

[6]

**STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ
APLICATĂ**

EXTRAS

2

TOMUL 33

1974

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

O METODĂ A MICILOR PERTURBAȚII PENTRU ECUAȚIA STRATULUI-LIMITĂ

de DOINA BRĂDEANU
Universitatea din Cluj

Se introduce o metodă a micilor perturbații pentru ecuația lui Mises din teoria stratului-limită incompresibil de fluid viscos. Se determină transformarea de coordonate și ecuațiile aproximațiilor de ordinele zero și unu. Se analizează problema calculului soluției inițiale, necesară în folosirea metodelor numerice.

Notății

- | | |
|--------------------------------|---|
| $\bar{x}, \bar{\psi}$ | — variabilele lui Mises; $\bar{x}$ se măsoară pe meridiană corpului, $\bar{\psi}$ este funcția de curent, |
| $\bar{u}(\bar{x}, \bar{\psi})$ | — viteza în direcția $\bar{x}$ din interiorul stratului-limită, |
| $\bar{u}_1(\bar{x})$ | — viteza scurgerii exterioare stratului-limită plan, |
| y | — ordonata măsurată pe normala la suprafața corpului, |
| $\delta(\bar{x})$ | — grosimea stratului-limită, |
| $\bar{\psi}_\infty$ | — valoarea funcției de curent pentru $y = \delta$; $\bar{\psi}_\infty = \bar{\psi}(\bar{x}, \delta)$, |
| ν, μ | — viscozitatea cinematică și viscozitatea dinamică, |
| ρ | — densitatea fluidului, |
| ε | — parametrul de perturbație, |
| α, β | — variabile independente (vezi (2)–(3)–(6)), |
| L | — o lungime caracteristică (de referință), |
| u_∞ | — viteza de la infinit ($\vec{u}_\infty = \text{const.}$), |
| W_0 | — funcție definită cu formula (15), |
| W_1 | — funcție definită cu formula (24), |
| c_0, c_1, C_0, C_1 | — constante în expresiile vitezei exterioare din vecinătatea punctului critic, |
| 0, 1 | — indici pentru aproximația de ordinul zero și ordinul întâi. |

METODA MICILOR PERTURBAȚII PENTRU ECUAȚIA LUI MISES

1.1. *Ecuatiile perturbațiilor.* Ecuatia stratului-limită dinamic incompresibil în raport cu variabilele lui Mises $(\bar{x}, \bar{\psi})$, unde $\bar{\psi}$ este funcția de curent, are următoarea formă parabolică [2], [3]:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \bar{u}_1 \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{x}} + \nu \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\psi}} \right) \quad (1)$$

$$(0 \leq \bar{x}^0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_1; \quad 0 < \bar{\psi} < \infty, \psi_\infty),$$

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{u}(\bar{x}, \bar{\psi}_\infty) = \bar{u}_1(\bar{x}), \quad \bar{x}^0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_1,$$

cu condiția inițială

$$\bar{u}(\bar{x}^0, \bar{\psi}) = \bar{u}^0(\bar{\psi}), \quad 0 \leq \bar{\psi} \leq \bar{\psi}_\infty. \quad (1')$$

Se presupune că abscisa curbilinie $\bar{x}$, variabila $\bar{\psi}$ și viteza $\bar{u}_1(\bar{x})$ a scurgerii exterioare se pot reprezenta în forma următoarelor serii de puteri:

$$\bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\alpha) \varepsilon^n = x_0 + \varepsilon x_1 + 0(\varepsilon^2), \quad (2)$$

$$\bar{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\beta) \varepsilon^n = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + 0(\varepsilon^2), \quad (3)$$

$$\bar{u}_1(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(\alpha) \varepsilon^n = u_{10} + \varepsilon u_{11} + 0(\varepsilon^2) \quad (4)$$

$$\left(\begin{aligned} \bar{\psi} &= \sqrt{\nu} \bar{\Psi} = \sqrt{\nu L u_\infty} \psi^* = \\ &= \sum_0^\infty \bar{\psi}_n \varepsilon^n = \sqrt{\nu} \sum_0^\infty \Psi_n \varepsilon^n = \sqrt{\nu L u_\infty} \sum_0^\infty \psi_n \varepsilon^n \end{aligned} \right), \quad (4')$$

unde ε este o mărime mică (parametrul de perturbație), care urmează să fie precizată în fiecare problemă particulară. Parametrul ε indică gradul de apropiere al aproximației considerate de soluția principală ($\varepsilon = 0$)

notată prin indicele zero. Variabilele α și β sînt noile variabile independente care trebuie, de asemenea, să fie precizate. Funcțiile x_n și u_{1n} se consideră continue și cu derivate continue.

Se deduc, imediat, următoarele formule :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{d\alpha}{d\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{1 + \varepsilon x'_1 + \varepsilon^2 x'_2 + \dots} \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} &= \frac{d\beta}{d\Psi} \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{1 + \varepsilon \Psi'_1 + \varepsilon^2 \Psi'_2 + \dots} \frac{\partial}{\partial \Psi} \quad (5) \\ \left(x'_i &= \frac{dx_i}{d\alpha}, \quad \Psi'_i = \frac{d\Psi_i}{d\Psi}, \quad i = 1, 2, \dots \right)\end{aligned}$$

dacă se consideră că

$$\alpha = x_0 \equiv x, \quad \beta = \Psi_0 \equiv \Psi(\psi_0 \equiv \psi) \quad (6)$$

$$(\bar{\psi}_0 = |\bar{\psi}| \Psi = \psi \sqrt{L u_\infty}) \quad (6')$$

și se lasă la o parte indicele zero de la x_0 și Ψ_0 .

Vom căuta pentru viteza $\bar{u}$ din stratul-limită o soluție în forma seriei de puteri

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{\Psi}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, \Psi) \varepsilon^n = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + 0(\varepsilon^3) \quad (7)$$

și vom considera că

$$\bar{u}_1^2 = u_{10}^2 + 2\varepsilon u_{10} u_{11} + \varepsilon^2 (u_{11}^2 + 2u_{10} u_{12}) + 0(\varepsilon^3), \quad (7')$$

$$\bar{u}^2 = u_0^2 + 2\varepsilon u_0 u_1 + \varepsilon^2 (u_1^2 + 2u_0 u_2) + 0(\varepsilon^3).$$

În aceste formule $u_0, u_1, \dots$ sînt funcții care vor trebui determinate în calitate de necunoscute principale ale problemei.

Aplicînd formulele precedente, ecuația (1) se transformă în următoarea identitate în raport cu ε :

$$[1 + 2\varepsilon \Psi'_1 + \varepsilon^2 (\Psi_1'^2 + 2\Psi_2')] \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} - \frac{d\bar{u}_1^2}{d\alpha} \right) \equiv (1 + \varepsilon x'_1 + \varepsilon^2 x'_2) \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \Psi^2}. \quad (8)$$

Din egalarea coeficienților puterilor lui ε , se deduc ecuațiile aproximațiilor de ordinul zero (0), ordinul întâi (I) și ordinul doi (II) în următoarele forme :

$$(0) \quad \frac{\partial u_0^2}{\partial x} = \frac{du_{10}^2}{dx} + u_0 \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2}, \quad (9)$$

$$(I) \quad \frac{\partial}{\partial x} (u_0 u_1) = u_0 \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} (u_0 u_1) + \frac{u_1}{2} \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2} + \frac{d}{dx} (u_{10} u_{11}) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1}{dx} - 2 \frac{d\Psi_1}{d\Psi} \right) u_0 \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2}, \quad (10)$$

$$(II) \quad \frac{\partial}{\partial x} (u_0 u_2) = u_0 \frac{\partial^2 (u_0 u_2)}{\partial \Psi^2} + \frac{u_2}{2} \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2} + \frac{d}{dx} (u_{10} u_{12}) + \\ + \frac{1}{2} (u_0 x_2' - 2\Psi_2' u_0 + u_1 x_1' - \Psi_1'^2 u_0) \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2} + \frac{u_0}{2} \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial \Psi^2} + \\ + (u_1 + u_0 x_1') \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} (u_0 u_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x} - \frac{du_{11}^2}{dx} \right) - \\ - 2\Psi_1' \left(\frac{\partial (u_0 u_1)}{\partial x} - \frac{d(u_{10} u_{11})}{dx} \right), \quad (11)$$

$$(n) \quad \frac{\partial U_n}{\partial x} = u_0 \frac{\partial^2 U_n}{\partial \Psi^2} + \frac{U_n}{2u_0} \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2} + F_n(x, \Psi) \quad (12)$$

$$(U_n \equiv u_0 u_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots).$$

1.2. *Condiții la limită și proprietăți generale pentru funcțiile considerate.* Pe suprafața corpului și pe frontiera exterioară a stratului-limită, potrivit aderenței la suprafața solidă și a traversării continue (linie) a frontierei exterioare, avem condițiile la limită

$$u_i(x, 0) = 0, \quad u_i(x, \infty) = u_{1i}(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Se consideră, de asemenea, condiția inițială, din secțiunea inițială

$$u_i(x^0, \Psi) = u_i^0(\Psi), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

unde funcțiile $u_{1i}(x)$ sînt date prin dezvoltarea (4), iar funcțiile u_i^0 se presupun cunoscute în secțiunea inițială (ca și pe o linie caracteristică a unei ecuații parabolice).

— Se presupune că mișcarea viscoasă se studiază în domeniul $D = \{(x, \Psi), 0 < x < x_1, 0 < \Psi < \infty\}$ (fie $\bar{D}$ domeniul închis) și că $u_i^0 > 0$ pentru $\Psi > 0$, $u_i^0(\Psi) \rightarrow 0$ pentru $\Psi \rightarrow 0$, $u_i^0 \rightarrow u_{1i}(x^0)$ pentru $\Psi \rightarrow \infty$, $du_i^0/d\Psi > 0$ pentru $\Psi = 0$.

Să presupunem că ecuațiile (9), (10) au soluții, care satisfac următoarele proprietăți:

- 1) $\bar{u}$ și u_0 sînt funcții continue și mărginite în domeniul $\bar{D}$,
- 2) $\bar{u} \geq 0$ și $u_0 \geq 0$ în domeniul $\bar{D}$,
- 3) derivatele de ordinul întii și doi, care se află în (9), (10) sînt continue și mărginite în D ,

$$4) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \Psi} \right| \leq M, \quad \left| \sqrt{f} \frac{\partial^2 f}{\partial \Psi^2} \right| \leq M \quad (f \equiv \bar{u}^2, u_0^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Psi} \geq m > 0 \text{ pentru } 0 \leq \Psi \leq \Psi^1,$$

unde mărimile M, m și Ψ^1 depind de $x_1, f(x^0, \Psi)$ și de viteza exterioară (presiune).

SOLUȚIE ÎNȚĂLĂ (SOLUȚIE AUTOMODELATĂ)

2.1. *Aproximația de ordinul zero.* Pentru a determina soluția inițială, $u_0(x^0, \Psi) = u^0(\Psi)$, din secțiunea transversală $x = x^0$, ne vom referi la vecinătatea punctului critic ($x = 0$) unde, după cum este cunoscut, ecuația mișcării admite soluție automodelată (similară) dată de o ecuație diferențială ordinară care se poate introduce după cum urmează.

Fie transformarea de funcție și variabile

$$u_0^2 = u_{10}^2(1 - W_0), \quad u_{10} = u_\infty U_{10}, \quad x = LX \quad (\Psi = \psi \sqrt{L u_\infty}), \quad (15)$$

care aduce ecuația (9) cu condițiile la limită (13) la o problemă la limită cu condiții independente de x de forma

$$\frac{\partial}{\partial X} (U_{10}^2 W_0) = U_{10}^3 \sqrt{1 - W_0} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \Psi^2}, \quad (16)$$

$$W(x, 0) = 1, \quad W(x, \infty) = 0.$$

Dacă facem în (16) transformarea de variabile

$$\xi = X, \quad \eta = \alpha(X)\psi; \quad \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\alpha'}{\alpha} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

și luăm

$$U_{10} = C_0 X, \quad \alpha(X) = \frac{1}{X} \quad (C_0 = \text{const.}), \quad (17)$$

atunci

$$\eta = \frac{\psi}{X}, \quad \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial \psi^2} = \frac{1}{X^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (18)$$

și ecuația (16), referitor la funcția $W_0(\eta)$ dependentă numai de η , primește forma diferențială ordinară

$$C_0 \sqrt{1 - W_0} W_0'' + \eta W_0' - 2W_0(\eta) = 0, \quad (19)$$

$$W(0) = 1, \quad W_0(\infty) = 0.$$

Soluția $W_0(\eta)$ a acestei ecuații va folosi la calculul soluției inițiale $u_0^0(\psi)$. Potrivit cu transformarea (15) avem formula

$$u_0^0 = u_\infty C_0 X^0 \sqrt{1 - W_0^0} \quad (20)$$

$$(X^0 = x^0/L, W_0^0 = W_0(\eta^0 = \psi/X^0), \quad x^0 \text{ este dat}).$$

Se vede că $u_0^0(0) = 0$, ceea ce înseamnă că există compatibilitate între condiția la limită și condiția inițială (valori egale în punctul $(x^0, 0)$).

— Să menționăm că, în vederea integrării numerice a ecuației lui Mises (9), nu este nevoie să rezolvăm, efectiv, ecuația (19) deoarece se poate folosi ecuația lui Falkner-Skan și soluția ei. Într-adevăr, să efectuăm transformările

$$\xi_0 = \mu \rho \int_0^x u_{10} \, dx = \frac{\mu \rho c_0}{2} x^2, \quad \eta_0 = \frac{u_{10}}{\sqrt{2\xi_0}} \rho y = y \sqrt{\frac{c_0}{v}} \quad (u_{10} = c_0 x), \quad (21)$$

$$\psi = \frac{u_{10}}{\sqrt{c_0 L u_\infty}} f_0(\eta_0), \quad W_0 = 1 - \left(\frac{df_0}{d\eta_0} \right)^2 \quad (22)$$

$$\left(\text{unde funcția de curent } \psi_0 = \psi \sqrt{v L u_\infty}, \quad u_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial y} = u_{10} \frac{df_0}{d\eta_0} \sqrt{\frac{c_0}{v}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \right),$$

$$\eta = \frac{\psi}{X} = f_0 \sqrt{\frac{c_0 L}{u_\infty}},$$

$$\frac{dW_0}{d\eta} = -2 \sqrt{\frac{u_\infty}{c_0 L}} f_0'', \quad \frac{d^2 W_0}{d\eta^2} = -2 \frac{u_\infty}{c_0 L} \frac{f_0'''}{f_0'}$$

$$(u_{10} = c_0 x = c_0 L X = u_\infty U_{10} = u_\infty C_0 X, \quad C_0 = c_0 L / u_\infty).$$

Atunci, ecuația (19), după cum se constată ușor, primește forma

$$f_0''' + f_0 f_0' + 1 - f_0'^2 = 0 \quad (22')$$

$$(f_0(0) = 0, f_0'(0) = 0, f_0'(\infty) = 1; \quad f_0'(\eta_0) \equiv u_0/u_{10}),$$

adică, tocmai, un caz particular al ecuației lui Falkner-Skan care apare în studiul mișcării automodelate (similare) din vecinătatea punctului critic. Integrarea numerică a ecuației (22') a fost efectuată de mai mulți autori. Se poate folosi soluția dată de Howarth sub forma unui tabel care conține valorile η_0, f_0, f'_0 și f''_0 [2], [3].

Valorile soluției inițiale, din secțiunea inițială $x = x^0$, se vor calcula, în consecință, cu formula

$$W_0^0 = W_0(x^0, \psi) = 1 - \left[\left(\frac{df_0}{d\eta_0} \right)^2 \right]^0 \quad (23)$$

$$(W_0^0(x^0, 0) = 1, W_0^0(x^0, \infty) = 0)$$

în modul următor: la valoarea dată $\psi = \psi_j$ corespunde, după (22), valoarea f_{0j} căreia putem face să-i corespundă, prin intermediul tabelului numeric, valoarea f'_{0j} care ne va da, după (23), valoarea $W_0^0 = W_{0j}^0$. Valorile W_{0j}^0 se pot, eventual, înlocui în formula (20) și să se obțină, astfel, valorile funcției $u_0^0(\psi)$.

2.2. *Aproximația de ordinul întâi.* Soluția inițială, pentru aproximația de ordinul întâi, este dată, ca și în cazul aproximației de ordinul zero, de soluția mișcării din vecinătatea punctului critic. Să aplicăm, atunci, ecuația (10) în vecinătatea punctului critic folosind transformările (15), (17)–(18) la care mai adăugăm transformarea

$$u_0 u_1 = u_\infty^2 U_{10} U_{11} (1 - W_1) \quad (24)$$

$$(u_{11} = u_\infty C_1 X, C_1 = \text{const.}, \frac{dx_1}{dx} = 0, \Psi_1 = \psi_1 \sqrt{L u_\infty}).$$

Se obține ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi în raport cu W_1

$$\begin{aligned} 2W_1 + \xi \frac{\partial W_1}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial W_1}{\partial \eta} &= C_0 \sqrt{1 - W_0} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} + \\ + \frac{1}{2} C_0 \frac{1 - W_1}{\sqrt{1 - W_0}} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} - \frac{C_0^2}{C_1} \frac{d\psi_1}{d\psi} \sqrt{1 - W_0} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

cu condițiile la limită, independente de ξ ,

$$W_1(\xi, 0) = 1, W_1(\xi, \infty) = 0.$$

Pentru ca această ecuație să admită soluția automodelată $W_1(\eta)$ va trebui ca $d\psi_1/d\psi = KC_1/C_0$ ($K = \text{const.}$) și atunci ecuația (25) devine

$$C_0 \sqrt{1 - W_0} W_1'' + \eta W_1' - 2W_1 - \frac{C_0}{2} \frac{W_1 - 1 - 2K(W_0 - 1)}{\sqrt{1 - W_0}} W_0'' = 0, \quad (26)$$

$$W_1(0) = 1, W_1(\infty) = 0$$

$$(W_0 = W_0(\eta)).$$

Toate soluțiile automodelate sînt date de o singură ecuație diferențială ordinară, așa că, condițiile la limită fiind identice pentru W_1 și W_0 , va trebui ca (26) să se reducă la (19) [$W_1 \equiv W_0$] ceea ce se întîmplă dacă luăm $K = 1/2$.

Soluția inițială pentru problema la limită a aproximației de ordinul întii (10) va fi, după (24),

$$u_1^0(\psi) = C_1 u_\infty X^0 / \sqrt{1 - W_0^0} \quad (\psi = \Psi / \sqrt{L u_\infty}) \quad (27)$$

dacă în ecuația (10), și respectiv în transformarea (3), se consideră că

$$\frac{d\psi_1}{d\psi} = \frac{d\Psi_1}{d\Psi} = \frac{C_1}{2C_0}, \quad \Psi_1 = \frac{C_1}{2C_0} \Psi, \quad (28)$$

unde C_0 și C_1 sînt constante date de expresiile cunoscute ale vitezelor exterioare u_{10} și u_{11} în vecinătatea punctului critic (dependente de forma corpului dat). Din $W_1 = W_0$ deducem că în secțiune inițială $x = x^0$ avem egalitatea

$$W_1^0(\eta) = W_0^0(\eta). \quad (29)$$

Referitor la viteza u_1 cu valorile inițiale $u_1(x^0, \Psi) = u_1^0$ avem, dacă folosim și (20), formula următoare :

$$\frac{u_1^0}{u_{11}^0} = \frac{u_0^0}{u_{10}^0} \quad \text{sau} \quad u_1^0 = u_\infty C_1 X^0 / \sqrt{1 - W_0^0} \quad (30)$$

$$(x = LX, \quad u_{11} = c_1 x = c_1 LX = u_\infty U_{11} = u_\infty C_1 X, \quad C_1 = c_1 L / u_\infty).$$

După cum se observă, funcția $u_1^0(\Psi)$ satisface condițiile

$$u_1^0(0) = 0, \quad \lim_{\Psi \rightarrow \infty} u_1^0(\Psi) = u_\infty C_1 X^0 = u_{10}^0, \quad (30')$$

ceea ce dovedește compatibilitatea condiției inițiale cu condițiile la limită.

CONCLUZII ȘI OBSERVAȚII

Metoda micilor perturbații, mai puțin studiată în teoria stratului-limită, se poate aplica, în forma descrisă mai sus, dacă se cunosc dezvoltările (2) — (4) prin care se introduce parametrul de perturbație mic ε . Metoda micilor perturbații în raport cu variabilele lui Mises, expusă aici, prezintă, de altfel ca și metodele clasice ale teoriei micilor perturbații, următoarele două avantaje importante :

— liniarizează ecuațiile aproximațiilor succesive superioare celei de ordinul zero,

— permite aplicarea unor procedee de iterație; aproximația de ordinul n conține numai funcțiile $u_n, u_{n-1}, \dots, u_0$ în forma (12), unde $u_{n-1}, \dots, u_0$ și F_n se consideră funcții cunoscute.

Ecuția de ordinul zero coincide cu ecuația lui Mises și se poate studia cu teoria acestei ecuații în ipoteza că u_{10} poate fi exprimată prin funcții elementare, simple, în raport cu x . Funcția $u_{10}(x)$, ca și toate funcțiile $u_{1i}(x)$ reprezintă influența formei corpului și se determină, prin formula (4), cu ajutorul teoriei fluidului ideal. Să remarcăm că aproximația de ordinul zero (9) are o singularitate pe suprafața corpului ($\partial^2 u_0 / \partial \Psi^2 \rightarrow \infty$ pentru $\Psi \rightarrow 0$) și că această singularitate nu se datorește metodei micilor perturbații, cu deformare de coordonate, ci își are originea în însăși ecuația inițială a lui Mises (1). În lucrarea [6] se studiază aproximația de ordinul zero prin metode numerice cu aplicații la cilindrul circular.

Aproximația de ordinul întâi, proporțională cu ϵ , reprezentată prin funcția $u_1(x, \Psi)$, este dată de ecuația (10) în care u_0, u_{10}, u_{11} se consideră funcții cunoscute. Ecuția (10) conține, încă, funcția $x_1(x)$ și constantele C_0 și C_1 , care se calculează relativ ușor dacă forma corpului, în jurul căruia se mișcă fluidul vâcos, este cunoscută. Aproximația de ordinul întâi Ψ_1 (și ψ_1) s-a determinat cu condiția ca în vecinătatea punctului critic al mișcării, aproximațiile de ordinele zero și unu ale vitezei să fie asemenea între ele, determinarea lor reducându-se la aceeași ecuație diferențială ordinară. Potrivit cu § 1.2 și ecuațiile (30), (20) și (19) găsim că

$$\frac{du_k^0}{d\Psi} = -C_k \sqrt{\frac{u_\infty}{L(1 - W_0^0)}} \frac{dW_0^0}{d\eta^0} > 0 \quad (k = 0; 1)$$

și, prin urmare,

$$\frac{dW_0^0}{d\eta^0} < 0, \quad \frac{d^2 W_k^0}{d\eta^{02}} = \infty \quad \text{pentru } \Psi^0 = \eta^0 = 0,$$

ceea ce pune în evidență singularitatea ecuației funcției W_1^0 în punctul $(X^0, \Psi = 0)$. Este puțin probabil ca ecuația (10) să depășească gradul de singularitate al ecuației (9) în domeniul care ne interesează.

Studiul soluției inițiale are un dublu scop: să indice modul în care se calculează soluția cu care pornește o eventuală metodă numerică și să indice un criteriu de determinare a perturbației coordonatei Ψ .

Metoda micilor perturbații, analizată aici, poate fi considerată ca o variantă a metodei lui Poincaré-Lighthill-Kuo [4] și poate fi folosită pentru studiul unei mișcări viscoase care se abate puțin de la o mișcare viscoasă neperturbată, neuniformă, dată prin funcțiile u_0 și u_{10} . O aplicare a teoriei aproximației de ordinul întâi o vom face într-o lucrare viitoare în care vom cerceta, prin metode numerice, mișcarea unui fluid vâcos incompresibil, cu formare de strat-limită, peste un cilindru deformat.

BIBLIOGRAFIE

1. M. VAN DYKE, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Acad. Press, New York and London, 1964.
2. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor viscoase*, București, Edit. Academiei, 1967.
3. H. SCHLICHTING, *Teoria pogram. sloia*, IIL, Moskva, 1956.
4. H. S. TSIEH, *The Poincaré-Lighthill-Kuo Method*, Advances in Applied Mechanics, edit. H. L. Dryden and Th. Karman, vol. IV, Acad. Press, New York, 1956 (vezi și Prob. Mehaniki, sbor. statei, IIL, Moskva, 1959).
5. G. KUERTI, *The Laminar Boundary Layer in Compressible Flow*, Advances in Appl. Mech., vol. II, 1951 (edited by R. von Mises and Th. Karman).
6. D. BRĂDEANU, *Rezolvarea numerică a problemei stratului-limită incompresibil în forma lui Mises prin metoda diferențelor finite. Aplicație la cilindrul circular*, Studia Univ. Babeș-Bolyai Cluj, st. Math-Mech, 2 (1974).