

[5]

**STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ
APLICATĂ**

EXTRAS

1

TOMUL 33

1974

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

FORMULE NUMERICE ÎN VARIABILELE LUI MISES PENTRU GROSIMILE STRATULUI-LIMITĂ PLAN-INCOMPRESIBIL

de DOINA BRĂDEANU

Universitatea Cluj

Se deduc formule numerice care indică corespondența dintre variabilele lui Mises (x, ψ) și coordonatele stratului-limită incompresibil plan-paralel. Se dau, de asemenea, formule pentru calculul grosimilor stratului-limită. Aceste formule se aplică, folosind o integrare numerică cu ajutorul calculatorului FELIX C 256, la stratul-limită care se formează pe cilindrul circular.

Notății

x, y	— coordonatele fizice ale stratului-limită,
X	— coordonata adimensională x/L ,
L	— o lungime de referință,
$\xi, \bar{\psi}$	— variabilele lui Mises,
$\bar{\psi}, \psi$	— funcția de curent și funcția de curent adimensională,
u_0	— viteza din stratul limită în proiecție pe axa Ox ,
u_∞	— viteza curentului la infinit ($u_\infty = \text{const.}$),
U	— viteza adimensională u_0/u_∞ ,
$u_{10}(x)$	— viteza scurgerii exterioare,
$U_{10}(X)$	— raportul u_{10}/u_∞ ,
a_i	— coeficienții în dezvoltarea (3),
$\Delta\psi$	— o creștere mică a variabilei ψ (pasul variabilei ψ),
$\nu = \mu/\rho$	— viscozitatea cinematică,
ρ	— densitatea fluidului,
μ	— viscozitatea dinamică,
Re	— numărul lui Reynolds $L u_\infty/\nu$,
α_i	— coeficienți introduși prin formula (4),
g	— o funcție de viteza U dată de (9'),
ψ_j	— valoarea lui ψ pentru care $g = 0$,
(i, j)	— indici, arată punctul (nodul) în care se calculează o funcție (i și j sînt numere întregi).

1. TRECEREA DE LA VARIABILELE (x, ψ) LA (x, y)

1.1. Introducere. Domeniul mișcării fluidului vâcos în stratul-limită se divide în trei regiuni atunci când se studiază cu ajutorul variabilelor lui Mises $(x, \bar{\psi})$: ① regiunea din vecinătatea suprafeței corpului ($0 \leq \psi \leq 2\Delta\psi$), ② regiunea interioară a stratului-limită ($2\Delta\psi \leq \psi < \infty$) și ③ regiunea punctului de la infinit ($\psi \rightarrow \infty$), unde ecuația lui Mises este studiată și rezolvată numeric cu ajutorul seriilor, metodei diferențelor finite și extrapolării.

În lucrarea de față vom deduce formule pentru trecerea de la coordonatele lui Mises la coordonatele (x, y) și, de asemenea, formule pentru calculul grosimii, grosimii de deplasare și a grosimii pierderilor de impuls din stratul-limită incompresibil plan-paralel. Aceste formule se pot aplica imediat atunci când se folosește metoda diferențelor finite pentru integrarea numerică a ecuației lui Mises.

Transformările simbolice de coordonate

$$(x, y) \rightarrow (\xi, \bar{\psi}) \rightarrow (X, \bar{\psi}) \rightarrow (X, \psi),$$

efectuate cu formulele

$$x = \xi, \quad y = y(\xi, \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi \sqrt{\nu L u_\infty},$$

$$\xi = LX, \quad u_0 = u_\infty U = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y},$$

primesc forma

$$x = LX, \quad (1)$$

$$y(X, \psi) = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{U(X, \psi)} \quad (2)$$

$$(\psi = 0 \text{ pentru } y = 0; \mathcal{R}_e = Lu_\infty/\nu).$$

1.2 Regiunea din vecinătatea corpului ①. În domeniul din vecinătatea suprafeței corpului udat de fluid avem următoarele formule [4]:

$$U(X, \psi) = \sum_1^\infty a_n(X) \psi^{n/2},$$

$$a_2 = -\frac{2(U_{10}^2)'}{3a_1^2}, \quad a_3 = -\frac{7(U_{10}^2)'^2}{18a_1^5},$$

$$a_4 = -\frac{10(U_{10}^2)'^3}{27 a_1^8}, \dots \quad (3)$$

Formulele (1), (2), dacă folosim (3), devin

$$\begin{aligned}
 y(X, \psi) &= \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{U(X, \psi)} = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(X) \psi^{n/2}} \equiv \\
 &\equiv \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \int_0^\psi \left(\frac{\alpha_{-1}}{\sqrt{\psi}} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^{k/2} \right) d\psi = \\
 &= \frac{2L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \left(\alpha_{-1} \psi^{1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+2} \psi^{\frac{k}{2}+1} \right) = \frac{2L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+2} \psi^{\frac{k}{2}+1}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

unde

$$a_1 \alpha_{-1} = 1, \quad \sum_{j=1}^{k+2} a_j \alpha_{k+1-j} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

De aici deducem, dacă se ține seama de (3), formulele

$$\begin{aligned}
 \alpha_{-1} &= \frac{1}{a_1}, \\
 \alpha_0 &= -\frac{a_2}{a_1^2} = \frac{2}{3a_1^4} (U_{10}^2)', \\
 \alpha_1 &= -\frac{a_3 a_1 - a_2^2}{a_1^3} = \frac{5}{6a_1^7} (U_{10}^2)'^2, \\
 \alpha_2 &= \frac{32}{27a_1^{10}} (U_{10}^2)'^3, \\
 &\dots
 \end{aligned} \quad (4')$$

Se obține din (4) următoarea formulă de trecere de la ψ la y :

$$y_{i,j} = \frac{2L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \frac{(\sqrt{\psi})_j}{(a_1)_i} \left[1 + \frac{\sqrt{\psi}}{3a_1^3} (U_{10}^2)' \left(1 + \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\psi}}{3a_1^3} (U_{10}^2)' \right) \right]_{i,j} \quad (5)$$

$$(j \leq 2, 0 \leq \psi \leq 2\Delta\psi, \quad y_{i,j} = y(X_i, \psi_j = j\Delta\psi),$$

$$X_i = X_0 + i\Delta X, \quad i = 0, 1, 2 \dots),$$

cu ajutorul căreia se calculează valoarea $y_{i,j}$ a coordonatei y în secțiunea $X = X_i$ pentru o valoare dată $\psi_j (j = 0, 1, 2)$.

1.3 *Regiunea din interiorul stratului-limită.* Pentru a reveni la planul fizic inițial (x, y) , de la planul lui Mises $(x, \bar{\psi})$, vom folosi

formulele (1), (2). Presupunind cunoscută numeric funcția $U(X, \psi)$, respectiv funcția $g(X, \psi)$, prin metoda diferențelor finite, vom putea determina și funcția $y(x, \psi)$ cu ajutorul unei integrări numerice (de exemplu, regula lui Simpson).

Considerind, de pildă, trei noduri pe axa variabilei ψ , cu interval component $2\Delta\psi$, se poate imediat, pentru noduri pare, scrie formula

$$y_{i,2j} = y_{i,2} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \sum_{k=2}^j \int_{(2k-2)\Delta\psi}^{2k\Delta\psi} (1/U) d\psi, \quad j \geq 2. \quad (6)$$

Dacă notăm

$$Y = \int_0^\psi \frac{d\psi}{U}, \quad Y' = \frac{1}{U},$$

folosind seria Taylor și formula diferențelor centrale de ordinul doi, deducem imediat formula

$$\begin{aligned} \int_{\psi-\Delta\psi}^{\psi+\Delta\psi} (1/U) d\psi &= Y(X, \psi + \Delta\psi) - Y(X, \psi - \Delta\psi) = \\ &= \frac{\Delta\psi}{3} \left[\left(\frac{1}{U} \right)_{(\psi+\Delta\psi)} + 4 \left(\frac{1}{U} \right)_{(\psi)} + \left(\frac{1}{U} \right)_{(\psi-\Delta\psi)} \right] - \frac{\Delta\psi^5}{90} \left(\frac{1}{U} \right)_{(\psi)}^{(IV)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Dacă în această formulă facem $\psi = (2k-1)\Delta\psi$ și aplicăm teorema mediei (în expresia sumei erorilor) găsim următoarea formulă (cu trei noduri) pe noduri cu indice par :

$$\begin{aligned} y_{i,2j} &= y_{i,2} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \frac{\Delta\psi}{3} \sum_{k=2}^j \left(\frac{1}{U_{i,2k}} + \frac{4}{U_{i,2k-1}} + \frac{1}{U_{i,2k-2}} \right) - \\ &- \Delta\psi^4 \frac{L\psi_{j-1}}{90\sqrt{\mathcal{R}_e}} \left(\frac{1}{U} \right)_{(\psi)}^{(IV)}, \quad j \geq 2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left(\frac{\Delta\psi^5}{90} \sum_{k=2}^j \left(\frac{1}{U} \right)_{(2k-1)\Delta\psi}^{(IV)} \right) = \frac{\Delta\psi^4}{90} (j-1) (\Delta\psi) \left(\frac{1}{U} \right)_{(\psi)}^{(IV)}.$$

Formula de trecere de la variabila ψ la variabila y , dacă se introduce funcția $g(X, \psi)$ și se admite o eroare de ordinul $\Delta\psi^4$, are forma

$$\begin{aligned} y_{i,2j} &= y_{i,2} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}} \frac{\Delta\psi}{3} \sum_{k=2}^j [(g_{i,0} - g_{i,2k})^{-1/2} + \\ &+ (g_{i,0} - g_{i,2k-1})^{-1/2} + (g_{i,0} - g_{i,2k-2})^{-1/2}] \end{aligned} \quad (9)$$

$$(j \geq 2, g_{i,j} = g(X_i, \psi_j) \approx (U_{i0}^2 - U_{ij}^2)). \quad (9')$$

Funcția de rețea $g(X, \psi)$ este calculată numeric, prin metoda diferențelor finite în cazul cilindrului circular, în lucrarea [4].

Pentru noduri impare, cu ajutorul formulei (7) în care se face $\psi = 2k\Delta\psi$ se deduce din (2), cu o eroare de ordinul lui $\Delta\psi^4$, formula

$$y_{i,2j+1} = y_{i,1} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \sum_{k=1}^j \int_{(2k-1)\Delta\psi}^{(2k+1)\Delta\psi} (1/U) d\psi$$

sau formula ($j \geq 1$)

$$y_{i,2j+1} = y_{i,1} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \frac{\Delta\psi}{3} \sum_{k=1}^j \left[\left(\frac{1}{U} \right)_{i,2k+1} + 4 \left(\frac{1}{U} \right)_{i,2k} + \left(\frac{1}{U} \right)_{i,2k-1} \right]. \quad (10)$$

Formula (10) poate fi exprimată, analog cu (9), și în raport cu funcția $g_{i,j}$.

2. GROSIMILE STRATULUI-LIMITĂ

2.1 *Grosimea* $\delta(X)$. Cu relațiile precedente pentru y se pot calcula valorile grosimii $\delta(X)$ a stratului-limită.

Deoarece

$$\delta(X) = y(X, \psi = \psi_J) \text{ cu } g(X, \psi_J) = 0$$

rezultă, imediat, că în secțiunea $X = X_i$, grosimea $\delta = \delta(X_i) \equiv \delta_i$ are valoarea

$$\delta_i = y_{i,J} = \begin{cases} y_{i,2j}, & \text{unde } j = \frac{J}{2} \text{ (cînd } J = \text{par}), \\ y_{i,2j+1}, & \text{unde } j = \frac{J-1}{2} \text{ (cînd } J = \text{impar}), \end{cases} \quad (11)$$

în care mărimile $y_{i,2j}$ și $y_{i,2j+1}$ sînt date de formulele (9) și (10). Valoarea

întreagă J este numărul nodului (X_i, ψ_J) în care funcția $U = U_{10}$ sau $g = g_{i,J} = 0$.

2.2 *Grosimea de deplasare* $\delta^*(X)$. Grosimea de deplasare (eliminare) $\delta^*(X)$ a stratului-limită plan-parallel incompresibil este dată de formula

$$\delta^*(X) = \int_0^{\infty, \delta} \left(1 - \frac{u_0}{u_\infty} \right) dy. \quad (12)$$

Această formulă poate fi scrisă în forma

$$\delta_i^* = \delta^*(X_i) = y_{i,J} - \int_0^{\infty, \delta} \frac{u_0}{u_\infty} dy = y_{i,J} - \int_0^{\psi_{i,J}} \frac{d\bar{\psi}}{u_{10}}. \quad (13)$$

Calcul elementare conduc, ușor, la formulele

$$\delta_i^* = y_{i,J} - \frac{\psi_{i,J} \sqrt{vL} u_\infty}{(u_{10})_i} = \delta_i - \frac{L}{\sqrt{Re}} \frac{\psi_{i,J}}{(U_{10})_i}. \quad (14)$$

2.3 *Grosimea pierderilor de impuls* $\theta(X)$. Pentru mișcarea plană în stratul-limită incompresibil funcția $\theta(X)$ se poate calcula astfel :

$$\begin{aligned} \theta(X) &= \int_0^{\infty} \frac{u_0}{u_{10}} \left(1 - \frac{u_0}{u_{10}}\right) dy = \frac{1}{U_{10}} \sqrt{\frac{vL}{u_\infty}} \int_0^{\psi_J} \left(1 - \frac{U}{U_{10}}\right) d\psi = \\ &= \frac{\sqrt{vL/u_\infty}}{U_{10}} \left\{ \int_0^{j\Delta\psi} \left(1 - \frac{U}{U_{10}}\right) d\psi + \int_{j\Delta\psi}^{J\Delta\psi} \left(1 - \frac{U}{U_{10}}\right) d\psi \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Pentru a evalua integrarea în intervalul $[0, j\Delta\psi]$ folosim soluția pentru U , din vecinătatea suprafeței corpului, în forma (3). Avem

$$\begin{aligned} j\Delta\psi - \frac{1}{U_{10}} \int_0^{j\Delta\psi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(X) \psi^{n/2} d\psi &= \\ &= j\Delta\psi - \frac{1}{U_{10}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+2} a_n(X) (j\Delta\psi)^{\frac{n+2}{2}} \right] \approx \\ &\approx j\Delta\psi \left\{ 1 - \frac{2}{U_{10}} \left[\frac{a_1}{3} (j\Delta\psi)^{1/2} + \frac{a_2}{4} (j\Delta\psi) + \frac{a_3}{5} (j\Delta\psi)^{3/2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{unde } \begin{cases} j = 1 & \text{dacă } J = \text{impar,} \\ j = 2 & \text{dacă } J = \text{par.} \end{cases}$$

Să trecem la calculul integralei în intervalul $[j\Delta\psi, J\Delta\psi]$ considerînd formula

$$\int_{j\Delta\psi}^{J\Delta\psi} E d\psi = \sum_{k=2}^M \left(\alpha \int_{(2k-3)\Delta\psi}^{(2k-1)\Delta\psi} E d\psi + \beta \int_{(2k-2)\Delta\psi}^{2k\Delta\psi} E d\psi \right); \quad E \equiv 1 - \frac{U}{U_{10}}, \quad (17)$$

unde

$$\alpha = 1; \quad \beta = 0; \quad M = \frac{J+1}{2} \quad (j = 1)$$

dacă $J = \text{număr impar} > 1$,

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1; \quad M = \frac{J}{2} \quad (j = 2)$$

dacă $J = \text{număr par} > 2$.

(18)

Aplicind formula (7), cu o alegere convenabilă a variabilei ψ și neglijind restul de ordinul $O(\Delta\psi^4)$, vom putea scrie formula

$$\int_{j\Delta\psi}^{j\Delta\psi} E d\psi = \frac{\Delta\psi}{3} (U_{10})_i \sum_{k=2}^M \left\{ 6(\alpha + \beta)(M-1)(U_{10})_i - \right. \\ \left. - \sum_{k=2}^M \left[\beta U_{i,2k} + (\alpha + 4\beta) U_{i,2k-1} + (4\alpha + \beta) U_{i,2k-2} + \alpha U_{i,2k-3} \right] \right\}. \quad (19)$$

Formula (15), dacă se ține seama de (16) și (19), primește forma

$$\theta_i = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \frac{j\Delta\psi}{(U_{10})_i} \left\{ \left[1 + \frac{2}{j} (\alpha + \beta)(M-1) \right] (U_{10})_i - \right. \\ \left. - 2 \left[\frac{(j\Delta\psi)^{1/2}}{3} (a_1)_i + \frac{j\Delta\psi}{4} (a_2)_i + \frac{(j\Delta\psi)^{3/2}}{5} (a_3)_i \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{3j} \sum_{k=2}^M \left[\beta U_{i,2k} + (\alpha + 4\beta) U_{i,2k-1} + (4\alpha + \beta) U_{i,2k-2} + \alpha U_{i,2k-3} \right] \right\} \quad (20)$$

($\theta_i = \theta(X_i; J)$; α, β, M și j sînt date de (18)).

3. APLICAȚIE. STRAT-LIMITĂ PE CILINDRUL CIRCULAR

3.1 *Calculul ordonatei y .* Se programează calculul formulei (5) la calculatorul FELIX—256 în limbaj FORTRAN IV pentru cazul cilindrului circular de rază R așezat într-un curent vîscos incompresibil plan-paralel (vezi Anexa 1). Datele sînt luate din lucrarea [4] ($\Delta\psi = 0,1$; $U_{10} = 2 \sin X$).

Tabela 1

$j \backslash i$	i	0	1	2	3	4	5	ψ_j
	X_i (rad)	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411	
	$(a_1)_i$	1,1170	1,5500	1,8572	2,0350	2,0818	2,1101	
0	$\frac{\sqrt{\mathcal{R}e}}{R} y_{i,j}$	0	0	0	0	0	0	0
1		0,6399	0,4432	0,3632	0,3281	0,3197	0,3146	0,1
2		0,9607	0,6518	0,5293	0,4757	0,4627	0,4548	0,2

S-a întocmit tabela 1 în care sînt redată valorile coeficientului a_1 , luate din [4], și valorile ordonatei $y(X_i, \psi_j) \equiv y_{i,j}$ ($\mathcal{R}e$, numărul lui Rey-

nolds, și R , raza cilindrului, sînt date). În figura 1 sînt reprezentate valorile $y_{i,j}$ pe două curbe care reprezintă, în planul auxiliar OXY , graficele liniilor de curent $\psi = \psi_j$ ($\psi = 0,1$; $\psi = 0,2$).

Din tabela funcției de rețea $g_{i,j}$ (dat în [4]) rezultă că viteza $U(X, \psi)$ crește în raport cu X , pentru o valoare fixată a lui ψ (pe o linie de curent).

Prin urmare, în domeniul considerat $X_0 \leq X \leq X_I$ ($I = 5$) avem $\partial U / \partial X > 0$. Din formula (2) rezultă, atunci, că

$$\frac{\partial y}{\partial X} = - \frac{L}{\sqrt{Re}} \int_0^{\psi_j} \frac{\partial U}{\partial X} \frac{d\psi}{U^2} < 0$$

$$(\psi_j > 0) \quad j = 1, 2,$$

ceea ce justifică valorile descrescătoare ale funcției de rețea $y_{i,j}$ în raport cu X_i (j este dat) și apropierea liniei de curent $\psi = \psi_j$ de suprafața cilindrului de-a lungul arcului $X_0 \leq X \leq X_I$, unde $\partial U / \partial X > 0$ (conservarea debitului de fluid prin secțiunea transversală).

Observație. Formula (2), dacă se înlocuiește limita superioară ψ cu ψ_j , reprezintă, în coordonatele (X, y) , ecuația liniei de curent $\psi = \psi_j$ (const).

Să calculăm acum coordonata y în regiunea din interiorul stratului-limită folosind formulele (10) și (9). Se arată ușor că formulele (10) și (9) pot fi scrise într-o singură formulă de recurență de următoarea formă:

$$\frac{\sqrt{Re}}{R} y_{i,k+2} = Y_{i,k+2} + \frac{\sqrt{Re}}{R} y_{i,k} \quad (22)$$

$$(i = 0, 1, \dots, 5; \quad k = 1, 2, \dots, 24),$$

unde

$$Y_{i,k+2} = \frac{1}{30} (a_{i,k+2} + 4a_{i,k+1} + a_{i,k}), \quad (23)$$

cu funcțiile

$$a_{i,k} = (g_{i,0} - g_{i,k})^{-1/2} \quad (i = 0, \dots, 5; \quad k = 1, \dots, 26). \quad (24)$$

Matricea $(g_{i,k})$, $i = 0, 1, \dots, 5$; $k = 0, 1, \dots, 26$, calculată în lucrarea [4], este dată în tabela 2.

Calculul numeric al formulei (23) s-a efectuat cu mașina electronică FELIX-C 256 în limbaj FORTRAN IV (vezi anexa 2). Rezultatele

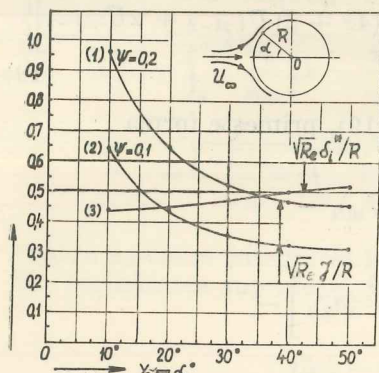


Fig. 1

numerice sînt date în tabela 3 pentru șase secțiuni de-a lungul cercului (nu am transcris aici și matricea intermediară $(a_{i,k})$, care este, de asemenea, calculată cu mașina potrivit cu programul din anexa 2).

În concluzie, cu ajutorul tabelelor 1 și 3 se poate stabili o corespondență numerică între variabilele ψ și y în diferite secțiuni transversale ale stratului-limită incompresibil de pe cilindrul circular (calculule pot fi extinse, după același program pînă la $\alpha = 90^\circ$). Calculul lui y din regiunea de la „infinit” ne dă posibilitatea să determinăm și grosimile stratului limită.

3.2 *Grosimile* $\delta(X)$ și $\delta^*(X)$. Pentru calculul grosimii $\delta(X)$ a stratului-limită incompresibil de pe cilindrul circular se vor aplica formulele (11), care, cu ajutorul funcțiilor de rețea $Y_{i,k}$, date de (23), se pot scrie în forma

$$\sqrt{\mathcal{R}_e} \frac{\delta_i}{R} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mathcal{R}_e}}{R} y_{i,2j+1} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}_e}}{R} y_{i,1} + \sum_{k=1}^j Y_{i,2k+1}; \\ j = \frac{J-1}{2} (J = \text{impar}), \\ \frac{\sqrt{\mathcal{R}_e}}{R} y_{i,2j} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}_e}}{R} y_{i,2} + \sum_{k=2}^j Y_{i,2k}; \\ j = \frac{J}{2} (J = \text{par}) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, 5), \end{cases} \quad (25)$$

unde J este numărul definit de ecuația $g(X_i, \psi_J) = 0$. Valorile funcției, de rețea $Y_{i,k}$ sînt reprezentate în tabela 3. Valorile funcției $\sqrt{\mathcal{R}_e} \delta_i / R$, calculate după formulele (25), sînt date în tabela 4.

Pentru calculul grosimii de deplasare (eliminare) $\delta^*(X_i) \equiv \delta_i^*$ vom folosi, în mod direct, formula (14) scrisă în forma

$$\sqrt{\mathcal{R}_e} \frac{\delta_i^*}{R} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}_e}}{R} \delta_i - \frac{\psi_{i,J}}{2 \sin X_i}, \quad (26)$$

în care vom utiliza (25) și valorile variabilei X_i din tabela 1 sau 3. Valorile funcției $\sqrt{\mathcal{R}_e} \delta_i^* / R$ sînt date în tabela 4 și sînt reprezentate grafic în figura 1 (curba (3)). Tabela 4 și figura 1 arată că valorile funcției $\sqrt{\mathcal{R}_e} \delta_i^* / R$ calculate prin această metodă numerică corespund bine cu acelea calculate, de exemplu, prin metoda relațiilor integrale (vezi, de pildă, (2) p. 225).

Tabela 2
Matricea $(g_{i,k})$

$\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
0	0,1208	0,4688	1,0602	1,7221	1,9984	2,2223
1	0,0555	0,3132	0,8134	1,4089	1,6648	1,8750
2	0,0230	0,2103	0,6292	1,1607	1,3958	1,5913
3	0,0091	0,1396	0,4861	0,9570	1,1713	1,3519
4	0,0033	0,0910	0,3737	0,7876	0,9817	1,1474
5	0,0009	0,0581	0,2854	0,6462	0,8208	0,9719
6	0,0002	0,0362	0,2162	0,5281	0,6842	0,8211
7	0,0000	0,0219	0,1622	0,4296	0,5682	0,6915
8	0	0,0129	0,1205	0,3477	0,4700	0,5803
9	0	0,0074	0,0886	0,2798	0,3870	0,4852
10	0	0,0041	0,0644	0,2239	0,3171	0,4040
11	0	0,0022	0,0462	0,1781	0,2586	0,3349
12	0	0,0011	0,0328	0,1407	0,2098	0,2765
13	0	0,0006	0,0230	0,1104	0,1692	0,2271
14	0	0,0003	0,0159	0,0860	0,1357	0,1857
15	0	0,0001	0,0108	0,0666	0,1082	0,1510
16	0	0,0000	0,0062	0,0485	0,0822	0,1180
17	0	0	0,0017	0,0307	0,0566	0,0854
18	0	0	0,0008	0,0130	0,0311	0,0529
19	0	0	0,0008	0,0065	0,0056	0,0204
20	0	0	0,0004	0,0028	0,0028	0,0102
21	0	0	0,0002	0,0014	0,0014	0,0056
22	0	0	0,0000	0,0005	0,00035	0,0024
23	0	0	0	0,0001	0,00015	0,0012
24	0	0	0	0,0000	0,00007	0,0005
25	0	0	0	0	0,0000	0,0002
26	0	0	0	0	0	0,0000

Tabela 3

Valorile $Y_{i,k+2}$ ($i=0,5; k=1,24$)

$\psi_k \backslash X_i$	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411
0,3	0,6565	0,4048	0,3142	0,2756	0,2661	0,2601
0,4	0,6028	0,3522	0,2670	0,2314	0,2226	0,2170
0,5	0,5850	0,3270	0,2428	0,2082	0,1996	0,1941
0,6	0,5783	0,3130	0,2280	0,1935	0,1850	0,1795
0,7	0,5761	0,3046	0,2182	0,1835	0,1749	0,1694
0,8	0,5755	0,2995	0,2114	0,1762	0,1675	0,1619
0,9	0,5754	0,2964	0,2065	0,1708	0,1620	0,1563
1,0	0,5754	0,2946	0,2031	0,1667	0,1577	0,1519
1,1	0,5754	0,2935	0,2005	0,1635	0,1544	0,1484
1,2	"	0,2928	0,1987	0,1610	0,1517	0,1457
1,3	"	0,2925	0,1974	0,1591	0,1496	0,1434
1,4	"	0,2923	0,1964	0,1576	0,1479	0,1416
1,5	"	0,2922	0,1957	0,1564	0,1466	0,1402
1,6	"	0,2921	0,1952	0,1555	0,1455	0,1390
1,7	"	0,2921	0,1948	0,1546	0,1445	0,1379
1,8	"	"	0,1945	0,1538	0,1435	0,1368
1,9	"	"	0,1943	0,1531	0,1426	0,1358
2,0	"	"	0,1943	0,1527	0,1418	0,1349
2,1	"	"	0,1943	0,1525	0,1416	0,1345
2,2	"	"	0,1943	0,1525	0,1415	0,1343
2,3	"	"	0,1942	0,1524	0,1415	0,1342
2,4	"	"	0,1942	0,1524	0,1415	0,1342
2,5	"	"	"	"	"	"
2,6	"	"	"	"	"	"

Tabela 4

i	0	1	2	3	4	5
J	7	16	22	24	25	26
ψ_J	0,7	1,6	2,2	2,4	2,5	2,6
X_i	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411
$\sqrt{\mathcal{R}e} \frac{\delta_i}{R}$	2,4575	2,7883	2,6122	2,3293	2,2846	2,2658
$\sqrt{\mathcal{R}e} \frac{\delta_i^*}{R}$	0,4414	0,4505	0,4755	0,5004	0,5163	0,5218

Primită la redacție la 16 februarie 1973

A N E X A 1

```

C   FORTRAN IV
C   CALCULUL VALORILOR Y CU FORMULA (5)
F(T, U, V) = 4* SIN (2* T)* SQRT (V)/(3* U* U * U)
G(U, V) = 2 * SQRT(V)/U
DIMENSION A(6), X (6), Z (6, 6)
READ (105, 20) (X (I), I = 1, 6)
READ (105, 20) (A (I), I = 1, 6)
20  FORMAT (6 F 6.4)
55  FORMAT (10 X, I1, 5X, 2 F 12.4 //)
DO 40 I = 1, 6
  XIN = X (I)
  AIN = A (I)
  DO 35 J = 1, 2
    RJ = J/10.
    Z (I, J) = G (AIN, RJ) * (1 + F (XIN, AIN, RJ) * (1 + 2. 5 * F (XIN, AIN. RJ)))
35  CONTINUE
40  WRITE (108, 55) I, (Z(I, J), J = 1, 2)
STOP
END

```

A N E X A 2

```

C   FORTRAN IV
C   CALCULUL VALORILOR Y CU FORMULA (23)
DIMENSION G(30, 10), A(30, 10), Y(30, 10)
DO 10 I = 1, 27
  READ (105, 1) (G(I, J), J = 1, 6)
1  FORMAT (6 F 7. 5)

```

```

10 CONTINUE
   DO 20 K = 2,27
   DO 30 I = 1,6
   A(K, I) = 1/SQRT (G (1,I) - G (K, I))
30 CONTINUE
20 CONTINUE
   DO 40 K = 2,25
   DO 50 I = 1,6
   Y (K + 2, I) = (A (K + 2, I) + 4 * A (K + 1, I) + A (K,I))/30
50 CONTINUE
40 CONTINUE
   WRITE (108,2)
   2 FORMAT (1H1), 20 X, 17 H MATRICEA INITIALA/20 X, 19 (1 H *)
   DO 60 K = 1,27
   WRITE (108,3) (G (K, I), I = 1,6)
   3 FORMAT (1 H 1, 10X, 100 (1H *)/11X, 1H *, 2X, 6 (E 14. 8, 2X), 1H *)
60 CONTINUE
   WRITE (108,4)
   4 FORMAT (11X, 100 (1H *))
   WRITE (108,5)
   5 FORMAT (1H1, 20X, 21 H MATRICEA INTERMEDIARA/20 X, 23 (1 H * ))
   DO 70 K = 2,27
   WRITE (108,3) (A(K,I), I = 1 6)
70 CONTINUE
   WRITE (108,4)
   WRITE (108,6)
   6 FORMAT (1H1, 20X, 15 H MATRICEA FINALA/20X, 17 (1H *))
   DO 80 K = 4,27
   WRITE (108,3) (Y(K,I), I = 1,6)
80 CONTINUE
   WRITE (108,4)
   STOP
   END

```

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967.
2. H. SCHLICHTING, *Teoria pogan, sloia, IIL*, Moskva, 1956.
3. N. S. ARJANÍKOV şi V. N. MALŢEV, *Aerodinamica*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1954 (traducere din l. rusă).
4. D. BRĂDEANU, *Rezolvarea numerică a problemei stratului-limită*, Studia Univ. Cluj, s. Math-Mech, fasch. 2, 1974.
5. M. G. SALVADORI, M. L. BARON, *Metode numerice în tehnică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1972 (traducere din l. engleză).
6. V. I. KRÍLOV şi colab. *Vícisl. metodí vîş. matematiki*, Izd. „Viş. Scola”, 1, Moskva, 1972.