

[4]

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

1974

SEPARATUM

C L U J

REZOLVAREA NUMERICĂ A PROBLEMEI STRATULUI LIMITĂ ÎN FORMA LUI MISES PRIN METODA DIFERENȚELOR FINITE. APLICAȚIE LA CILINDRUL CIRCULAR

DOINA BRĂDEANU

TEORIA PROBLEMEI

Introducere. Pentru studiul mișcării fluidului vâcos incompresibil în domeniul închis D al stratului limită laminar folosim ecuația lui Mises și condițiile la limită:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{du^2}{dx} + \nu u \frac{\partial^2 u^2}{\partial \bar{\psi}^2}, \quad x_0 < x \leq x_I, \quad 0 < \bar{\psi} < \infty, \quad \bar{\psi}_\infty \quad (0.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \bar{\psi}_\infty) = u_1(x), \quad 0 \leq x_0 < x \leq x_I \quad (0.2)$$

$$u(x_0, \bar{\psi}) = u^\circ(\bar{\psi}), \quad 0 \leq \bar{\psi} \leq \infty, \quad \bar{\psi}_\infty \quad (0.3)$$

$$\bar{D} \equiv \{x, \bar{\psi} \mid 0 \leq x_0 \leq x \leq x_I, \quad 0 \leq \bar{\psi} \leq \infty, \quad \bar{\psi}_\infty\} \quad (0.4)$$

unde: x și $\bar{\psi}$ sînt variabilele lui Mises, u — viteza în direcția x în puncte din interiorul stratului limită, u_1 — viteza pe frontiera exterioară, $\nu = \mu/\rho$ — vîscozitatea cinematică, ρ — densitatea, $\bar{\psi}_\infty$ — valoarea funcției de curent $\bar{\psi}$ pe frontiera exterioară, u° — soluția inițială dată în secțiunea inițială $x = x_0$. Domeniul D al mișcării, din planul lui Mises $(x, \bar{\psi})$, se împarte în trei subdomenii: D^i — interiorul stratului limită, D^s — vecinătatea suprafeței corpului în jurul căruia se mișcă fluidul și D^∞ — regiunea punctului de la infinit.

1. Mișcarea din domeniul interior D^i . Metoda diferențelor finite. În subdomeniul sau regiunea D^i problema se rezolvă numeric printr-o schemă explicită cu diferențe finite cu 4 puncte de forma [1], [4]:

$$g_{i+1,j} = g_{i,j} + r \sqrt{V_i - g_{i,j}} (g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \quad (1)$$

$$(i = 0, 1, \dots, I-1; j = 1, 2, \dots, J-1)$$

$$g_{i,0} = V_i, \quad g_{i,J} = 0, \quad g_{0,j} = G_{0,j} \text{ (valori date)} \quad (2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, I-1, j = 0, 1, \dots, J)$$

unde ($u_\infty = \text{const.}$, δ — grosimea stratului, D_Δ — rețeaua; I, J — numere întregi):

$$x = LX, \quad \bar{\psi} = \psi \sqrt{LU_\infty}, \quad \psi_\infty = \psi(X, y = \delta), \quad u_1 = u_\infty U_1, \quad U_1^2 = V(x)$$

$$X_i = X_0 + i\Delta X, \quad \psi_j = j\Delta\psi, \quad \Delta X = \frac{X_I - X_0}{I}, \quad \Delta\psi = \frac{\psi_\infty}{J}, \quad r = \frac{\Delta X}{(\Delta\psi)^2} = \text{const.}$$

$$u = u_\infty U = u_\infty \sqrt{U_1^2 - G(X, \psi)}, \quad G(X_i, \psi_j) \approx g(X_i, \psi_j) \equiv g_{i,j} \quad (3)$$

$$D_\Delta \equiv \{X_i, \psi_j \mid 0 \leq X_0 \leq X_i \leq X_I, \quad 0 \leq \psi_j \leq \psi_\infty\}$$

Convergența și stabilitatea acestei scheme sînt studiate în lucrările [4], respectiv [1]. Condițiile de stabilitate și convergență sînt:

$$r \leq \frac{4U_{i,j}}{10 U_{i,j}^2 - U_{i,j+1}^2 - U_{i,j-1}^2} \quad (4)$$

$$g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1} \geq 0 \quad (5)$$

iar eroarea de aproximație a soluției ecuației diferențiale este delimitată prin inegalitatea

$$||z_i|| \leq k(X_I - x_0)[\Delta X + (\Delta\psi)^2], \quad i = 1, 2, \dots, I; \quad (0 \leq X_0 < X_I) \quad (6)$$

$$(||z_i|| = \max_{(j=0,1,\dots,I)} |G(X_i, \psi_j) - g_{i,j}|; \quad k = k(G_{X^2}, G_{\psi^2}))$$

2. Mișcarea în domeniul D^s . Singularitatea ecuației lui Mises. În vecinătatea suprafeței corpului ($\partial^2 G / \partial \psi^2 \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow 0$) se caută pentru viteaz adimensională $U(X, \psi)$ o serie de forma

$$U(X, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(X) \psi^{n/2} \quad (7)$$

$$(D^s \equiv \{X, \psi | X_0 \leq X \leq X_I, 0 \leq \psi \leq 2\Delta\psi\})$$

unde coeficienții $a_n(X)$ sînt funcții necunoscute care se determină cu condiții suplimentare:

— Condiția de compatibilitate (pentru ecuație)

$$\left(U \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right)_{\psi=0} = -2U_1 \frac{dU_1}{dX} \quad (7')$$

— Condiții pe suprafața corpului care cer să fie nuli coeficienții $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ din dezvoltările (compatibilitate)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi} U \right)^{(i)} \frac{\partial^2 U^2}{\partial \psi^2} = \lambda_{i+1} \psi^{-1/2} + \dots \quad (8)$$

unde, de exemplu,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi} U \right)^{(2)} \frac{\partial^2 U^2}{\partial \psi^2} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(U \frac{\partial}{\partial \psi} \left(U \frac{\partial^2 U^2}{\partial \psi^2} \right) \right)$$

Pentru a determina coeficientul a_{i+1} rezolvăm ecuația

$$\lambda_{i+1}(a_1, \dots, a_i; a_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Se observă că în cazul de față avem

$$U^2 = a_1^2 \psi + 2a_1 a_2 \psi^{3/2} + (2a_1 a_3 + a_2^2) \psi^2 \dots \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 &= \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\partial U^2}{\partial \psi}, \quad A \equiv U_1 \frac{dU_1}{dX} \\ a_2 &= -\frac{4A}{3a_1^2}, \quad a_3 = -\frac{14A^2}{9a_1^5}, \quad a_4 = -\frac{80A^3}{27a_1^8} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

În D^s , reprezentăm funcția $G(X, \psi)$ în forma aproximativă

$$G(X, \psi) = U_1^2(X) - a_1^2 \psi + \frac{8}{3} \frac{A}{a_1} \psi^{3/2} + \frac{4}{3} \frac{A^2}{a_1^4} \psi^2 \quad (11)$$

Pentru rezolvarea completă a problemei va trebui să aflăm și coeficientul a_1 rămas nedeterminat în aplicarea condițiilor de compatibilitate de pe suprafața corpului. În acest scop folosim un procedeu de aproximații succesive considerînd că soluția dată de metoda diferențelor finite reprezintă o aproximație (inițială) pentru funcția G în D^s . Se găsește relația

$$4g_{i,1} - g_{i,2} = 3g_{i,0} + 2 \left(\frac{\partial G}{\partial \psi} \right)_{i,0} \Delta \psi = 3g_{i,0} - 2a_1^2 \Delta \psi \quad (12)$$

și, în consecință, formula aproximației de ordinul zero

$$(a_1^2)^0 = \frac{3g_{i,0} - 4g_{i,1} + g_{i,2}}{2\Delta \psi} \quad (13)$$

Pentru aproximația de ordinul întâi folosim relația

$$4g_{i,1} - g_{i,2} = 3g_{i,0} - 2a_1^2 \Delta \psi + \frac{2}{3} \frac{A}{a_1} (\Delta \psi / \theta)^{3/2}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (14)$$

care conduce la ecuația de gradul trei

$$z^3 - z_0^2 z - \bar{c} = 0 \quad (15)$$

$$(z \equiv a_1, \quad z_0 \equiv a_1^0, \quad \bar{c} = 2,2228A \sqrt{\Delta \psi}, \quad \theta^{-3/2} = 6,6683) \quad (15')$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații se poate aplica metoda iterativă a lui Newton sau un procedeu de relaxare. Cu valoarea a_1 astfel determinată revenim la formula (11) care ne va da valorile funcției G și, deci, ale vitezei U în domeniul D^s .

Tensiunea de frecare locală pe suprafața corpului $\tau_w(X)$ se va calcula, aplicînd legea lui Newton, cu formula

$$\tau_w(X) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu u_\infty^2}{2 \sqrt{\nu L u_\infty}} \left(\frac{\partial U^2}{\partial \psi} \right)_w = \frac{\rho u_\infty^2}{2} \frac{a_1^2}{\sqrt{R_c}} \quad (16)$$

Pentru coeficientul $c_{\tau w}$ al tensiunii de frecare locală avem formula

$$\sqrt{R_e} c_{\tau w} = a_1^2 \quad (17)$$

$$\left(R_e = \rho u_\infty L / \mu, \quad c_{\tau w} = \frac{2\tau_w}{\rho u_\infty^2} \right) \quad (17')$$

3. Regiunea punctului de la infinit D^∞ . Pentru calculul valorilor funcției $G(X_i, \psi_j) \approx g_{i,j}$, în secțiunea $X = X_i$ în puncte unde $\psi_{J+1} = (J+1)\Delta\psi$ J fiind un număr folosit în mașina de calcul (program), se pot aplica formulele [3]

$$g_{i,J+1} = \begin{cases} \frac{1}{4} (9g_{i,J} - 6g_{i,J-1} + g_{i,J-2}), & \text{dacă } g_{i,J+1} (g_{i,J+1} - g_{i,J}) < 0 \\ \frac{1}{2} g_{i,J}, & \text{dacă } g_{i,J+1} (g_{i,J+1} - g_{i,J}) > 0 \end{cases} \quad (18)$$

4. Soluție inițială. Soluția inițială, de pornire, în procesul numeric de rezolvare a problemei scurgerii plane peste un corp cilindric este dată de soluția automodelată (de similitudine) din vecinătatea punctului critic reprezentată în variabilele (Illingworth-Stewartson)

$$\xi = \mu \rho \int_0^x u_1(x) dx = \frac{\mu \rho c_1}{2} x^2, \quad \eta = \frac{u_1}{\sqrt{2\xi}} \rho y = y \sqrt{\frac{\rho c_1}{\mu}}$$

($u_1 = c_1 x$, $c_1 = \text{const.}$, $y = \text{coordonata normală}$; μ , $\rho = \text{const.}$)

Dacă se introduce funcția vitezei $f(\eta)$ se obțin formulele

$$u = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = u_1 \frac{df}{d\eta} = \frac{d\bar{\psi}}{d\eta} \sqrt{\frac{\rho c_1}{\mu}}, \quad \left(\frac{u}{u_1} = \frac{df}{d\eta} \right)$$

de unde rezultă următoarea relație între funcțiile f și ψ

$$\psi = \frac{u_1}{\sqrt{L c_1 u_\infty}} (\eta) f \quad (19)$$

Funcția $f(\eta)$ și primele sale două derivate, pentru mișcări plane și axial-simetrice, sînt date în tabele [2].

Se obține imediat formula

$$G_{0,j} = U_1^2 - U^2 = V_i \left[1 - \left(\frac{df}{d\eta} \right)_{\eta=\eta_j}^2 \right] \quad (20)$$

$$(G_{0,0} = (U_1^2)_0, f'(\eta_0 = 0) = 0), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Cunoscînd soluția inițială $G_{0,j}$, schema cu diferențe finite (1) poate fi programată, în domeniul de convergență și stabilitate, la o mașină electronică de calcul.

STRAT LIMITĂ PE UN CILINDRU CIRCULAR (APLICAȚIE)

5. Calculul vitezei și tensiunii de frecare. Se consideră un cilindru circular atacat perpendicular pe generatoarele sale de un curent vâscos incompresibil care la infinit este în translație uniformă cu viteza u_∞ (fig. 1). În acest caz avem formulele (R = raza cilindrului):

$$L = R, X = x/R = \alpha \text{ rad}, u_1 = 2u_\infty \sin \frac{x}{R}, U_1 = 2 \sin X$$

$$X_0 = 0,1745 \rightarrow 10^\circ; r = 0,33; \Delta\psi = 0,1; \Delta X = 0,0033$$

Pentru $\psi = \psi_\infty$ avem $\partial G/\partial X = 0$ iar pentru $\psi = 0$ avem

$$\frac{\partial G}{\partial X} = 2U_1 U_1' \begin{cases} \geq 0 \text{ dacă } X_0 \leq X \leq \pi/2 \\ \leq 0 \text{ dacă } \frac{\pi}{2} \leq X \leq \pi \end{cases} \quad (21)$$

În consecință, în imediata vecinătate a suprafeței corpului obținem

$$\frac{\partial G}{\partial X} = \frac{\sqrt{U_1^2 - G}}{(\Delta\psi)^2} (g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}) \leq 0 \text{ pentru } \frac{\pi}{2} \leq X \leq \pi \quad (22)$$

Deci, condițiile de convergență și stabilitate nu sînt verificate în apropierea cilindrului în secțiuni $X > \pi/2$. Pe de altă parte trebuie exclusă vecinătatea imediată a suprafeței cilindrului din cauza singularității ecuației lui Mises de pe cilindru. În consecință, domeniul de stabilitate și convergență al schemei (1) pentru cilindrul circular va fi: $X_0 \leq X \leq \pi/2$; $2\Delta\psi < \psi < \infty$.

Calculul stratului limită incompresibil de pe un cilindru circular se va face după următorul algoritm:

— Calculul mărimii V_i se va face cu formula

theory are then applied to calculate the speed of the fluid around the circular cylinder. The results, presented layer reckoning the motion of the fluid round the circular cylinder. The results, presented in FORTRAN IV language by the electronic machine

Tabel 3

X	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411	0,9599	1,0490
$z =$								
a_1	1,1170	1,5500	1,8572	2,0350	2,0818	2,1101	2,1384	2,1386
$\tilde{R} =$								
$f_e(z)$	0,0002	-0,0003	-0,0004	0,0003	-0,0007	-0,0009	-0,0002	0,0005
a_1^2	1,2477	2,4025	3,4492	4,1412	4,3339	4,4525	4,5728	4,5736
ψ_∞	0,7	1,6	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8

— Valorile inițiale $G_{0,j}$ se determină cu formula

$$G_{0,j} = 0,1208 \left[1 - \left(\frac{df}{d\eta} \right)_j^2 \right], \quad \left(f_j = \frac{\psi_j}{0,2467} \right) \quad (24)$$

unde se folosește soluția dată de Howarth pentru mișcarea plană din vecinătatea punctului critic. Valorile $G_{0,j}$ sînt date în tabelul 1.

— Schema cu diferențe finite (1)–(3) se programează în limbaj FORTRAN IV la mașina electronică de calcul FELIX—C 256 pentru

$$0,1745 \leq X \leq 1,0490$$

În tabelul 2 sînt date valorile funcției de rețea $g_{i,j}$ calculate cu mașina pentru $j \leq J = 15$. Pentru $j > J = 15$ se aplică formulele (18).

— În vecinătatea suprafeței corpului se rezolvă ecuații de forma

$$f_e \equiv z^3 - z_0^2 z - 0,7028A = 0 \quad (A = 2 \sin 2X) \quad (25)$$

care se deduc imediat din (15). Soluțiile ecuațiilor (25) sînt calculate printr-un procedeu de relaxare și sînt date în tabelul 3 (unde este indicat și reziduul $\tilde{R}$). În tabelul 3 este dată și funcția necunoscută $\psi_\infty(X)$ care apare ca soluție a ecuației $g(X, \psi) = 0$. Avînd valorile funcției de rețea $g_{i,j}$ se poate calcula cu formulele corespunzătoare și viteza u a fluidului în cele trei subdomenii D^s , D^i și D^∞ (pentru $\psi \leq 2\Delta\psi$, $\psi \geq 2\Delta\psi$, $\psi \rightarrow \psi_\infty$).

— Coeficientul $c_{\tau w}$ al tensiunii locale de frecare pe suprafața corpului se va calcula, acum, folosind formula (17). Valorile coeficientului $c_{\tau w}$ sînt date în tabelul 3. Valorile obținute pentru $c_{\tau w}$ coincid cu cele date de alte metode [2]. Funcțiile G , a_1^2 și ψ_∞ sînt reprezentate grafic în fig. 2 și 3, după tabelele 2 și 3.

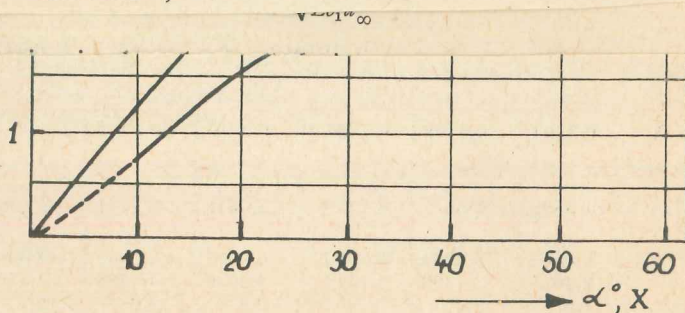


Fig. 3

(Intrat în redacție la 15 noiembrie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Mitchell, A. R. and Thomson, J. Y., *Finite Difference Meth. of the von Mises Equation* ..., ZAMP, v. 9, 1958, sau *Mehanika*, v. 4, 1959 p. 45—53.
2. Schlichting, H., *Teoria pogrnicinogo sloia*, III, Moskva, 1956, p. 142—148.
3. Faiza, Nabi, *Operation Instr. and Descrip. Computer Program for Finite Diff. Eq.*, ..., Office of Aerospace Research, United States Air Force (ARL). 67—0093, May, 1967.
4. Brădeanu Doina, *Convergența soluției ecuației cu diferențe finite a stratului limită în forma lui Mises*. Studia Univ. Babeș-Bolyai, Ser. Math.—Mech., f. 1, 1974, p. 81.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ФОРМЕ МИСЕСА
ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ПРИМЕНЕНИЕ
К ЦИРКУЛЯРНОМУ ЦИЛИНДРУ

(Резюме)

В работе изучается движение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое при помощи численного интегрирования уравнения Мисеса. Автор считает, что область движения, в плоскости Мисеса (x, ψ), делится на три области, в которых применяется метод конечных разностей, интегрирование посредством рядов и экстраполяция. Результаты этой теории применяются затем к вычислению скорости, напряжения и толщины пограничного слоя для обтекания циркулярного цилиндра. Вычисления, приведенные в таблицах, были программированы в языке FORTRAN IV на электронной вычислительной машине FELIX—C 256.

NUMERICAL SOLVING OF THE BOUNDARY LAYER PROBLEM OF MISES FORM
BY THE FINITE-DIFFERENCES METHOD. APPLICATION TO THE CIRCULAR
CYLINDER

(Summary)

In the paper the movement of the viscous incompressible liquid in the boundary layer by means of numerical integration of Mises equation is studied. We consider that the motion field in Mises's plan (x, ψ) is divided into three subdomains in which the finite differences method, the series integration, and extrapolation are applied. The results of this theory are then applied to calculate the speed, skinfriction, and thickness of the boundary layer reckoning the motion of the fluid round the circular cylinder. The results, presented in tables, have been programmed in FORTRAN IV language by the electronic machine FELIX—C 256.