

[3]

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 1

1974

SEPARATUM

C L U J

CONVERGENȚA SOLUȚIEI ECUAȚIEI CU DIFERENȚE FINITE A STRATULUI LIMITĂ ÎN FORMA LUI MISES

DOINA BRĂDEANU

1. Ecuația cu diferențe finite a stratului limită laminar incompresibil în raport cu variabilele lui Mises. Ecuația stratului limită incompresibil în forma lui Mises a fost studiată cu ajutorul metodei diferențelor finite în mai multe lucrări [3], [5], [6].

Astfel, în lucrarea [3] se cercetează, prin metoda lui Fourier, stabilitatea metodei diferențelor finite pentru ecuația lui Mises cu referire la mișcarea de-a lungul unei plăci plane cu scurgere exterioară variabilă ($u_e = 1 - x$).

În lucrarea de față, folosind teoria ecuațiilor parabolice neliniare, se introduce o metodă elementară și relativ simplă în cadrul căreia se dau condiții de convergență pentru metoda diferențelor finite explicită cu patru puncte aplicată ecuației neliniare a stratului limită incompresibil laminar scrisă în raport cu variabilele lui Mises (x, ψ).

Studiul mișcării fluidului vâcos în domeniul $\bar{D}$ al stratului limită incompresibil, cu viteză exterioară variabilă, care se formează pe suprafețe curbe, se poate încadra în următoarea problemă la limită [2], [3]

$$\frac{\partial G}{\partial X} = \sqrt{U_{10}^2 - G} \frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2} \quad (1)$$

$$G(x, 0) = U_{10}^2, \quad G(X, \psi_\gamma) = 0; \quad [G(X_0, \psi) = G_0(\psi) \text{ funcție dată}] \quad (2)$$

unde

$$\bar{D} = \{X_0 \leq X \leq X_I, \quad 0 \leq \psi \leq \psi_\infty\}$$

$$x = LX, \quad \bar{\psi} = \sqrt{\nu} \Psi = \sqrt{u_\infty L \nu} \psi, \quad u_{10} = u_\infty U_{10}(X), \quad U_{10}^2 \equiv V(X) \quad (3)$$

$$u_0 = u_\infty U = u_\infty \sqrt{U_{10}^2 - G(X, \psi)}, \quad G \leq U_{10}^2 \quad (4)$$

$$(u_\infty = \text{const.}, \quad 0 \leq U \leq [V(X)]^{1/2}, \quad \psi_\infty = \psi(X, y = \delta))$$

unde s-au folosit următoarele **notații** :

- $x, \bar{\psi}$, coordonatele lui Mises ale stratului limită (x se măsoară pe generatoarea corpului, $\bar{\psi}$ este funcția de curent)
 ν , vîscozitatea cinematică a fluidului
 u_∞ , viteza constantă a fluidului la infinit (mișcarea principală a fluidului)
 $u_{10}(x)$, viteza fluidului pe frontiera exterioară a stratului limită, funcție de x
 $\delta(x)$, grosimea stratului limită
 $u_0(x, \bar{\psi})$, proiecția vitezei fluidului din stratul limită pe axa x
 L , o lungime caracteristică
 ψ_∞ , funcția de curent pe frontiera exterioară a stratului limită (funcție necunoscută de x).
 $\bar{D}, D$, domeniu închis și respectiv deschis în planul lui Mises (x, ψ)

Dacă derivata $\partial G / \partial X$ se înlocuiește cu o diferență progresivă, iar derivata $\partial^2 G / \partial \psi^2$ printr-o diferență centrală de ordinul doi și se notează cu $g_{i,j} \equiv g(X_i, \psi_j)$ valorile aproximative ale funcției $G(X_i, \psi_j) \triangleq G_{i,j}$ în nodurile (X_i, ψ_j) , atunci problema la limită (1) — (4) se transformă în următoarea problemă algebrică

$$g_{i+1,j} = g_{i,j} + \frac{\Delta X}{(\Delta \psi)^2} \sqrt{V_i - g_{i,j}} (g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \quad (5)$$

$$D_\Delta = \{X_i = X_0 + i\Delta X, \psi_j = j\Delta\psi\}, \quad \Delta X = \frac{X_I - X_0}{I}, \quad \Delta\psi = \frac{\psi_\infty}{J}$$

($V_i = V(X_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, I$; $j = 1, 2, \dots, J - 1$; $I, J =$ numere întregi) cu condițiile la limită și inițiale

$$g_{i,0} = V_i, \quad g_{i,J} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, I \quad (6)$$

$$g_{0,j} = G_{0,j} \text{ (valori date inițial), } j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (7)$$

care înseamnă determinarea funcției de rețea $g(X, \psi)$: se calculează valoarea $g_{i+1,j}$ în raport cu valorile $g_{i,j-1}$, $g_{i,j}$, $g_{i,j+1}$ cunoscute în secțiunea precedentă i . Desigur că valorile $g_{i,j}$ calculate, în acest mod, cu formula de recurență algebrică explicită cu patru puncte (5) trebuie să fie foarte apropiate de valorile funcției G . De aceea, apare în mod firesc problema comportării și evaluării erorii de aproximatie care se introduce prin înlocuirea ecuației cu derivate parțiale neliniare (1) prin ecuația cu diferențe finite (5). Studiul acestei erori se face sub titlul convergenței metodei diferențelor finite.

2. Convergența metodei diferențelor finite. Vom nota cu $G(X, \psi)$ soluția exactă a ecuației cu derivate parțiale (1) și cu $g(X_i, \psi_j) \equiv g_{i,j}$ soluția exactă a ecuației cu diferențe finite (5). Folosind dezvoltarea în serie

Taylor se pot introduce formule îmbunătățite pentru exprimarea derivatelor, pe rețeaua D_Δ ,

$$\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{i,j} \text{ și } \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}\right)_{i,j}$$

prin diferențe finite. Dacă se admite că funcția $G(X, \psi)$ aparține clasei $C^{2,4}$ care conține funcțiile cu derivate parțiale continue pînă la ordinul 2 în raport cu X și pînă la ordinul 4 (inclusiv) în raport cu ψ în domeniul D , atunci, ecuației (1) i se poate atașa următoarea ecuație cu diferențe finite explicită

$$\begin{aligned} G_{i+1,j} = G_{i,j} + \frac{\Delta X}{(\Delta \psi)^2} \sqrt{V_i - G_{i,j}} (G_{i,j+1} - 2G_{i,j} + G_{i,j-1}) + \\ + \frac{(\Delta X)^2}{2} G_{X^2}(\bar{X}_i, \psi_j) - \frac{\Delta X (\Delta \psi)^2}{12} \sqrt{V_i - G_{i,j}} G_{\psi^4}(X_i, \bar{\psi}_j) \end{aligned} \quad (8)$$

$$(G \in C^{2,4}; X_i < \bar{X}_i < X_{i+1}; \psi_j < \bar{\psi}_j < \psi_{j+1})$$

Se introduce eroarea de aproximație $z_{i,j} = G_{i,j} - g_{i,j}$, o funcție de rețea definită pe un număr finit de puncte, și din scăderea ecuațiilor (8) și (5) se deduce următoarea ecuație algebrică pentru $z_{i+1,j}$

$$\begin{aligned} z_{i+1,j} = z_{i,j} + \frac{\Delta X}{(\Delta \psi)^2} \{ \sqrt{V_i - G_{i,j}} (G_{i,j+1} - 2G_{i,j} + G_{i,j-1}) - \\ - \sqrt{V_i - g_{i,j}} (g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \} + A(X_i, \psi_j, \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

unde termenul A conține ultimii doi termeni din (8). În această ecuație avem

$$\sqrt{V_i - G_{i,j}} = [V_i - g_{i,j} - z_{i,j}]^{1/2} = \sqrt{V_i - g_{i,j}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z_{i,j}}{V_i - g_{i,j}} + \dots \right).$$

Ecuația cu diferențe finite (9) se scrie, dacă se neglijează puterile erorii z , în forma următoare

$$\begin{aligned} z_{i+1,j} = z_{i,j+1} r \sqrt{V_i - g_{i,j}} + \\ + z_{i,j} \left[1 - r \left(2 \sqrt{V_i - g_{i,j}} + \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{2 \sqrt{V_i - g_{i,j}}} \right) \right] + \\ + z_{i,j-1} r \sqrt{V_i - g_{i,j}} + A(X_i, \psi_j, \dots) \end{aligned} \quad (10)$$

$$(r \equiv \Delta X / (\Delta \psi)^2)$$

Se observă că suma coeficienților lui $z_{i,j+1}$, $z_{i,j}$, $z_{i,j-1}$ este egală cu

$$1 - r \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{2 \sqrt{V_i - g_{i,j}}} = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial G} \right)_{i,j} \Delta X$$

unde F este membrul drept al ecuației (1), iar derivata este calculată pentru valori aproximative. În cazul ecuației propagării căldurii această sumă este egală cu unitatea.

Să vedem, în continuare, în ce condiții coeficienții ecuației (10) sînt nenegativi. Avem, semnul egal corespunde punctelor de pe suprafața corpului ($\psi = 0$).

$$V_i - g_{i,j} \geq 0, \quad r \geq 0$$

Presupunînd că coeficientul lui $z_{i,j}$ este nenegativ vom putea scrie condiția

$$r \leq \frac{2\sqrt{V_i - g_{i,j}}}{4V_i - 6g_{i,j} + g_{i,j+1} + g_{i,j-1}} = \frac{2U_{i,j}}{6U_{i,j}^2 - (U_{i,j+1}^2 + U_{i,j-1}^2)} \quad (11)$$

$$(U_{i,j} = \sqrt{V_i - g_{i,j}}, \quad r \geq 0)$$

dacă este îndeplinită condiția suplimentară

$$g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1} \geq 0 \quad (12)$$

Să presupunem că condițiile (11) — (12) sînt îndeplinite la fiecare pas al procesului de calcul.

Să fixăm indicele i (secțiunea X_i), să introducem mărimea K și norma $\|z_i\|$ a vectorului $z_i = \{z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,j}\}$ cu formulele

$$\|z_i\| = \max_{(j=0, 1, 2, \dots, J)} |z_{i,j}| \quad (13)$$

$$K = \max_{(X_i, \psi_j) \in D_\Delta} \{|G_{X^2}(\bar{X}_i, \psi_j)|, |G_{\psi^2}(X_i, \bar{\psi}_j)|\}$$

În aceste condiții, luînd valorile absolute în ecuația (8), care are coeficienții nenegativi pe baza realizării la fiecare pas a condițiilor (11) — (12), avem

$$\|z_{i+1}\| \leq \left(1 - r \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{2\sqrt{V_i - g_{i,j}}}\right) \|z_i\| + |A(X_i, \psi_j, \dots)| \quad (14)$$

Se observă, de asemenea, că avem inegalitățile

$$|A| < \left| \frac{1}{2} (\Delta X)^2 K \right| + \left| \frac{1}{12} \Delta X (\Delta \psi)^2 \sqrt{V_i - G_{i,j}} K \right| < K \Delta X [(\Delta \psi)^2 + \Delta X]$$

$$(0 \leq \sqrt{V_i - G_{i,j}} \leq V_i \leq 1).$$

Datorită faptului că, în baza condițiilor (11) — (12), toți coeficienții din ecuația (10) sînt nenegativi, înseamnă că și coeficientul lui $\|z_i\|$ în (14) este pozitiv. De aceea, potrivit cu (12), putem majora coeficientul lui $\|z_i\|$, în (14), la unitate.

Vom putea, deci, scrie inegalitatea (14) în forma

$$\|z_{i+1}\| \leq \|z_i\| + K[(\Delta X)^2 + (\Delta \psi)^2 \Delta X], \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

De aici, deoarece $\|z_0\| = 0$ (valorile inițiale nu sînt date de această metodă), deducem

$$\|z_i\| = \max |G_{i,j} - g_{i,j}| \leq iK[(\Delta\psi)^2\Delta X + (\Delta X)^2]$$

adică

$$\|z_i\| \leq K(X_I - X_0)[(\Delta\psi)^2 + \Delta X], \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (16)$$

unde K este mărimea dată în formulele (13)

Concluzii și observații. Teoria expusă mai sus conduce la rezultatele următoare:

Dacă,

1₀. funcția $G(X, \psi) \in C^{2,4}$ și satisface ecuația (1)–(2) în D ,

2₀. funcția g satisface ecuația cu diferențe finite (5) și condițiile (6)–(7) în $\bar{D}_\Delta$,

3₀. condițiile (11)–(12) sînt verificate în fiecare nod (X_i, ψ_j) al rețelei $D_\Delta = \{X_0 < X_i \leq X_I, 0 < \psi_j < \psi_\infty\}$,

4₀. coeficientul derivatei G_{ψ^2} în ecuația (1), este pozitiv, atunci, în D , metoda diferențelor finite, în formă explicită, pentru problema la limită (1)–(2) este convergentă: soluțiile ecuației cu diferențe (5) converg către soluțiile ecuației cu derivate parțiale (1), eroarea satisfăcînd inegalitatea (16) pentru creșterile mici ΔX și $\Delta\psi$.

Inegalitatea (16) arată că pasul ΔX trebuie să fie cu mult mai mic decît pasul $\Delta\psi$ pentru ca eroarea de aproximație să fie mică.

Avînd în vedere condițiile 1₀–4₀ se pot face următoarele observații:

a) Condiția 4₀ nu este verificată peste tot în $\bar{D}$ deoarece pe suprafața corpului ($\psi = 0$) avem $(U_{10}^2 - G)^{1/2} = 0$.

b) Condiția 1₀ nu este, de asemenea, verificată în domeniul închis $\bar{D}$ pentru că pe corp ($U = 0$) considerînd $U_{10} \neq \text{const.}$, avem

$$G_X = 2U_{10}U'_{10} \neq 0 \text{ pentru } \psi = 0 \text{ și, deci, } \frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2} \rightarrow \infty \text{ pt. } \psi \rightarrow 0$$

Acest rezultat reprezintă singularitatea ecuației lui Mises, sesizată de Görtler.

c) Condiția (12) trebuie pusă în legătură cu semnul derivatei $\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}$ sau a derivatei $\partial G / \partial X$. În regiunea în care $\partial G / \partial X < 0$ condiția de convergență nu mai este îndeplinită.

Din aceste observații rezultă că metoda diferențelor finite nu este aplicabilă ecuației lui Mises în domeniul din imediata apropiere a suprafeței corpului în jurul căruia se mișcă fluidul. Din această cauză (prin urmare, și din punctul de vedere al convergenței) domeniul de integrare numerică prin metoda diferențelor în formă explicită a ecuației lui Mises se împarte în trei regiuni: ① regiunea din vecinătatea corpului, ② regiunea interioară

stratului limită și ③ regiunea punctului de la infinit. La aceste regiuni trebuie adăugată, de fapt, și secțiunea inițială în care soluția se presupune calculată cu alte metode.

Alte observații. În lucrarea [3] se deduce pentru stabilitatea ecuației (5) condiția

$$r \leq E_2 = 4U_{ij}/(10U_{ij}^2 - U_{ij+1}^2 - U_{ij-1}^2)$$

Dacă notăm cu E_1 expresia din dreapta din (11), atunci, avem

$$E_1 - E_2 = \frac{2U_{ij}}{N} (U_{ij+1}^2 + U_{ij-1}^2 - 2U_{ij}^2), \quad (E_1, E_2 > 0) \quad (17)$$

unde N este numitorul comun al fracțiilor E_1 și E_2 . Având inegalitățile

$$0 < U_{ij-1} < U_{ij} < U_{ij+1} < 1$$

rezultă că avem și

$$U_{ij+1}^2 + U_{ij-1}^2 < 1 + 2U_{ij+1}U_{ij-1} < 3$$

Dacă admitem că $E_1 - E_2 > 0$, atunci, din (17) primim inegalitatea

$$2U_{ij}^2 < U_{ij+1}^2 + U_{ij-1}^2 < 3 \text{ sau } U_{ij} < 1,22 \quad (18)$$

care este satisfăcută de $U_{ij} < 1$ și care dovedește că ipoteza $E_1 > E_2$ este adevărată. Acest rezultat poate fi pus în legătură cu teoremele de echivalență relative la convergența și stabilitatea ecuațiilor cu diferențe finite de tip parabolic (F. John, Lax și alții). Se constată că avem $E_1, E_2 \rightarrow \frac{1}{2U_{10}}$ pentru $\psi \rightarrow \infty$.

(Intrat în redacție la 20 martie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Schlichting, H., *Grenzschicht-Theorie*, Karlsruhe, 1951, sau trad. în l. rusă: *Teoria pogran. sloia*, I.I.L., Moskva, 1956.
2. Oroveanu, T., *Mecanica fluidelor viscoase*, Ed. Acad. R.S.R., București, 1967.
3. Mitchell, A. R. and Thomson, J. Y., *Finite Difference Methods of Solution of the von Mises Boundary Layer Equation with Special Reference to Conditions near a Singularity*, Zeit. fur Angew. Math. und Physik, 9, 1958 (traducere în *Mehanika*, 4, 1959, 45—53).
4. Jim Douglas Jr., *A Survey of Numerical Methods for Parabolic Differential Equations*, Advances in Computers, 2, edited by F. L. Alt, Academic Press, New-York, 1961.
5. Dișco, A. L., *Reșenie uravnenia Misesa teorii pogranicinogo sloia*, Vicslitelnaia Matematika, nr. 7, 1961.
6. Sennikov, V. V., *Unele metode numerice de rezolvare a ecuațiilor stratului limită*, în l. rusă, în culeg. *Cislennii metodî reșenia zad. mehaniki sploș. sred*, Trudi vicsl. ŋentra Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1969.

СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ФОРМЕ МИЗЕСА

(Резюме)

Изучается сходимость решения явного уравнения с конечными разностями Мизеса из теории пограничного слоя. Вычисляется погрешность приближения и выводятся условия и область сходимости решения.

CONVERGENCE DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION À DIFFÉRENCES FINIES DE
LA COUCHE LIMITE DANS LA FORME DE MISES

(Résumé)

Le travail étudie la convergence de la solution de l'équation à différences finies explicite de Mises de la théorie de la couche limite. On évalue l'erreur d'approximation et l'on déduit les conditions et le domaine de convergence de la solution.