

Author: T. Popoviciu

Title: *Despre alura unor şiruri care tind către numărul “e”*

Published: Stud. Cerc. Mat., **27** (1975) no. 1, pp. 87-110 (in Romanian)

English translation of the title: *On the behavior of certain sequences that tend to the number “e”*

Reviewed: MR0380184, Zbl 0306.40001

Abstract: In French – available (at the end of the paper)

English abstract (translation of the French abstract): In this work we study the allure of the sequence of real numbers (3) for different values of p . This sequence possess the allure (m) studied by us in previous works [3,5]. In Sections 2 and 3 we study the extreme functions (m) given by Definitions 1 and 2. In Section 4 we study the finite and infinite sequences (m) , while in Section 5 we present “elementary” proofs for the cases $p=1/2$ and $p=1/3$. An appendix presents also other analogous proofs.

Contains two Addenda:

I. Show that the sequence $(1+1/n)^{(n+1/2)}$ is decreasing, by Ioan GAVREA

II. On the sequence $(1+1/n)^{(n+1/3)}$, by Alexandru LUPAŞ

English translation of the paper: not available yet.

Version: July 28, 2015.

Previous versions: -

Remarks: -

URL: [http://www.ictp.acad.ro/popoviciu/papers/1975 c -Popoviciu- Despre alura unor siruri care tind catre numarul e.pdf](http://www.ictp.acad.ro/popoviciu/papers/1975%20c%20Popoviciu-Despre%20alura%20unor%20siruri%20care%20tind%20catre%20numarul%20e.pdf)

Complete list of publications of T. Popoviciu available soon at <http://www.ictp.acad.ro/popoviciu> (a project begun in 2014).

Download of the papers posted on the website <http://www.ictp.acad.ro/popoviciu> implies that you have read and agreed to these terms of use <http://www.ictp.acad.ro/popoviciu/agreement>

-

Institutul de Calcul “Tiberiu Popoviciu” al Academiei Române

(“Tiberiu Popoviciu” Institute of Numerical Analysis, Romanian Academy)

<http://www.ictp.acad.ro>

DESPRE ALURA UNOR ȘIRURI CARE TIND CĂTRE NUMĂRUL „e”

DE

TIBERIU POPOVICIU

În această lucrare se studiază alura șirului de numere (3) pentru diferitele valori reale ale lui p . Acest șir are alura (m) studiată de noi în alte lucrări anterioare [3], [5]. Se studiază în §§ 2, 3 extremele funcțiilor (m) date de definițiile 1 și 2. În § 4 se studiază șirurile (m), finite și infinite, iar în § 5 se dau demonstrații „elementare” pentru

cazurile $p = \frac{1}{2}$ și $p = \frac{1}{3}$. În addendă sînt date și alte demonstrații analoage.

§ 1.

1. Importantul număr „e” din analiza matematică se poate defini ca limita șirului de numere $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, unde

$$(1) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

sau a șirului $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, unde

$$(2) \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Șirul (1) este crescător, iar șirul (2) este descrescător, proprietăți bine cunoscute și asupra cărora vom mai reveni.

În cunoscuta carte de probleme a lui G. PÓLYA și G. SZEGÖ [1] se enunță și se demonstrează că șirul $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, unde

$$(3) \quad c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p}, \quad n = 1, 2, \dots$$

este descrescător dacă și numai dacă numărul dat p este $\geq \frac{1}{2}$ (vezi

B. 1, K. 1, problema 168). Se mai arată acolo că pentru $p < \frac{1}{2}$ șirul (3) este crescător de la un rang încolo și că acest lucru are loc sigur începînd de la $n = 1$ pentru $p \leq 0$.

În acest § vom completa puțin rezultatele lui G. PÓLYA și G. SZEGÖ.

2. Monotonia șirului (3) se poate studia ușor examinând alura funcției $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p}$ de variabila reală și pozitivă n . Deoarece această funcție este pozitivă, alura ei de monotonie rezultă imediat din a logaritmului ei. Să considerăm deci funcția de n

$$(4) \quad y_p = (n+p) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

care este continuă și indefinit derivabilă pe toată axa reală pozitivă. Am pus în evidență, ca indice, și parametrul p .

Derivind de două ori în raport cu n , deducem

$$(5) \quad y'_p = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{n+p}{n(n+1)},$$

$$(6) \quad y''_p = \frac{(2p-1)n+p}{n^2(n+1)^2}.$$

Să observăm că avem

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y'_p = 0.$$

Dacă acum $p \geq \frac{1}{2}$, derivata a doua (6) este pozitivă, deci derivata întâi (5) este crescătoare și din (7) rezultă că ea este negativă. Rezultă că funcția y_p este descrescătoare, de unde rezultatul mai sus citat al lui G. PÓLYA și G. SZEGÖ.

Dacă $p \leq 0$, y''_p este o funcție negativă, deci derivata întâi y'_p este descrescătoare și din (7) rezultă că ea este pozitivă. Rezultă că funcția y_p este crescătoare, de unde celălalt rezultat citat al lui G. PÓLYA și G. SZEGÖ.

3. Rămîne să examinăm cazul cînd $0 < p < \frac{1}{2}$.

Funcția y''_p are o singură rădăcină, $\xi_p = \frac{p}{1-2p}$, este pozitivă pentru $n < \xi_p$ și negativă pentru $n > \xi_p$. Din (7) rezultă că $y'_p(\xi_p) > 0$. Pe de altă parte, din $y'_p = \ln \frac{1}{n} - \frac{p}{n} + \ln(1+n) + \frac{p-1}{n+1}$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow 0} y'_p = -\infty$. Se deduce că derivata y'_p are o singură rădăcină $\eta_p < \xi_p$, este negativă pentru $n < \eta_p$ și este pozitivă pentru $n > \eta_p$.

Din (5) rezultă că dacă $p < q$, avem $y'_p(n) > y'_q(n)$. Se deduce că η_p crește cu p și tinde către $+\infty$ cînd numărul pozitiv p tinde către $\frac{1}{2}$.

Funcția (6) și deci funcția $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p}$ sînt, prin urmare, descrescătoare pe intervalul $]0, \eta_p]$ și crescătoare pe intervalul $[\eta_p, +\infty[$.

4. Într-o lucrare recentă [4] m-am folosit de faptul că șirul (3) este crescător pentru $p = \frac{1}{3}$. Acest lucru este o consecință imediată a faptului că $y'_p(1) = \ln 2 - \frac{2}{3} > 0$, deci $\eta_{\frac{1}{3}} < 1$. Dealtfel este ușor de determinat maximul lui p pentru care șirul (3) este crescător. Acesta este numărul p pentru care $y'_p(1) = 0$. Acest număr este egal cu $2 \ln 2 - 1 = 0,38629 \dots > \frac{1}{3}$.

§ 2.

5. Mulțimea de definiția a funcției (4) și deci a funcției $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p}$, se poate descompune în două submulțimi consecutive *) $]0, \eta_p[$, $[\eta_p, +\infty[$, pe fiecare funcția fiind monotonă și de monotonie opusă pe cele două submulțimi. Aceste funcții le-am studiat sub denumirea de funcții (m) în unele din lucrările mele anterioare [2], [3], [5]. De această proprietate de alură se bucură diferite funcții importante cum ar fi funcțiile convexe, neconcave, neconvexe sau concave **). Printre funcțiile (m) distingem funcțiile (m⁺) care sînt necrescătoare și funcțiile (m⁻) care sînt nedescrescătoare pe prima dintre submulțimile consecutive considerate.

O descompunere $(E_1|E_2)$ a mulțimii E de pe axa reală (sau de pe axa reală completă) în două submulțimi consecutive ***) este o împărțire în clase E_1, E_2 a lui E astfel ca să avem $\forall x \in E_1, y \in E_2 \Rightarrow x < y$. Pentru a simplifica expunerea se poate admite și o descompunere $(E_1|E_2)$ în care una din mulțimile E_1, E_2 se reduce la mulțimea vidă. Atunci cealaltă coincide cu E și însăși descompunerea se reduce la E .

Pentru definiția funcțiilor (m⁺) și a funcțiilor (m⁻) se convine, ca de obicei, ca orice funcție definită pe o mulțime avînd cel mult două puncte (deci pe o mulțime avînd numai 1 sau 2 puncte) să fie sau crescătoare sau descrescătoare.

Definițiile sînt atunci următoarele:

DEFINIȚIA 1. Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ****) se zice că este o funcție (m⁺) dacă se poate descompune mulțimea E în două submulțimi consecutive $(E_1|E_2)$ astfel ca funcția să fie necrescătoare pe E_1 (dacă E_1 nu este vidă) și nedescrescătoare pe E_2 (dacă E_2 nu este vidă).

DEFINIȚIA 2. Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ se zice că este o funcție (m⁻) dacă se poate descompune mulțimea E în două submulțimi consecutive $(E_1|E_2)$

*) Vezi mai jos noțiunea de descompunere în două submulțimi consecutive.

**) Așa-zisele funcții de ordinul 1 [5].

***) Se mai poate numi și o tăietură în mulțimea E .

****) În cele ce urmează, numai dacă nu se specifică în mod expres contrariul, vom considera numai funcții finite, definite pe o mulțime a axei reale (nu a axei reale complete).

astfel ca funcția să fie nedescrescătoare pe E_1 (dacă E_1 nu este vidă) și necrescătoare pe E_2 (dacă E_2 nu este vidă).

Este ușor de văzut că dacă funcția f este o funcție (m^+) , respectiv o funcție (m^-) , atunci funcția $-f$ este o funcție (m^-) respectiv o funcție (m^+) și viceversa. În general va fi deci destul să studiem funcțiile (m^+) . Proprietățile funcțiilor (m^-) se deduc trecând la funcția opusă.

6. TEOREMA 1. Pentru ca funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe mulțimea E a axei reale, având cel puțin 3 puncte, să fie o funcție (m^+) este necesar și suficient ca inegalitatea

$$(8) \quad f(x_2) \leq \max(f(x_1), f(x_3))$$

să fie verificată pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in E$, unde $x_1 < x_2 < x_3$.

Această teoremă am dat-o într-o lucrare anterioară [2]. Am revenit asupra ei cu mai multă precizie într-o lucrare ulterioară [3]. Mai jos vom reveni asupra demonstrației ei.

Putem enunța și

TEOREMA 2. Pentru ca funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe mulțimea E a axei reale, având cel puțin 3 puncte, să fie o funcție (m^-) este necesar și suficient ca inegalitatea

$$(9) \quad f(x_2) \geq \min(f(x_1), f(x_3))$$

să fie verificată pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in E$, unde $x_1 < x_2 < x_3$.

Pe baza celor spuse mai sus, se poate considera teorema 2 ca o consecință a teoremei 1. Este deci destul să demonstrăm teorema 1.

Putem distinge, în cazul când E are cel puțin 3 puncte, și funcții strict (m^+) , atunci când în (8) semnul $<$ este totdeauna valabil și funcții strict (m^-) când în (9) semnul $>$ este totdeauna valabil.

Pe baza celor spuse pînă acum, orice funcție monotonă este, în același timp, o funcție (m^+) și o funcție (m^-) . O funcție strict monotonă este strict (m^+) și strict (m^-) . Este util să dăm și alte exemple.

Exemplul 1. Orice funcție neconcavă este o funcție (m^+) . O funcție convexă este strict (m^+) . Însă exemplul funcției (polinomului) x ne arată că o funcție neconcavă poate să fie strict (m^+) fără ca ea să fie convexă. De proprietăți analoage se bucură funcțiile pozitive pentru care o putere (dată) pozitivă a ei este neconcavă sau convexă.

Exemplul 2. Orice funcție pozitivă al cărei logaritm (natural) este neconcav, respectiv convex, este o funcție (m^+) , respectiv o funcție strict (m^+) .

Exemplul 3. Mai general, dacă funcția g este crescătoare, iar funcția f este o funcție (m^+) , respectiv strict (m^+) , atunci funcția compusă $g \circ f$ (pe mulțimea, cu cel puțin 3 puncte, pe care ea este definită) este de asemenea o funcție (m^+) , respectiv o funcție strict (m^+) .

Exemplul 4. O funcție derivabilă definită pe un interval și a cărei derivată are o singură rădăcină este o funcție (m^+) sau o funcție (m^-) .

Astfel, funcția $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p}$, studiată în § precedent, este o funcție strict (m^+) .

7. Să trecem acum la demonstrarea teoremei 1.

Condiția este necesară. Fie $(E_1|E_2)$ o descompunere a lui E în două submulțimi consecutive, pe E_1 funcția fiind necrescătoare, iar pe E_2 nedescrescătoare. Fie acum $x_1, x_2, x_3 \in E$, unde $x_1 < x_2 < x_3$. Dacă $x_1, x_2 \in E_1$, avem $f(x_2) \leq f(x_1)$ și inegalitatea (8) este verificată. Dacă $x_2, x_3 \in E_2$, avem $f(x_2) \leq f(x_3)$ și inegalitatea (8) este încă verificată. Cu aceasta toate posibilitățile sînt epuizate și necesitatea condiției este demonstrată.

Condiția este suficientă. Fie ξ un punct de infim al funcției. Știm că există cel puțin un astfel de punct, care poate să fie finit sau infinit [6]. Există atunci un sir $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ al lui E care tinde către ξ și astfel ca $f(\xi_n) \rightarrow \inf f^*$. Să punem $E'_1 =]-\infty, \xi[\cap E$, $E'_2 =]\xi, +\infty[\cap E$. Mulțimile E'_1, E'_2 pot să fie și vide. Dacă $\xi = -\infty$, mulțimea E'_1 este sigur vidă, iar dacă $\xi = +\infty$ mulțimea E'_2 este sigur vidă.

Vom demonstra acum că funcția este necrescătoare pe E'_1 și nedescrescătoare pe E'_2 . Să demonstrăm, de exemplu, că pe E'_1 (avînd cel puțin 2 puncte) funcția este necrescătoare. Pentru aceasta fie $x_1, x_2 \in E'_1$, unde $x_1 < x_2$ și să presupunem că, contrar a ceea ce trebuie demonstrat, am avea $f(x_2) > f(x_1)$. Atunci $f(x_2) > \inf f$ și rezultă din definiția punctelor ξ_n , că există un indice n astfel ca $x_2 < \xi_n$ și $f(\xi_n) < f(x_2)$. Avem atunci $f(x_2) > \max(f(x_1), f(\xi_n))$ care contrazice inegalitatea (8). Rezultă deci că avem $f(x_2) \leq f(x_1)$. Cu aceasta proprietatea este demonstrată. La fel se arată că pe E'_2 funcția este nedescrescătoare.

În ce privește descompunerea $(E_1|E_2)$ corespunzătoare a lui E , dacă $\xi \in E$, putem lua $E_1 = E'_1$, $E_2 = E'_2$, iar dacă $\xi \in E$, este suficient să mai adăugăm acest punct la E'_1 sau E'_2 .

Să reținem următoarea

CONSECINȚA 1. Condiția necesară și suficientă ca mulțimea de definiție E (avînd cel puțin 3 puncte) a funcției $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ să se descompună în două submulțimi consecutive $(E_1|E_2)$, pe fiecare funcția fiind monotonă și de monotonie opusă pe cele două submulțimi, este ca funcția sau opusul ei $-f$ să verifice inegalitatea (8) pentru orice sistem de trei puncte $x_1, x_2, x_3 \in E$, unde $x_1 < x_2 < x_3$.

§ 3.

8. Extremele (infimele, minimele, supremele și maximele) unei funcții (m^+) se bucură de proprietăți analoage cu extremele funcțiilor monotone și ale funcțiilor neconcave.

Vom avea nevoie de următoarea

LEMA 1. Condiția necesară și suficientă ca o submulțime E_1 a unei mulțimi E a axei reale complete**) să fie o intersecție a lui E cu un interval, este ca împreună cu două puncte $a, b \in E_1$, unde $a < b$, orice punct al lui $[a, b] \cap E$ să aparțină lui E_1 .

Condiția este evident necesară.

*) $\inf f$ este infimul funcției f pe E .

**) Axa reală completă $\mathbb{R}^\#$ este egală cu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Condiția este suficientă. Dacă E_1 este format dintr-un singur punct x_0 , proprietatea este banală căci $E_1 = [x_0, x_0] \cap E$. Să presupunem acum că E_1 are cel puțin două puncte și că condiția din enunț este îndeplinită. Fie atunci $\alpha = \inf E_1$, $\beta = \sup E_1$ extremitățile lui E_1 . Avem $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ și din definiția numerelor α, β rezultă că

$$(10) \quad E_1 \subseteq [\alpha, \beta] \cap E.$$

Vom demonstra că avem și

$$(11) \quad]\alpha, \beta[\cap E \subseteq E_1.$$

Dacă membrul întâi nu are nici un punct, relația este evidentă. Dacă $x_0 \in]\alpha, \beta[\cap E$, avem $\alpha < x_0 < \beta$ și din definiția extremităților α, β rezultă că există punctele $a, b \in E_1$ astfel ca $\alpha \leq a < x_0 < b \leq \beta$. Pe baza ipotezei din lema, avem atunci și $x_0 \in E_1$. Cu aceasta relația (11) este demonstrată. Din (10) și (11) rezultă că E_1 coincide cu intersecția lui E cu unul din intervalele având ca extremități pe α și β .

Cu aceasta lema 1 este demonstrată.

Este clar că E_1 , intersecție a lui E cu un interval, poate să fie, în același timp, egală și cu intersecția lui E cu un interval având extremitățile diferite de numerele α și β care intervin în demonstrația de mai sus a lemei.

9. Vom demonstra acum următoarea

TEOREMA 3. *Mulțimea punctelor de infim ale funcției $(m^+) f: E \rightarrow \mathbb{R}$ este intersecția închiderii complete $\bar{E}^\#$ a lui E cu un interval.*

Notăm cu $\bar{E}^\#$ închiderea completă a mulțimii $\bar{E}$, adică reunirea lui E cu mulțimea punctelor sale de acumulare finite și infinite.

Un punct de infim $x_0 \in \bar{E}^\#$ al funcției f este orice punct pentru care $\forall V(x_0) \exists V(x_0) \cap E$ unde $V(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0 [6].

Mulțimea punctelor de infim nu este niciodată vidă. Rezultă că dacă funcția are un singur punct de infim teorema e demonstrată (căci un punct singur formează un interval).

În cazul contrar, fie a, b , unde $a < b$, două puncte de infim ale funcției f . Pe baza lemei este suficient să demonstrăm că orice punct al lui $]a, b[\cap \bar{E}^\#$ (dacă există un astfel de punct) este un punct de infim al funcției f .

Distingem acum două cazuri.

Cazul 1. $\inf f = -\infty$. Vom arăta că în acest caz intervalul $]a, b[$ nu conține nici un punct al lui E . Să presupunem contrariul, deci că am avea $x_0 \in]a, b[\cap E$. Atunci în orice vecinătate a lui a și în orice vecinătate a lui b putem găsi (cel puțin) un punct pe care valoarea funcției să fie $< f(x_0) - 1$. Fie deci $x_1, x_2 \in E$, astfel ca $x_1 < x_0 < x_2$ și $f(x_1) < f(x_0) - 1, f(x_2) < f(x_0) - 1$. Din teorema 1 rezultă $f(x_0) \leq \max(f(x_1), f(x_2)) < f(x_0) - 1$, deci $f(x_0) < f(x_0) - 1$, ceea ce este imposibil. Cu aceasta proprietatea este demonstrată.

Din cele spuse rezultă că funcția f nu are nici un punct de infim în intervalul deschis $]a, b[$ și cu aceasta, pe baza lemei 1, teorema 3 este demonstrată în acest caz.

Din analiza de mai sus rezultă că dacă f este o funcție (m^+) și nu este mărginită inferior, ea are cel mult două puncte de infim.

Exemplul 5. Funcția $(m^+) f(x) = \frac{1}{x} - x$ pentru $x \in]-\infty, 0[$,

și funcția $f(x) = x - a - \frac{1}{x-a}$ pentru $x \in]a, +\infty[$, au un singur punct de infim (0 respectiv a), iar funcția (m^+)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - x & \text{pentru } x \in]-\infty, 0[, \\ x - a - \frac{1}{x-a} & \text{pentru } x \in]a, +\infty[, \end{cases}$$

unde $a > 0$, are două puncte de infim (pe 0 și pe a).

Funcțiile considerate sînt, respectiv, definite pe mulțimile $]-\infty, 0[$, $]a, +\infty[$ și $]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$.

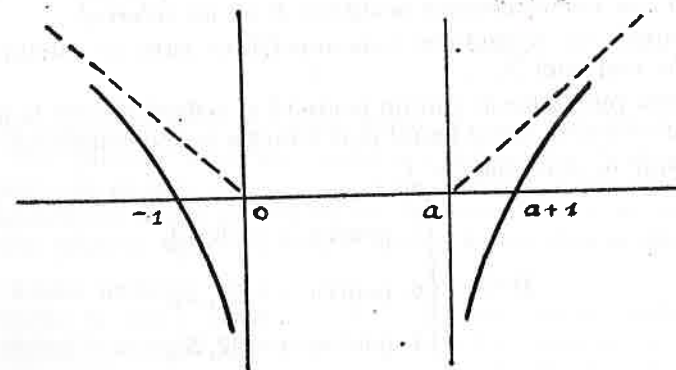


Fig. 1

Cazul 2. $\inf f > -\infty$, deci $\inf f$ este un număr finit. Cu alte cuvinte funcția f este mărginită inferior.

Înainte de a merge mai departe vom demonstra o proprietate care ne va fi utilă mai departe. Această proprietate se exprimă prin

LEMA 2. *Dacă a, b , unde $a < b$, sînt două puncte de infim ale funcției f (care este o funcție (m^+)), atunci orice punct $x_0 \in]a, b[\cap E$ (dacă există un astfel de punct) este punct de minim al funcției f .*

Un punct de minim x_0 este un punct pe care funcția își atinge infimul, deci $f(x_0) = \inf f$. Un punct de minim este totdeauna un punct de infim.

Să trecem la demonstrarea lemei 2.

Din definiția infimului rezultă că

$$(12) \quad \inf f \leq f(x_0).$$

Există două puncte $x_1, x_2 \in E$ astfel ca $x_1 < x_0 < x_2$ și $f(x_1) < \inf f + \varepsilon, f(x_2) < \inf f + \varepsilon$, ε fiind un număr pozitiv oarecare, dat dinainte. Din teorema 1 rezultă atunci $f(x_0) \leq \max(f(x_1), f(x_2)) < \inf f + \varepsilon$, deci

$$(13) \quad f(x_0) < \inf f + \varepsilon.$$

Deoarece ε este oarecare, din (12) și (13) se deduce că $f(x_0) = \inf f$. Tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Să revenim la demonstrarea teoremei 3 în cazul 2. Observăm că orice punct $x_0 \in]a, b[\cap E^\#$ (dacă există un astfel de punct) este un punct de infim. Într-adevăr, există atunci o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 care aparține lui $]a, b[\cap E$ (există atunci astfel de puncte) sînt puncte de minim. Se deduce că $\inf f = \inf_{V(x_0)} f$ și, prin urmare, x_0 este un punct de infim.

10. Lemele 1 și 2 permit să enunțăm următoarea

TEOREMA 4. *Mulțimea punctelor de minim ale funcției $(m^+): E \rightarrow \mathbb{R}$ este sau vidă sau este intersecția mulțimii E cu un interval.*

Este inutil să reproducem demonstrația care se deduce imitînd demonstrația teoremei 3.

Mulțimea punctelor de minim poate să se reducă efectiv la un interval și aceasta nu numai în cazul banal cînd funcția este o constantă.

Exemplul 6. Funcția (m^+)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{pentru } x \in]1, 2], \\ 1 & \text{pentru } x \in]2, 3], \end{cases}$$

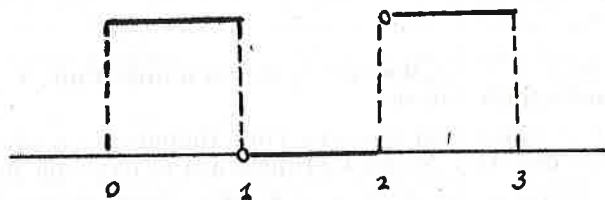


Fig. 2

definită pe intervalul $[0, 3]$ are toate punctele intervalului semiînchis $]1, 2]$ ca puncte de minim. Mulțimea punctelor de infim este intervalul închis $[1, 2]$.

Să se noteze că punctele de suprem și punctele de maxim ale funcțiilor (m^-) se bucură de proprietăți analoge. Cititorul poate enunța și demonstra teoreme analoge cu teoremele 3 și 4.

11. Putem examina și punctele de suprem și punctele de maxim ale unei funcții (m^+) . Proprietățile lor le vom deduce din acelea corespunzătoare funcțiilor monotone. Un punct $x_0 \in E$ al funcției $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ este un punct de maxim dacă este un punct de suprem atins, deci dacă $f(x_0) = \sup f$.

Este util să introducem noțiunile de segment inițial și de segment final al unei mulțimi al axei reale complete.

Un *segment inițial*, respectiv un *segment final* al mulțimii $E \subseteq \mathbb{R}^\#$, este o submulțime nevidă E_1 a lui E astfel ca, sau $E_1 = E$, sau $E_1 \subset E$, și orice punct al lui E_1 este la stînga, respectiv la dreapta oricărui punct al lui $E \setminus E_1$. Dacă $(E_1 | E_2)$ este o descompunere a lui E în două submulțimi consecutive, atunci E_1 (presupus nevid) este un segment inițial, iar E_2 (presupus nevid) este un segment final al lui E . Dealtfel orice segment inițial și orice segment final al lui E este de această formă.

Un segment inițial E_1 , respectiv un segment final E_2 al lui E este caracterizat de proprietatea că

$$x_1 \in E_1, \forall x \in E \Rightarrow x \in E_1, \quad x < x_1$$

respectiv

$$x_2 \in E_2, \forall x \in E \Rightarrow x \in E_2, \quad x > x_2$$

Orice submulțime a lui E de forma $[-\infty, \beta] \cap E$ sau $[-\infty, \beta[\cap E$ (β finit sau infinit) este un segment inițial și reciproc, orice segment inițial este de una din aceste forme. O proprietate analogă are loc pentru segmentele finale și intervalele de forma $[\alpha, +\infty]$ sau $]\alpha, +\infty]$ (α finit sau infinit). Cititorul singur poate demonstra aceste proprietăți.

12. Avem următoarea

TEOREMA 5. *Dacă funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ este nedescrescătoare (necrescătoare), atunci mulțimea punctelor sale de infim respectiv mulțimea punctelor sale de suprem, este un segment inițial (final), respectiv un segment final (inițial) al închiderii complete $\bar{E}^\#$ a lui E .*

Pentru fixarea ideilor să presupunem că funcția este nedescrescătoare.

Observăm întâi că punctul $\inf E$ (extremitatea stîngă a lui E) este un punct de infim al funcției.

Distingem acum două cazuri.

Cazul 1. $\inf f = -\infty$. Atunci $a = \inf E$ este punct de infim. Vom demonstra că nu avem în acest caz nici un alt punct de infim. Să presupunem contrariul și fie b un al doilea punct de infim situat la dreapta lui a . Fie $x_1 \in E$ în vecinătatea lui a și la stînga lui b . Există atunci un $x_2 \in E$ într-o vecinătate a lui b astfel ca $x_1 < x_2$ și $f(x_2) < f(x_1)$. Aceasta contrazice faptul că funcția f este nedescrescătoare.

Cu aceasta proprietatea este demonstrată.

Dacă deci funcția nedescrescătoare f nu este mărginită inferior, ea are un singur punct de infim și acesta coincide cu punctul $\inf E$.

Teorema 5 este demonstrată în acest caz.

Cazul 2. $\inf f > -\infty$. Funcția este atunci mărginită inferior. Vom demonstra întâi, în acest caz, o leamnă analoagă cu lema 2.

LEMA 3. Dacă a este un punct de infim al funcției f (nedescrescătoare), atunci orice punct x_0 al lui E situat la stînga lui a (dacă există un astfel de punct) este punct de minim al funcției f .

Demonstrarea este asemănătoare cu aceea a lemei 2. Avem inegalitatea (12) și există, pentru orice $\varepsilon > 0$, un punct x_1 astfel ca $x_0 < x_1$ și $f(x_1) < \inf f + \varepsilon$. Din monotonia funcției rezultă atunci inegalitatea (13). În fine, ca la lema 2, rezultă $f(x_0) = \inf f$.

Teorema 5 rezultă acum pentru funcțiile nedescrescătoare.

În mod analog demonstrăm proprietatea referitoare la supremale funcțiilor nedescrescătoare. Dacă funcția nu este mărginită superior, punctul $\sup E$ este singurul punct de suprem, iar în cazul nostru putem folosi o leamnă analoagă cu lema 3.

În fine, în mod analog se face demonstrația teoremei și în cazul funcțiilor necrescătoare. Dealtfel este destul să trecem de la funcția f la funcția opusă $-f$ pentru a obține proprietățile analoage cu cele stabilite în cazul funcțiilor nedescrescătoare. Va fi suficient să intervertim infimele cu supremale și minimele cu maximele. Cititorul singur poate să restabilească aceste demonstrații.

De asemenea nu este necesar să dăm demonstrarea următoarei

TEOREMA 6. Dacă funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ este nedescrescătoare (necrescătoare), atunci mulțimea punctelor sale de minim respectiv mulțimea punctelor sale de maxim, este sau vidă sau este un segment inițial (final), respectiv un segment final (inițial) al mulțimii E .

13. Să determinăm mulțimea supremelor și mulțimea maximelor unei funcții (m^+).

Va fi util să punem în evidență întâi două proprietăți ale segmentelor inițiale și segmentelor finale. Aceste proprietăți sînt enunțate prin lemele 4 și 5 de mai jos.

LEMA 4. Un segment inițial al unui segment inițial este un segment inițial al lui E .

O proprietate analoagă are loc pentru segmentele finale.

Demonstrarea nu prezintă nici o dificultate. Să demonstrăm prima parte a lemei (cea referitoare la segmentele inițiale).

Fie E_1 un segment inițial al lui E și $E_{1,1}$ un segment inițial al lui E_1 . Va trebui să arătăm că $E_{1,1}$ este un segment inițial al lui E . Să punem $E_2 = E \setminus E_1$, $E_{1,2} = E_1 \setminus E_{1,1}$. Dacă $E_1 = E$ nu este nimic de demonstrat. În cazul contrar, E_2 nu este vid. Dacă atunci $E_{1,1} = E_1$, este clar că $E_{1,1}$ este un segment inițial al lui E . În cazul contrar $E_{1,2}$ nu este vid. Să punem atunci $E_3 = E_{1,2} \cup E_2 = E \setminus E_{1,1}$. Se verifică ușor că orice punct al lui $E_{1,1}$ este la stînga oricărui punct al lui E_3 . Cu alte cuvinte $(E_{1,1} | E_3)$ este o descompunere a lui E în două submulțimi consecutive. $E_{1,1}$ este deci un segment inițial al lui E . Cu aceasta partea întâi a lemei 4 este demonstrată.

În mod analog se demonstrează și partea a doua a lemei.

LEMA 5. Dacă E_1 este un segment inițial al mulțimii E , atunci închiderea completă $\bar{E}_1^\#$ a lui E_1 este un segment inițial al închiderii complete $\bar{E}^\#$ a lui E .

O proprietate analoagă are loc pentru segmentele finale.

Să notăm cu β ($-\infty < \beta \leq +\infty$) supremul lui E_1 și fie $a \in \bar{E}_1^\#$. Vom arăta că orice punct al lui $\bar{E}^\#$ situat la stînga lui a aparține lui $\bar{E}_1^\#$. Observăm întâi că $a \leq \beta^*$ și fie $x_0 \in \bar{E}^\#$ astfel ca $x_0 < a$. Orice punct $x_1 \in E$ situat într-o suficient de restrînsă vecinătate a lui x_0 este la stînga lui a . De asemenea, orice punct $x_2 \in E_2$ verifică inegalitatea $\beta \leq x_2^{**}$ și deci este la dreapta lui x_1 . Rezultă de aici că $x_0 \in \bar{E}_1^\#$, tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

În mod analog se demonstrează proprietatea referitoare la segmentele finale.

14. Să revenim acum la studiul supremelor și maximelor funcțiilor (m^+).

Avem următoarea

TEOREMA 7. Mulțimea supremelor unei funcții (m^+) $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ este:

1. sau un segment inițial al lui $\bar{E}^\#$,
2. sau un segment final al lui $\bar{E}^\#$,
3. sau reunirea unui segment inițial și a unui segment final al lui $\bar{E}^\#$.

Dacă funcția este monotonă proprietatea rezultă din teorema 5. În cazul contrar, fie $(E_1 | E_2)$ o descompunere a lui E în două submulțimi consecutive, unde E_1, E_2 nu sînt vide pe prima funcția fiind necrescătoare, iar pe a doua nedescrescătoare. Atunci din $E = E_1 \cup E_2$ (și $E_1 \cap E_2 = \emptyset$) rezultă că $\sup E = \max(\sup E_1, \sup E_2)$ și proprietatea se deduce aplicînd lemele 4 și 5. Se vede că sîntem în cazurile 1, 2 respectiv 3 ale teoremei 7 după cum $\sup E_1 >, <$ respectiv $= \sup E_2$.

La fel se demonstrează

TEOREMA 8. Mulțimea maximelor unei funcții (m^+) $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ este sau vidă sau nevidă și:

1. sau un segment inițial al lui E ,
2. sau un segment final al lui E ,
3. sau reunirea unui segment inițial și a unui segment final al lui E .

Cititorul singur poate da exemple care să ilustreze fiecare caz posibil. În cazul exemplului 6, $[0, 1] \cup [2, 3]$ este mulțimea supremelor și $[0, 1] \cup [2, 3]$ este mulțimea maximelor funcției.

Infimele și minimele funcțiilor (m^-) se bucură de proprietăți analoage. Se pot ușor enunța analoagele teoremelor 7 și 8.

Lemele 4 și 5 se pot extinde la intersecțiile unei mulțimi cu un interval. Recomandăm cititorului să studieze aceste extinderi, pe care, dealtfel, nu le vom folosi în această lucrare.

În cazul cînd funcția este strict (m^+) sau strict (m^-) se pot obține rezultate ceva mai precise. O astfel de funcție nu poate avea mai mult de două puncte de minim și mai mult de două puncte de maxim. Pentru

*) Această inegalitate se bazează pe proprietatea $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A}^\# \subseteq \bar{B}^\#$.

**) Această inegalitate se bazează pe inegalitatea $\sup E_1 \leq \inf E_2$.

o asemenea funcție se poate preciza și numărul descompunerilor $(E_1|E_2)$ în submulțimi consecutive de monotonie opusă. Este inutil să insistăm asupra acestui lucru. În § următor vom reveni în cazul șirurilor.

15. Se pot defini și funcții (m) , funcții (m^+) și funcții (m^-) nu neapărat finite și chiar pe mulțimi ale axei reale complete. Proprietățile enumerate până acum rămân în linii generale adevărate. Doar mici diferențe se pot semnală. Astfel, de exemplu, o funcție (m^+) , chiar dacă nu este mărginită, poate avea mai mult de un punct, și chiar o infinitate de puncte, de infim și de suprem.

Exemplul 7. Funcția

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pentru } x \in [0, 1[\cup]2, 3], \\ 1 & \text{pentru } x \in \{1, 2\}, \\ -\infty & \text{pentru } x \in]1, 2[, \end{cases}$$

este o funcție (m^+) . Mulțimile punctelor de infim, de minim, de suprem și de maxim sînt, respectiv, $[1, 2]$, $]1, 2[$, $[0, 1] \cup [2, 3]$, $[0, 1[\cup]2, 3]$. Nu ne vom ocupa mai pe larg de astfel de funcții.

§ 4.

16. Un șir finit de numere reale $(s_v)_{v=1}^n$ este o funcție definită pe secțiunea $1, 2, \dots, n$ a șirului numerelor naturale, iar un șir infinit de numere reale $(s_n)_{n=1}^\infty$ este o funcție definită pe șirul $\mathbb{N}$ al numerelor naturale. La șirurile finite și infinite putem deci extinde noțiunea de șir (m) . Șirul (finit sau infinit) se zice că este un șir (m) , un șir (m^+) , un șir strict (m^+) , un șir (m^-) , respectiv un șir strict (m^-) , după cum această funcție este o funcție (m) , o funcție (m^+) , o funcție strict (m^+) , o funcție (m^-) , respectiv o funcție strict (m^-) .

Rezultă imediat că un șir (m^+) $(s_v)_{v=1}^n$ ($n \geq 3$) sau $(s_n)_{n=1}^\infty$ este caracterizat de inegalitățile

$$(14) \quad \forall_{i < j < k} s_j \leq \max(s_i, s_k),$$

iar un șir strict (m^+) de inegalitățile

$$(15) \quad \forall_{i < j < k} s_j < \max(s_i, s_k).$$

Șirurile (m^-) și șirurile strict (m^-) sînt caracterizate de inegalități analoge.

Pentru motivele arătate în § 2 este suficient să studiem numai șirurile (m^+) și șirurile strict (m^+) .

17. Înainte de a merge mai departe vom studia câteva proprietăți ajutătoare.

LEMA 6. Dacă a, b, c, d sînt numere reale, din

$$(16) \quad b < \max(a, c), \quad c < \max(b, d)$$

rezultă că avem și

$$(17) \quad b < \max(a, d), \quad c < \max(a, d).$$

Într-adevăr, din (16) rezultă *

$$\begin{aligned} \max(b, c) &< \max(\max(a, c), \max(b, d)) = \\ &= \max(\max(b, c), \max(a, d)), \end{aligned}$$

de unde se deduce că $\max(b, c) < \max(a, d)$ ** și deci inegalitățile (17).

Proprietatea se poate generaliza prin

LEMA 7. Oricare ar fi $i, j, k \in \mathbb{N}$, unde $i < j < k$, din inegalitățile

$$(18) \quad s_{v+1} < \max(s_v, s_{v+2}), \quad v = 1, 2, \dots, k-2$$

rezultă inegalitatea

$$(19) \quad s_j < \max(s_i, s_k).$$

Demonstrația se poate face prin inducție completă. Avem $k - i \geq 2$. Pentru $k - i = 2$ nu e nimic de demonstrat căci inegalitățile (18), (19) coincid. Să presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru $k - i \leq n$ ($n \geq 2$) și să arătăm că ea va fi adevărată și pentru $k - i = n + 1$. Să presupunem deci că avem $k - i = n + 1$ ($n \geq 2$). Vom distinge mai departe două cazuri.

Cazul 1. $j > i + 1$. Atunci $j - i \leq n$, $k - i - 1 = n$. Dacă punem $a = s_i$, $b = s_{i+1}$, $c = s_j$, $d = s_k$, avem, prin ipoteză, $s_j < \max(s_i, s_{k-1})$, $s_j < \max(s_{i+1}, s_k)$ și pe baza lemei 6, deducem inegalitatea (19).

Cazul 2. $j = i + 1$. Avem $k - i - 1 = n$, $k - j = n$. Dacă acum punem $a = s_i$, $b = s_j$, $c = s_{k-1}$, $d = s_k$, avem, prin ipoteză $s_{i+1} < \max(s_i, s_j)$, $s_{k-1} < \max(s_j, s_k)$ și, tot pe baza lemei 6, deducem inegalitatea (19).

Cu aceasta lema 7 este demonstrată.

18. Putem acum enunța

TEOREMA 9. 1. O condiție necesară și suficientă ca șirul $(s_v)_{v=1}^n$, unde $n \geq 3$, să fie strict (m^+) este ca inegalitatea

$$(20) \quad s_{v+1} < \max(s_v, s_{v+2})$$

să fie verificată pentru $v = 1, 2, \dots, n-2$.

2. O condiție necesară și suficientă ca șirul infinit $(s_n)_{n=1}^\infty$ să fie strict (m^+) este ca inegalitatea (20) să fie verificată pentru $v = 1, 2, \dots$.

Demonstrația este imediată și o putem da deodată atât pentru șiruri finite, cât și infinite. Într-adevăr, pentru ca un șir infinit $(s_n)_{n=1}^\infty$ să fie strict (m^+) este necesar și suficient ca secțiile $(s_v)_{v=1}^n$, ale acestui șir, să fie toate strict (m^+) , pentru $n = 3, 4, \dots$.

Să trecem la demonstrarea teoremei 9.

Condiția este necesară deoarece inegalitățile (20) sînt printre inegalitățile de definiție (15).

*) „Operația” max este asociativă și comutativă.

**) Avem $a < \max(a, b) \Leftrightarrow a < b$.

Condiția este suficientă. Într-adevăr, din lema 7 rezultă că dacă, inegalitățile (20) sînt satisfăcute, toate inegalitățile (15) sînt satisfăcute.

Dacă șirul este finit și are $n (\geq 3)$ termeni, numărul inegalităților (15) este egal cu $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ pe cînd al inegalităților (20), care sînt necesare pentru ca șirul să fie strict (m^+) , este numai $n-2$. Acest număr este totdeauna mai mic („mult mai mic” pentru n destul de mare) decît $\binom{n}{3}$, pentru $n > 3$.

19. Vom face două observări importante.

Observarea 1. La prima vedere s-ar părea că teorema 9 se poate extinde și la șiruri (m^+) (care nu sînt neapărat șiruri strict (m^+)). Cu alte cuvinte că din inegalitățile în sens larg $s_{v+1} \leq \max(s_v, s_{v+2})$, pentru toate valorile posibile ale lui v , ar rezulta că șirul considerat (finit sau infinit) este un șir (m^+) . Acest lucru nu este adevărat.

Exemplul 8. Să presupunem că $s_1 = s_2 = s_5 = s_6 = 1$, $s_3 = s_4 = s_7 = 0$. Se verifică ușor că avem $s_{v+1} \leq \max(s_v, s_{v+2})$ pentru $v = 1, 2, 3, 4, 5$, însă $s_3 < \max(s_1, s_5)$, $s_5 > \max(s_3, s_7)$ și deci șirul nu este un șir (m^+) .

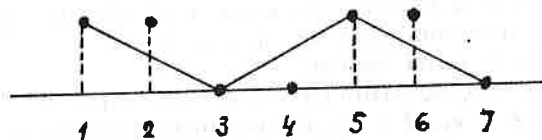


Fig. 3

Observarea 2. Proprietatea exprimată de lema 7 este analoaga unei consecințe a ceea ce D. POMPEIU numește lema lui Baire (a se vedea [6], în special teorema 48.2). Analogia se constată mai pregnant pe o extindere a acestei leme la diferențele divizate de ordinul al doilea. Această extindere este următoarea:

Fie $(x_v)_{v=1}^m$ ($m \geq 3$) un șir crescător de puncte pe axa reală și f o funcție reală definită pe aceste puncte. Avem atunci următoarea formulă de medie (a diferențelor divizate de ordinul 2)

$$(21) \quad [x_1, x_n, x_m; f] = \sum_{v=1}^{m-2} \gamma_v [x_v, x_{v+1}, x_{v+2}; f],$$

unde $1 < n < m$, coeficienții γ_v , $v = 1, 2, \dots, m-2$ sînt pozitivi și independenți de funcția f , iar suma lor este egală cu 1. Această din urmă proprietate se obține aplicînd formula (21) funcției (constantei) $f = 1$. Notăția diferențelor divizate este cea obișnuită, deci

$$[a, b, c; f] = \frac{[a, b; f] - [b, c; f]}{a - c},$$

unde

$$[a, b; f] = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Pentru orientarea mai bună a cititorilor dăm și valorile explicite ale coeficienților γ_v ,

$$\gamma_v = \begin{cases} \frac{(x_{v+1} - x_1)(x_{v+2} - x_v)}{(x_m - x_1)(x_n - x_1)}, & v = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{(x_m - x_{v+1})(x_{v+2} - x_v)}{(x_m - x_n)(x_m - x_1)}, & v = n, n+1, \dots, m-2, \end{cases}$$

unde, în cazul $n = m-1$, nu se păstrează decît primele $m-2$ formule.

Se vede că dacă diferențele divizate din membrul al doilea al formulei (21) sînt toate pozitive, respectiv nenegative, diferența divizată $[x_1, x_n, x_m; f]$ este și ea pozitivă, respectiv nenegativă. Aici se recunoaște o analogie cu lema 7 în care diferențele $\max(s_i, s_k) - s_j$ ar putea juca rolul diferențelor divizate de ordinul 2.

20. Vom da acum cîteva exemple de șiruri (m) . Dacă funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție (m^+) , respectiv o funcție strict (m^+) , atunci orice restrîngere a ei pe o submulțime a lui E avînd cel puțin 3 puncte este de asemenea o funcție (m^+) , respectiv o funcție strict (m^+) . Să presupunem, în particular, că E conține toate numerele naturale. Rezultă atunci că șirul $(f(n))_{n=1}^\infty$ este un șir (m^+) , respectiv un șir strict (m^+) . De aceeași proprietate se bucură și șirul finit $(f(v))_{v=1}^n$ ($n \geq 3$).

Exemplul 9. Pe baza exemplului 4, șirul (3) este un șir strict (m^+) pentru orice p dat.

21. În cazul șirurilor (m^+) sau strict (m^+) , mulțimea extremelor se poate preciza. Pentru a ilustra această afirmație vom face cîteva observații asupra șirurilor infinite $(s_n)_{n=1}^\infty$ strict (m^+) . În acest caz încheierea completă a mulțimii de definiție este $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, iar mulțimea punctelor de infim este formată:

1. sau numai din punctul $+\infty$. Acest lucru are loc dacă și numai dacă șirul este descrescător.

2. sau din cel mult două puncte consecutive ale lui $\mathbb{N}$ (deci două numere naturale consecutive), care sînt în acest caz puncte de minim.

În cazul cînd avem un singur punct de minim, fie r , atunci $\min s_n = s_r$, și există numai următoarele două descompuneri în două submulțimi consecutive de monotonie opusă a lui $\mathbb{N}$,

$$(\{v\}_{v=1}^{r-1} | \{v\}_{v=r}^\infty), (\{v\}_{v=1}^r | \{v\}_{v=r+1}^\infty).$$

În cazul cînd avem punctele de minim $r, r+1$, avem $\min s_n = s_r = s_{r+1}$ și există numai următoarele trei descompuneri în două submul-

țimi consecutive de monotonie opusă a lui $\mathbb{N}$,

$$(\{v\}_{v=1}^{r-1} | \{v\}_{v=r}^{\infty}), (\{v\}_{v=1}^r | \{v\}_{v=r+1}^{\infty}),$$

$$(\{v\}_{v=1}^{r+1} | \{v\}_{v=r+2}^{\infty}).$$

Dacă $v = 1$, mulțimea $\{v\}_{v=1}^{r-1}$ se înlocuiește peste tot cu mulțimea vidă.

În ce privește mulțimea punctelor de suprem, în cazul șirurilor infinite strict (m^+) , se vede că această mulțime este formată din unul sau ambele puncte 1 și $+\infty$. Punctul 1 este singurul punct de maxim dacă și numai dacă $s_1 \geq \lim s_n$. Să se observe că șirul are totdeauna o limită (finită sau infinită).

Exemplul 10. Să revenim la exemplul șirului (3), care este un șir strict (m^+) . Pentru $p \geq \frac{1}{2}$ nu există punct de minim. Pentru $p < \frac{1}{2}$ există totdeauna cel puțin un punct de minim. Pentru un astfel de p avem deci unul sau două puncte de minim, care, în acest din urmă caz, sînt două puncte întregi consecutive. Pentru ca r și $r+1$ să fie ambele puncte de minim este necesar și suficient să avem $c_r = c_{r+1}$, egalitate care are loc pentru valoarea

$$p_r = \frac{(r+1) \ln \frac{r+2}{r+1} - r \ln \frac{r+1}{r}}{\ln \frac{r+1}{r} - \ln \frac{r+2}{r+1}}$$

a lui p .

Avem $c_r < c_{r+1}$ dacă $p < p_r$ și $c_r > c_{r+1}$ dacă $p > p_r$.

Din formula creșterilor finite rezultă că $r < \eta_{p_r} < r+1$, $r = 1, 2, \dots$. Avem prin urmare $\eta_{p_r} < \eta_{p_{r+1}}$, $r = 1, 2, \dots$. Dar, am arătat la nr. 3 că,

η_p este o funcție crescătoare de p și care tinde către $+\infty$ când $p \rightarrow \frac{1}{2}$.

Rezultă dar că funcția inversă a lui η_p este de asemenea crescătoare și tinde către $\frac{1}{2}$ când η_p tinde către $+\infty$. De aici se deduce că șirul $(p_r)_{r=1}^{\infty}$

este crescător și tinde către $\frac{1}{2}$ pentru $r \rightarrow +\infty$.

Avem, în fine, $\min_n c_n = c_r$ pentru $p_{r-1} < p < p_r$.

22. Un șir finit $(s_v)_{v=1}^n$ ($n \geq 3$) se zice *logaritmice neconvex*, respectiv *logaritmice concav* după cum avem

$$(22) \quad s_v^2 \geq s_{v-1}s_{v+1}, \text{ respectiv } s_v^2 > s_{v-1}s_{v+1}$$

pentru $v = 2, 3, \dots, n-1$.

Un șir pozitiv și logaritmice neconvex, respectiv logaritmice concav este un șir (m^-) , respectiv un șir strict (m^-) . Într-adevăr, dacă $s_{v-1}, s_{v+1} > 0$, avem $s_{v-1}s_{v+1} \geq [\min(s_{v-1}, s_{v+1})]^2$ și deci deducem $s_v \geq \min(s_{v-1}, s_{v+1})$, respectiv $s_v > \min(s_{v-1}, s_{v+1})$, pentru orice v .

Putem face și observațiile următoare:

1. Dacă $(s_v)_{v=1}^n$ este un șir pozitiv și logaritmice neconvex, respectiv logaritmice concav, atunci șirul $(s_v)_{v=1}^{n+1}$, unde $s_{n+1} = 0$, este de asemenea logaritmice neconvex, respectiv logaritmice concav.

2. Dacă $(s_v)_{v=1}^n$ este un șir logaritmice neconvex, respectiv logaritmice concav, iar x este un număr pozitiv, atunci șirul $(s_v x^v)_{v=1}^n$ este de asemenea logaritmice neconvex, respectiv logaritmice concav.

Exemplul 11. Dacă n este un număr natural (> 1), șirul

$$(23) \quad \beta_k = \binom{n}{k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

al coeficienților binomiali, este logaritmice concav căci inegalitatea $\binom{n}{k}^2 > \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}$ revine la $n+1 > 0$, pentru $k = 1, 2, \dots, n-1$. Șirul (23) precum și șirul completat cu $\beta_{n+1} = 0$ sînt șiruri strict (m^-) . La fel este și șirul $\left(\binom{n}{k} x^k\right)_{k=0}^n$ unde x este un număr pozitiv, deci șirul termenilor dezvoltării binomiale

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

pentru $x > 0$.

Considerațiile precedente se pot extinde și la șiruri infinite $(s_v)_{v=0}^{\infty}$ logaritmice neconvexe, respectiv logaritmice concave în care caz inegalitățile (22) sînt adevărate pentru $v = 1, 2, \dots$.

La fel se pot defini și studia șirurile logaritmice neconcave și șirurile logaritmice convexe.

23. De multe ori se poate demonstra direct, aplicînd definițiile 1 și 2, că un șir finit sau infinit este un șir (m) . Ne limităm să dăm numai un caz care oarecum generalizează exemplul 11 de mai sus.

Exemplul 12. Să considerăm șirul infinit

$$(24) \quad \gamma_k = \left| \binom{n}{k} \right|, \quad k = 0, 1, \dots$$

unde n este un număr real diferit de un întreg nenegativ.

Dacă $n = -1$ șirul este constant (constanta 1) și deci este un șir (m) . Să presupunem deci că $n \neq -1$. Atunci inegalitatea $\gamma_k < \gamma_{k+1}$, respectiv $\gamma_k > \gamma_{k+1}$ revine la $k+1 < |n-k|$, respectiv $k+1 > |n-k|$ (egalitatea $k+1 = |n-k|$ (nu poate avea loc). Rezultă că dacă $n < -1$ șirul (24) este crescător, iar dacă $-1 < n < 1$ șirul (24) este descres-

cător. În fine, dacă $2m - 1 < n < 2m + 1$, unde m este un număr natural, șirul $(\gamma_k)_{k=0}^m$ este crescător, iar șirul $(\gamma_k)_{k=m}^\infty$ este descrescător. Rezultă deci că, în condițiile impuse lui n , șirul (24) este un șir strict (m^-) .

§ 5.

24. În continuarea ultimelor rînduri ale §§ precedente, reamintim că există diferite demonstrații așa zise „elementare” pentru proprietățile că șirul (1) este crescător, iar șirul (2) este descrescător. Demonstrațiile sînt elementare în sensul că se compară direct, fără a face apel la metodele calculului diferențial, doi termeni consecutivi a_n, a_{n+1} sau b_n, b_{n+1} ai șirurilor considerate. În diferite tratate și cursuri de analiză putem găsi asemenea demonstrații directe. Multe se bazează, ca de exemplu în cursul meu citat [6], pe inegalitatea lui Bernoulli, sau pe alte inegalități analoage.

La o ședință de lucru a Institutului de calcul din Cluj, matematicianul Ioan GAVREA și cercetătorul Alexandru LUPAȘ au dat asemenea demonstrații elementare pentru monotonia șirului (3), în cazurile $p = \frac{1}{2}$ și

$p = \frac{1}{3}$ care ne interesează în mod deosebit. Vom da aceste demonstrații, în unele părți puțin modificate și simplificate, urmînd ca demonstrațiile nemodificate ale autorilor citați mai sus să fie adăugate mai jos sub semnătura lor.

25. Cazul $p = \frac{1}{2}$. Pentru a demonstra că, în acest caz, șirul (3) este descrescător este suficient să demonstrăm că avem $c_n^2 > c_{n+1}^2$ pentru $n \geq 1$. Dacă punem $u = 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$, această inegalitate revine la

$$(25) \quad \left(u + \frac{1}{n(n+1)}\right)^{2n+2} > \frac{n+2}{n} u^{2n+2}.$$

Avem însă

$$(26) \quad \left(u + \frac{1}{n(n+1)}\right)^{2n+2} > u^{2n+2} + \frac{2}{n} u^{2n+1} + \frac{2n+1}{n^2(n+1)} u^{2n} + \frac{2(2n+1)}{3n^2(n+1)^2} u^{2n-1}.$$

Pentru a demonstra inegalitatea (25) este suficient să arătăm că avem

$$u^{2n+2} + \frac{2}{n} u^{2n+1} + \frac{2n+1}{n^2(n+1)} u^{2n} + \frac{2(2n+1)}{3n^2(n+1)^2} u^{2n-1} > \frac{n+2}{n} u^{2n+2},$$

care, prin simplificări succesive, se arată că revine succesiv la

$$u^2 + \frac{2n+1}{2n(n+1)} u + \frac{2n+1}{3n(n+1)^2} > u^3, \quad \frac{2n+1}{2n} u + \frac{2n+1}{3n(n+1)} > u^2,$$

$$\frac{2n+1}{3} > \frac{(n-1)u}{2}, \quad n^2 + 3n + 8 > 0.$$

Ultima inegalitate este evidentă și cu aceasta proprietatea este demonstrată.

Să se observe că inegalitatea (26) rezultă din aplicarea formulei binomului la suma a două numere pozitive și reținerea a numai 4 termeni din membrul al doilea.

Metoda se poate aplica și pentru cazul $p = 1$. Inegalitatea de demonstrat este atunci $b_n > b_{n+1}$, care, cu notațiile de mai sus, revine la

$$\left(u + \frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+1} > u^{n+2}.$$

Dar

$$\left(u + \frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+1} > u^{n+1} + \frac{1}{n} u^n \text{ și } u^{n+1} + \frac{1}{n} u^n > u^{n+2},$$

ultima inegalitate fiind succesiv echivalentă cu

$$u + \frac{1}{n} > u^2, \quad (n+1)^2 > n(n+2) = (n+1)^2 - 1,$$

care este evident.

Dealtfel, odată demonstrat că șirul (3) este descrescător pentru $p = \frac{1}{2}$ și observînd că avem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-\frac{1}{2}},$$

rezultă că el este descrescător și pentru $p > \frac{1}{2}$.

26. Cazul $p = \frac{1}{3}$. Pentru a arăta că în acest caz șirul (3) este

crescător ne vom folosi de o extindere a inegalității lui Bernoulli care se exprimă prin următoarea

LEMA 8. Dacă $n (\geq 2)$ este un număr natural și k un număr natural impar $\leq n - 1$, iar $0 < \lambda < 1$, avem

$$(1 - \lambda)^n > \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{n}{v} \lambda^v$$

(pentru $k = 1$, avem chiar inegalitatea lui Bernoulli).

Demonstrația o putem face prin inducție completă.

Pentru $n = 2$, avem numai $k = 1$ și inegalitatea revine la $(1 - \lambda)^2 > 1 - 2\lambda$ care este imediată. Să presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru n și să o demonstrăm pentru $n + 1$.

Avem, dacă $1 \leq k \leq n - 1$,

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)^{n+1} &> \left(\sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{n}{v} \lambda^v \right) (1 - \lambda) = \\ &= \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{n+1}{v} \lambda^v + (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \lambda^{k+1} > \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{n+1}{v} \lambda^v, \end{aligned}$$

deoarece k este, prin ipoteză, impar. Avem deci

$$(27) \quad (1 - \lambda)^{n+1} > \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{n+1}{v} \lambda^v.$$

Dacă $k = n = \text{impar}$, avem

$$(1 - \lambda)^{n+1} > \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n+1}{v} \lambda^v + \lambda^{n+1},$$

de unde rezultă inegalitatea (27) și pentru această valoare a lui k .

Cu aceasta lema 8 este demonstrată.

Pentru a demonstra acum monotonia șirului (3) pentru $p = \frac{1}{3}$ este suficient să arătăm că avem $c_n^3 < c_{n+1}^3$, deci

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+4}$$

sau

$$(28) \quad \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{3n+3} > \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

pentru $n = 1, 2, \dots$

Dacă aplicăm lema 8 pentru $k = 3$, avem

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{3n+3} &> 1 - \frac{3}{n+1} + \frac{3(3n+2)}{2(n+1)^3} - \frac{(3n+2)(3n+1)}{2(n+1)^5} = \\ &= \frac{n(2n^4 + 4n^3 + 5n^2 - n - 2)}{2(n+1)^5}. \end{aligned}$$

Inegalitatea

$$\frac{n(2n^4 + 4n^3 + 5n^2 - n - 2)}{2(n+1)^5} > \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

revine însă la

$$n^3 + n^2 - 6n - 4 = (n-3)^3 + 10(n-3)^2 + 27(n-3) + 14 > 0,$$

care este verificată pentru $n \geq 3$.

Inegalitatea (28) este deci adevărată pentru $n \geq 3$.

Dar inegalitatea (28) este adevărată și pentru $n = 1$ și $n = 2$, căci pentru aceste valori ale lui n ea revine la $3^7 = 2187 > 2048 = 2^{11}$, $2^{27} = 134217728 > 129140163 = 3^{17}$ respectiv.

Cu aceasta monotonia șirului (3) pentru $p = \frac{1}{3}$ este demonstrată.

Totodată, din

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-\frac{1}{3}}$$

rezultă că șirul (3) este crescător și pentru orice $p < \frac{1}{3}$.

BIBLIOGRAFIE

1. PÓLYA G., SZEGÖ G. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (1925).
2. POPOVICIU T. *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. Acad. Roumaine, **XX**, 45-49 (1938).
3. — *Asupra funcțiilor de o variabilă reală a căror mulțime de definiție este reuniunea a două submulțimi de monotonie opusă*, Analele Acad. R.P.R., **III**, 1, 16 (1950).
4. — *Über die Verwendung der Tabellen Spezieller Funktionen*, ISNM, B. 26 (1974).
5. — *Les fonctions convexes*, Actualités Sci. et Ind. 992, Paris (1944).
6. — *Curs de Analiză Matematică*, partea II, 1972.

ADDENDA

I.

SĂ SE ARATE CĂ ȘIRUL $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}}$, $n = 1, 2, \dots$ ESTE DESCRESCĂTOR

de

Ioan GAVREA

Să demonstrăm întâi inegalitatea

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+4}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2}} < \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Inegalitatea este echivalentă cu

$$(n+1)^2 \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+4} < n(n+2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2}.$$

Înmulțind ambii membri ai inegalității cu $\frac{(n+1)^2}{n^2}$, obținem

$$\frac{(n+1)^4}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+4} < n(n+2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+4}.$$

Avem

$$\begin{aligned} n(n+2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+4} &= n(n+2) \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right]^{2n+4} > \\ &> n(n+2) \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+4} + 2(n+2) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+3} \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(n+2)(2n+3)}{2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} \cdot \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(n+2)(2n+3)(2n+2)}{6} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n^3(n+1)^3}\right] \end{aligned}$$

sau

$$n(n+2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+4} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+4} \left[n^2 + 4n + 4 + \frac{2n+3}{n} + \frac{(2n+3)(2n+2)}{3(n+2)n^3}\right].$$

Efectuând calculele se obține

$$n(n+2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+4} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+4} \frac{3n^5 + 18n^4 + 42n^3 + 49n^2 + 28n + 6}{3n^2(n+2)}.$$

Rămâne să arătăm că

$$\frac{3n^5 + 18n^4 + 42n^3 + 49n^2 + 28n + 6}{3n^2(n+2)} > \frac{(n+1)^4}{n^2}.$$

Inegalitatea este echivalentă cu

$$3n^5 + 18n^4 + 42n^3 + 49n^2 + 28n + 6 > 3(n+2)(n+1)^4$$

sau

$$3n^5 + 18n^4 + 42n^3 + 49n^2 + 28n + 6 > 3n^5 + 18n^4 + 42n^3 + 48n^2 + 27n + 6$$

sau $n^2 + n > 0$, care este o inegalitate evidentă.

Avem acum

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n + \frac{3}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

și rezultă că

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+4}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+2}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}} < \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}} = 1,$$

deci $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} < 1$ prin urmare $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Q.E.D.

II.

ASUPRA ȘIRULUI $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{3}}$, $n = 1, 2, \dots$

de

Alexandru LUPAȘ

În cadrul Seminarului de teoria aproximării cu aplicații la calculul numeric (colectivul de inegalități) al Institutului de calcul din Cluj, s-a propus următoarea problemă: „să se găsească o demonstrație elementară a faptului că șirul

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{3}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

este crescător”.

În cele ce urmează prezentăm o soluție a problemei enunțate, înțelegând prin „demonstrație elementară” un raționament care nu utilizează noțiuni de calcul diferențial sau integral.

Se arată imediat că $e_1 < e_2$; pentru $n \geq 2$ fixat, să notăm

$$a_k = k + \frac{k-3}{n}, \quad b_k = k \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{k-3}{k}}, \quad x_k = a_k - b_k, \quad k = 3, 4, \dots$$

Pe de o parte,

$$(1) \quad a_k = a_{k-1} + \frac{b_{k-1}}{k-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{k-1}}, \quad k = 4, 5, \dots$$

iar, pe de altă parte, inegalitatea lui Bernoulli ne permite să scriem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{k-1}} = \left\{1 + \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{k(k-1)}} - 1\right]\right\}^k > k \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{k(k-1)}} - (k-1)$$

sau

$$\frac{b_{k-1}}{k-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{k-1}} > b_k - b_{k-1}.$$

Prin urmare din (1) rezultă

$$a_k > a_{k-1} + b_k - b_{k-1}, \quad k = 4, 5, \dots$$

adică

$$x_k > x_{k-1}, \quad k = 4, 5, \dots$$

sau

$$(2) \quad x_q > x_p \text{ pentru } q > p \geq 3.$$

În particular, (2) implică $x_{3n+4} > x_3$ care este echivalent cu

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3n+1}{3n+4}} < 1 - \frac{6n+5}{n(3n+4)} + \frac{9}{3n+4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Deoarece prin efectuarea calculelor se poate arăta că

$$729n(n+1)^5 < (9n^2 + 15n + 5)^3, \quad n = 1, 2, \dots$$

adică

$$(4) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 + \frac{6n+5}{9n(n+1)},$$

din (3), (4) obținem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3n+1}{3n+4}} < 1 - \frac{6n+5}{n(3n+4)} + \frac{9}{3n+4} \left[1 + \frac{6n+5}{9n(n+1)}\right] = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Prin urmare $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+4}$ de unde $e_n < e_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Primit la redacție la 6 noiembrie 1974

Institutul de Calcul
Cluj

SUR L'ALLURE DE CERTAINES SUITES QUI TENDENT VERS LE NOMBRE « e »

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on étudie l'allure de la suite de nombres (3) pour les différentes valeurs réelles de p . Cette suite possède l'allure (m) étudiée pour nous dans les travaux antérieurs [3, 5]. On étudie aux §§ 2, 3 les extrêmes des fonctions (m) données par les définitions 1 et 2. Au § 4 on étudie les suites (m) finies et infinies et au § 5 on présente des démonstrations « élémentaires » pour les cas $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{1}{3}$. Un appendice présente également d'autres démonstrations analogues.