

$$(12) \quad f(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{C}_{ij} X_{ij}$$

sous les conditions (2) - (5);

alors $\bar{X}$ est une solution optimale pour le problème d'affectation monotone et l'algorithme s'arrête.

Sinon, on passe à 5°.

5° Déterminer une solution optimale $\hat{X}$ pour le problème d'affectation (12), (2) - (5).

6° Poser $\bar{X} := \hat{X}$ et passer à 3°.

IV - APPLICATION : ALGORITHME POUR LE PROBLEME D'AFFECTATION RATIONNEL
(ALGORITHME 3)

L'algorithme 2, qui vient d'être exposé peut être transcrit avec une petite modification pour le problème d'affectation rationnel, qui consiste à maximiser la fonction :

$$(13) \quad R(X) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} X_{ij}}$$

sous les conditions (2) - (5).

Si on suppose que pour tout $X = [X_{ij}]$ qui vérifie les conditions (2) - (5), on a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} X_{ij} \neq 0,$$

alors on peut montrer facilement que la fonction (13) satisfait les conditions de convergence de l'algorithme 2.

L'algorithme 3 sera formellement identique à l'algorithme 2, si à l'étape 3° on porte :

$$(14) \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} Z_2(\bar{X}) - d_{ij} Z_1(\bar{X}),$$

$$\text{où } Z_1(\bar{X}) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \bar{X}_{ij} \quad \text{et} \quad Z_2(\bar{X}) = \sum_{i,j=1}^n d_{ij} \bar{X}_{ij}.$$

La modification qui intervient à cette étape résulte du fait que :

$$\frac{\partial R(\bar{X})}{\partial X_{ij}} = \frac{c_{ij} Z_2(\bar{X}) - d_{ij} Z_1(\bar{X})}{(Z_2(\bar{X}))^2}$$

et alors l'optimisation de la fonction :

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial R(X)}{\partial X_{ij}} X_{ij} = \frac{1}{(Z_2(\bar{X}))^2} \sum_{i,j=1}^n [c_{ij} Z_2(\bar{X}) - d_{ij} Z_1(\bar{X})] X_{ij}$$

est équivalente de l'optimisation de la fonction :

$$\sum_{i,j=1}^n [c_{ij} Z_2(\bar{X}) - d_{ij} Z_1(\bar{X})] X_{ij}$$

V - REMARQUES

1. Les solutions intermédiaires qui doivent être construites par l'algorithme 2 étant des solutions primales réalisables, on pourra facilement passer de l'une à la suivante en employant dans les étapes 4° et 5° la condition

d'optimalité et l'algorithme primal Balinski-Gomory 1 (pour le problème d'affectation linéaire).

2. On peut obtenir une autre variante de l'algorithme 2 en remplaçant l'étape 5° par la suivante :

Déterminer pour le problème (12), (2) - (5) une solution admissible $\hat{X}$ (par l'algorithme Balinski-Gomory) tel que $\bar{f}(\hat{X}) > f(\bar{X})$.

VI - EXEMPLE

On considère le problème d'affectation rationnel (13), qui a les matrices des coefficients suivantes :

$$C = [c_{ij}] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 10 & 12 & 5 & 14 & 7 \\ \hline 8 & 10 & 12 & 5 & 13 \\ \hline 7 & 6 & 9 & 3 & 8 \\ \hline 13 & 14 & 12 & 14 & 18 \\ \hline 4 & 5 & 8 & 13 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$D = [d_{ij}] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 17 & 9 & 3 & 10 & 11 \\ \hline 2 & 15 & 14 & 18 & 16 \\ \hline 13 & 12 & 15 & 10 & 11 \\ \hline 14 & 17 & 20 & 10 & 9 \\ \hline 10 & 8 & 4 & 9 & 13 \\ \hline \end{array}$$

Itération 1 : On part avec la solution initiale :

$$X^1 = [x_{ij}^1]$$

où

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On a

$$R(X^1) = \frac{50}{70}$$

Alors, en utilisant la formule (14) avec $\bar{X} = X^1$, on obtient :

$$\bar{c}^1 = [\bar{c}_{ij}^1] =$$

-150	390	200	480	-60
460	-50	140	-550	110
-160	-180	-120	-290	10
210	130	-160	480	810
-220	-50	360	460	-160

Puis, pour le problème d'affectation linéaire avec la fonction à maximiser :

$$z^1(x) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \bar{c}_{ij}^1 x_{ij},$$

on obtient la solution optimale suivante :

$$x^2 = [x_{ij}^2]$$

où

$$x_{12}^2 = x_{21}^2 = x_{33}^2 = x_{45}^2 = x_{54}^2 = 1$$

les autres variables étant nulles.

On voit que :

$$R(x^2) = \frac{60}{44} > R(x^1).$$

Itération 2 : En posant $\bar{x} = x^2$, on obtiendra de même :

$$\bar{c}^2 = [\bar{c}_{ij}^2] =$$

-580	-12	40	16	-352
232	-460	-312	-860	-388
-472	-456	-504	-468	-308
-268	-604	-672	16	252
-424	-260	112	32	-472

d'où la solution :

$$x^3 = [x_{ij}^3]$$

$$\text{où } x_{14}^3 = x_{21}^3 = x_{32}^3 = x_{45}^3 = x_{53}^3 = 1,$$

les autres variables étant nulles.

On a :

$$R(x^3) = \frac{54}{37} > R(x^2).$$

Itération 3 : Avec $\bar{X} = X^3$, on obtient :

$$\bar{C}^3 = [\bar{C}_{ij}^3] =$$

-548	-42	23	-22	-335
188	-440	-312	-787	-383
-443	-426	-477	-429	-298
-275	-400	-636	-22	180
-392	-247	80	-5	-443

et puisque :

$$Z^3(X^3) = \max_X Z^3(X)$$

il résulte que X^3 est une solution optimale pour le problème d'affectation rationnel initial (X est une solution admissible quelconque pour le problème d'affectation considéré).

REFERENCES

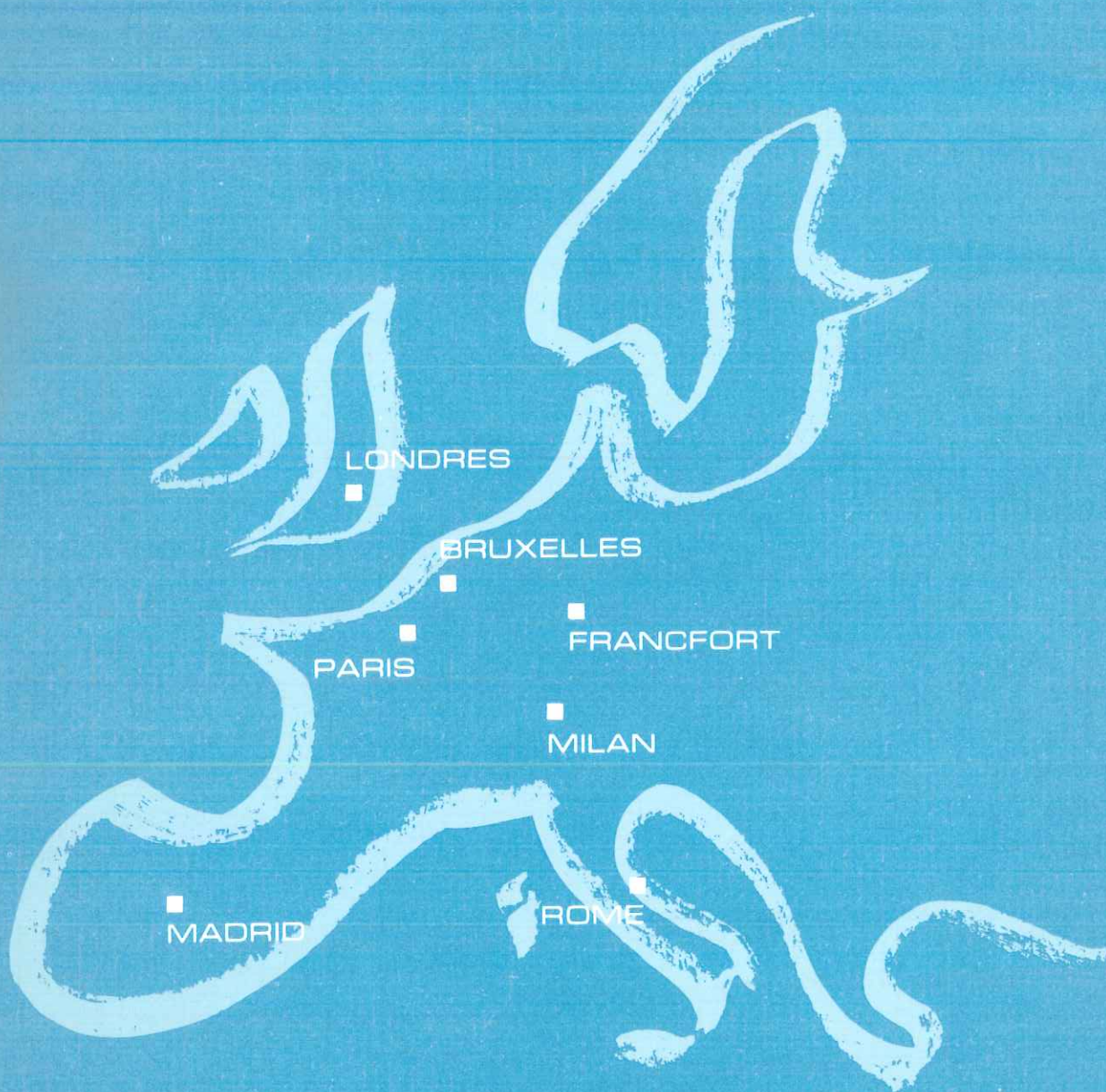
- [1] M.B. BALINSKI, R.E. GOMORY
A primal method for the Assignment and Transportation Problems
Management Science - Vol. 10, N° 3, 1964, p 578-593

- [2] C.A. KASYANYUK, B.M. KUCHER
Pro monotone programuvania
DANU, N° 1, 1967

- [3] B.M. KUCHER
Pro odin algoritm risenia zadaci monotovo programuvania
DANU, N° 10, 1967

- [4] B. MARTOS
The direct power of adjacent vertex programming methods
Management Science - Vol. 12, N° 3, November, 1965, p. 241-252

- [5] M. FLORIAN, P. ROBILLARD
Programmation hyperbolique en variables bivalentes
RIRO, 5è année, N° V-1, 1971, p. 1-9



LONDRES



BRUXELLES



PARIS



FRANCFORT



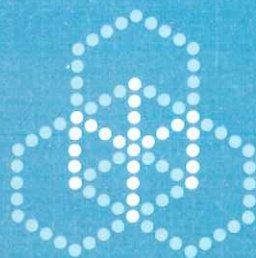
MILAN



MADRID



ROME



METRA INTERNATIONAL

BRUXELLES · FRANCFORT LONDRES MADRID MILAN NEW YORK PARIS ROME