STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 1976

EXTENSION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE NEWTON

D.V. IONESCU et P. PAVEL

D. V. Ionescu a fait une théorie de la formule de quadrature de Newton [1] en partant de la formule de quadrature avec les noeuds a, x_1, b de degré d' exactitude au moins 2, qui pour $f \in C^3\ [a,b]$ est

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left\{\frac{x_1 - \frac{2a-b}{3}}{x_1 - a} f(a) + \frac{(b-a)^3}{3(x_1-a)(b-x_1)} f(x_1) + \frac{x_1 - \frac{a+2b}{3}}{x_1 - b} f(b)\right\} +$$

$$+ \int_a^b \varphi(x) f'''(x)dx. \qquad (1)$$

Dans cette formule la fonction φ s' obtient par un problème aux limites. Pour $x_1 = \frac{a+2b}{3}$ la formule (1) se réduit à la formule de type Gauss avec le noeud a et le noeud $\frac{a+2b}{3}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right] + \int_a^b \overline{\varphi}(x) f'''(x)dx \qquad (2)$$

D' après le cas génèral étudié dans le travail [1] la fonction $\overline{\varphi}$ est positive sur l'intervalle (a, b) et on a

$$\int_a^b \overline{\varphi}(x)dx = \frac{(b-a)^4}{36 \cdot 6} = \frac{(b-a)^4}{216} \qquad (3)$$

Pour $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, la formule (1) se réduit à la formule de Gauss avec le noeud b et le noeud $\frac{2a+b}{3}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4}\left[f(b) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right] + \int_a^b \overline{\overline{\varphi}}(x) f'''(x)dx \qquad (4)$$

D' après le travail cité [1] la fonction $\overline{\overline{\varphi}}$ est négative sur l'intervalle (a, b) et on a

$$\int_a^b \overline{\overline{\varphi}}(x)dx = -\frac{(b-a)^4}{218} \qquad (5)$$

En ajoutant les formules (2) et (4) membre à membre on obtient la formule de quadrature

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f(b)\right] + R[f] \tag{6}$$

où

$$R[f] = \int_a^b \frac{\bar{\varphi}(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)}{2} f'''(x)\,dx. \tag{7}$$

Nous sommes arrivés à la formule de Newton dont le degré d' exactitude est 3, parce que d'après les formules (3) et (5) on a

$$\int_a^b [\bar{\varphi}(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)]dx = 0 \tag{8}$$

Si $f \in C^4[a, b]$, on peut mettre le reste de la formule sous la forme

$$R[f] = \int_a^b \psi(x) f^{\mathrm{IV}}(x)dx. \tag{9}$$

et d' après ce qu'on sait [1] la fonction ψ est négative sur l'intervalle $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b \psi(x)dx = -\frac{(b-a)^5}{6480}. \tag{10}$$

ce qui montre que le degré d' exactitude de la formule est 3.

Nous avons eu l'idée de construire, en suivant la même méthode, une formule du type Newton (6) mais où les noeuds intérieurs sont multiples comme dans la formule de quadrature de Turan [3].

Nous traiterons dans l'avenir le problème en général mais pour voir l'intérêt d'une telle formule nous l' exposons dans ce travail seulement pour le cas des noeuds intérieurs triples.

Nous montrerons qu'une telle formule a le degré d'exactitude *5*.

1. Considérons pour commencer la formule de quadrature de la forme

$$\int_a^b f(x)dx = Af(a) + Cf(x_1) + C'f'(x_1) + C''f''(x_1) + Bf(b) + R[f] \tag{11}$$

où $x_1 \in (a, b)$ et les coefficients A, C, C', C'', B se calculent de manière que $R[x^k] = 0$, pour $k = 1, 2, 3, 4$.

Nous calculerons particulièrment les coefficients A, B qui seront importants pour ce travail.

En procédant comme dans l'introduction de ce travail, remplaçant dans la formule (11) la fonction f par $f(x) = (x - b)(x - x_1)^3$ et ensuite par $f(x) = (x - a)(x - x_1)^3$ nous aurons

$$A(b - a)(x_1 - a)^2 = \int_a^b (x - b)(x - x_1)^3 dx. \tag{12}$$

et

$$B(b - a)(b - x_1)^2 = \int_a^b (x - a)(x - x_1)^3 dx. \tag{13}$$

ce calcule donne

$$A = \frac{b - a}{2(x_1 - a)^3}\left\{(x_1 - a)^3 - (b - a)(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}(b - a)^2(x_1 - a) - \frac{1}{10}(b - a)^3\right\}$$

$$B = \frac{b - a}{2(b - x_1)^3}\left\{(b - x_1)^3 - (b - a)(b - x_1)^2 + \frac{1}{2}(b - a)^2(b - x_1) - \frac{1}{10}(b - a)^3\right\} \tag{14}$$

2. On peut choisir x_1 de manière que A soit nul. Cela a été montré en général par D. V. Ionescu dans le travail [1]. On obtient l'équation

$$(x_1 - a)^3 - (b - a)(x_1 - a)^2 + \frac{1}{2}(b - a)^2(x_1 - a) - \frac{1}{10}(b - a)^3 = 0$$

qui a une seule racine réelle comprise entre a et b. En posant

$$x_1 - a = (b - a)u$$

on a l'équation en u

$$u^3 - u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{10} = 0 \tag{15}$$

dont la seule solution réelle est

$$u_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\left\{\sqrt[3]{50(-2 + 3\sqrt{6})} - \sqrt[3]{50(2 + 3\sqrt{6})}\right\}$$

ce qui donne

$$\bar{x}_1 = a + (b - a)u_1 \tag{16}$$

3. On peut choisir aussi x_1 de manière que B soit nul. On a

$$(b - x_1)^3 - (b - a)(b - x_1)^2 + \frac{1}{2}(b - a)^2(b - x_1) - \frac{1}{10}(b - a)^3 = 0 \tag{17}$$

En posant

$$b - x_1 = (b - a)v$$

on a l'équation

$$v^3 - v^2 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{10} = 0$$

qui est identique à l'équation (15). Elle a une racine $v_1 = u_1$ réelle comprise entre a et b

Donc

$$\bar{\bar{x}}_1 = b - (b - a)\ v_1 = b - (b - a)u_1$$

Les noeuds $\bar{x}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$ sont symétriques par rapport au milieu de l'intervalle $[a, b]$.

$$\bar{x}_1 + \bar{\bar{x}}_2 = (b + a) \tag{18}$$

En prenant dans la formule de quadrature (11) $x_1 = \bar{x}_1$ que nous désignons toujours par x_1, la formule (11) devient

$$\int_a^b f(x)dx = C_1 f(x_1) + C_1' f'(x_1) + C_1'' f''(x_1) + Bf(b) - \int_a^b \bar{\varphi}(x) f^{(5)}(x)dx. \tag{19}$$

On démontre que la fonction $\bar{\varphi}$ est négative sur l'intervalle $[a, b]$ Il est utile de calculer $\int_a^b \bar{\varphi}(x)dx$.

En posant dans la formule (19)

$$f(x) = \frac{(x - x_1)^4 (x - b)}{5!}$$

nous obtenons

$$\int_a^b \bar{\varphi}(x)dx = -\frac{1}{5!}\left\{\frac{(b-a)^6}{6} - \frac{4}{5}(b-a)^5(b-x_1) + \frac{3}{2}(b-x_1)^2(b-a)^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3}(b-x_1)^3(b-a)^3 + \frac{1}{2}(b-x_1)^4(b-a)^2\right\} \tag{20}$$

En remplaçant le noeud x_1 par $\bar{\bar{x}}_2$ nous avons la formule

$$\int_a^b f(x)dx = A\ f(a) + C_2\ f(x_2) + C_2' f'(x_2) + C_2'' f''(x_2) - \int_a^b \bar{\bar{\varphi}}(x)\ f^{(5)}(x)dx. \tag{21}$$

où la fonction $\bar{\bar{\varphi}}$ est positive sur l'intervalle (a, b) et nous avons

$$\int_a^b \bar{\bar{\varphi}}(x)dx = \frac{1}{5!}\left\{\frac{(b-a)^6}{6!} + \frac{4}{5}(b-a)^5(a-x_1) + \frac{3}{2}(b-a)^4(a-x_2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}(b-x_1)^3 + (a-x_2)^4\frac{(b-a)^2}{2}\right\}$$

En ajoutant les formules (19) ét (21) nous obtenons la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,[Af(a) + Bf(b) + C_1f(x_1) + C_1'f'(x_1) + C_1''f''(x_1) +$$
$$+ C_2\,f(x_2) + C_2'f'(x_2) + C_2''f''(x_2)] - \int_a^b \frac{\bar{\varphi}(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)}{2} f^{(5)}(x)dx \qquad (22)$$

En tenant compte de la propriété (18) on voit que

$$\int_a^b \frac{\bar{\varphi}(x) + \bar{\bar{\varphi}}(x)}{2}\,dx = 0$$

ce qui montre que la formule de quadrature de Newton-Turan (22) a le degré d'exactitude au moins 4.

On démontre que cette formule a le degré d'exactitude 5. parce qu'en remplaçant $f(x)$ par $(x - x_1)^3(x - x_2)^3$ on obtient la formule

$$6!\int_a^b \psi(x)dx = (b-a)^7\left[\frac{11}{60} + \frac{1}{20}\,u_1^2\right] \neq 0.$$

(Manuscrit reçu le 9 juin 1975)

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *La formule de quadrature généralisé de Newton*, Anal. Şt. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, XX, 1974, 151–159.
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.
3. P. Turan, *On the Theory of the Mechanical Quadrature*, Acta Sci. Math. Szèged, 12, 1950.

O EXTINDERE A FORMULEI ÎN CUADRATURĂ A LUI NEWTON

(Rezumat)

În această lucrare se construieşte, după metoda folosită în [1] o formulă de cuadratură de tip Newton, în care nodurile interioare sînt multiple. Rezultatele obţinute sînt prezentate în cazul nodurilor interioare triple. Se obţine formula de cuadratură (22) cu gradul de exactitate 5.