

COMPORTĂRI ASIMPTOTICE ALE SOLUȚIILOR ECUAȚIEI ENERGIEI DIN STRATUL LIMITĂ INCOMPRESIBIL (Variabile Mises)

DOINA BRĂDEANU, PETRE BRĂDEANU

Introducere. a) Ecuațiile stratului limită laminar, dinamic și termic, nedisipativ de fluid vâcos incompresibil în raport cu variabilele lui Mises pot fi scrise, în domeniul D , în forma [4]:

$$G_X = \sqrt{U_1^2 - G} G_{\psi\psi}, \quad (1)$$

$$H_X = \frac{1}{\sigma} (\sqrt{U_1^2 - G} H_{\psi})_{\psi} - \frac{dT_w/dX}{T_w - T_{\infty}} H; \quad (2)$$

$$D = \{X, \psi | X_0 \leq X \leq X_I, 0 \leq \psi \leq \infty, \psi_{\infty}; 0 \leq X_0 < X_I, \psi_{\infty}(x) = \text{finit}\}$$

$$G(X, 0) = U_1^2(X), G(X, \infty) = 0, G(X_0, \psi) = G^{(0)}(\psi), \quad (3)$$

$$(\sqrt{U_1^2 - G} H_{\psi})_{\psi=0} = 0 \text{ sau } H(X, 0) = 1, H(X_0, \psi) = H^{(0)}(\psi),$$

unde $G(X, \psi)$ și $H(X, \psi)$ sînt funcțiile necunoscute iar:

$$x = LX, \bar{\psi} = \psi \sqrt{L u_{\infty}}, u = u_{\infty} U = u_{\infty} \sqrt{U_1^2 - G(X, \bar{\psi})}, u_1 = u_{\infty} U_1(X),$$

$$i = i_{\infty} + (i_w - i_{\infty}) H(X, \bar{\psi}), u_{\infty} = \text{const.}, i_{\infty} = c_p T_{\infty} = \text{const.}$$

b) *Soluție automodelată* (vecinătatea punctului critic, $X \rightarrow 0$). Să facem transformările, care introduc variabila de automodelare (similitudine) η :

$$\xi = X, \eta = \frac{\psi}{X}, G = U_1^2(X) W(X, \eta) \quad (4)$$

și să presupunem că (vecinătatea punctului critic $u_1 = c_1 x$)

$$U_1 = C_1 X, \frac{X T'_w}{T_{\infty} - T_w} = \gamma \text{ sau } T_w = T_{\infty} + a X^{\gamma}, \left(\gamma = \frac{d}{dX} \right) \quad (5)$$

unde a este o constantă de integrare (fie $a > 0$) iar γ și $C_1 > 0$ sînt constante arbitrare date. Atunci, ecuațiile (1)–(2) se transformă, relativ la

Notafii:

$x, \bar{\psi}$	— variabilele lui Mises ($x, \bar{\psi} \in \mathbb{R}$)
$u, i = c_p T$	— viteza în direcția x și entalpia în stratul limită (T , temperatura)
u_1	— viteza scurgerii exterioare ideale potențiale
ν, μ	— viscozitatea cinematică și, respectiv, dinamică
σ	— numărul lui Prandtl ($\mu c_p / \lambda$)
λ	— conductibilitatea termică
$G^{(0)}, H^{(0)}$	— funcții date în secțiunea inițială $x = x_0$
a, γ, C_1	— constante considerate în (5)
w, ∞	— indici: indică valori pe corp și la infinit
L	— o lungime de referință (dată)

O METODĂ DE ESTIMAȚIE BAZATĂ PE APROXIMAȚII STOCHASTICE

(Rezumat)

Lucrarea prezintă o metodă pentru estimarea parametrilor necunoscuți ai densității de probabilitate $f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ a unei variabile aleatoare X , în special pentru cazul $k = 2, 3$, bazată pe aproximații stochastice. Se consideră o selecție repetată $x_1, \dots, x_n$, efectuată asupra variabilei X , și sistemul de ecuații

$$M_i(\alpha_1, \alpha_2) = m_i \quad (1)$$

unde $M_i(\alpha_1, \alpha_2) = M(X^i)$, $m_i = 1/n' \sum_{j=1}^{n'} x_j^i$, $i = 1, 2$, pentru cazul $k = 2$, și analog pentru $k = 3$. Soluția aproximativă a sistemului (1) este

$$\alpha_{i,n+1} = \alpha_{i,n} + a_{n,i} (m_i - X_n^i), \quad n = 1, 2, \dots, i = 1, 2,$$

unde $a_{i,n}$ sint numere reale ce satisfac anumite condiții și X_n variabile aleatoare care au aceeași repartiție cu X . Se arată că estimațiile date de $\alpha_{i,n}$ converg pentru $n, n' \rightarrow \infty$, în probabilitate către adevăratele valori α_i , și se construiesc efectiv variabilele aleatoare X_n folosind valorile de selecție.

funcțiile $W(\eta)$ și $H(\eta)$ dependente numai de η (independente de X), în următoarele ecuații diferențiale ordinare:

$$C_1 \sqrt{1 - W} W'' + \eta W' - 2W = 0; \quad W(0) = 1, \quad W(\infty) = 0 \quad (6)$$

$$-\eta H' = \frac{C_1}{\sigma} (\sqrt{1 - W} H')' - \gamma H; \quad H(0) = 1, \quad H(\infty) = 0 \quad (7)$$

Ecuațiile ordinare (6)–(7) pot fi reduse la ecuații cunoscute și rezolvate în literatură. În lucrarea [1] ecuația (6) este redusă la cunoscuta ecuație a lui Falkner-Skan. În ceea ce privește ecuația (7), facem substituțiile

$$\eta_0 = y \sqrt{\frac{c_1}{v}}, \quad f'(\eta_0) = \frac{U}{U_1}, \quad W = 1 - \left(\frac{df}{d\eta_0} \right)^2$$

din care rezultă formulele

$$\psi = \frac{u_1}{\sqrt{c_1 L U_\infty}} f(\eta_0), \quad \eta = \frac{\psi}{X} = \sqrt{C_1} f(\eta_0), \quad d\eta = \sqrt{C_1} f'(\eta_0) d\eta_0$$

Ecuația energiei (7), pentru funcția $H(\eta_0)$ – funcția $H(\eta)$ din vecinătatea punctului critic (stagnare), primește forma

$$H'' + \sigma f H' - \sigma \gamma f' H(\eta_0) = 0 \quad (8)$$

$$H(0) = 1, \quad H(\eta_{0\infty}) = 0$$

Această ecuație este rezolvată numeric în lucrarea [3] pentru $\sigma = 0,7$ și diferite valori ale parametrului γ . Soluția ecuației (7), sau (8), poate fi considerată ca inițială, ecuația energiei fiind de tip parabolic, în metoda numerică a diferențelor finite aplicată în rezolvarea ecuației (2).

Comportarea asimptotică a soluției ecuației energiei pentru $\psi \rightarrow 0$ (suprafața corpului). Să revenim la ecuația energiei (2) în care să introducem variabila ξ (Illingworth) și variabila ζ cu formulele

$$\xi = \int_0^X U_1(X) dX, \quad \zeta = \frac{\psi}{\sqrt{\xi}} \quad (9)$$

care generalizează transformarea (4). Ecuația (2) primește forma

$$\xi H_\xi - \frac{\zeta}{2} H_\zeta = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{U}{U_1} H_\zeta \right)_\zeta - \frac{\xi dT_w/d\xi}{T_w - T_\infty} H \quad (10)$$

$$H(\xi, 0) = 1, \quad (k \equiv \xi T'_w / (T_w - T_\infty)) \quad (10')$$

Să considerăm cazul particular $k = \text{const}$ și să presupunem că în vecinătatea imediată a corpului peste care se scurge fluidul, pentru ξ fixat, avem

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{U}{U_1} = a_1 \sqrt{\zeta} + b_1 \zeta, \quad \zeta \in I = [0, \varepsilon] \quad (11)$$

unde: a_1 și b_1 sînt constante nenule, $\varepsilon > 0$ este o mărime foarte mică iar funcția U/U_1 este analitică în raport cu y și $\sqrt{\psi}$ și, deci, în raport cu $\sqrt{\zeta}$. Ecuația (10) devine, atunci, o ecuație ordinară de forma

$$(a + bz)H'' + (2z^2 + b)H' - 4k_1zH(z) = 0, \quad z \in \bar{I} = (0, \sqrt{\varepsilon}] \quad (12)$$

$$(a \equiv 2a_1/\sigma, \quad b = 2b_1/\sigma, \quad k_1 \equiv 2k; \quad \sqrt{\zeta} = z, \quad H(0) = 1)$$

Deoarece această ecuație are pe $z = 0$ ca punct ordinar ($a + bz \neq 0$ pentru $z \in \bar{I}$; $a \neq 0$) și coeficienții lui H și H' sînt polinoame, există o soluție a ecuației (12) — convergentă pe I — de forma următoarei dezvoltări asimptotice ($z \rightarrow 0$):

$$H(z) = 1 + \sum_{s=1}^4 c_s z^s + O(z^5), \quad z \in \bar{I} \quad (13)$$

în care coeficienții c_s pot fi determinați prin verificarea ecuației (12) — c_1 rămîne nedeterminat (se dă numai o condiție la limită).

Concluzii. Funcția de temperatură H este analitică în raport cu variabilele z , $\sqrt{\zeta}$ sau $\sqrt{\psi}$. Derivatele $dH/d\zeta$ și $d^2H/d\zeta^2$ tind către infinit cînd $\zeta \rightarrow 0$ (analog pentru ψ). Această proprietate este în acord cu formula transferului de căldură (Fourier). Admitem că aceste proprietăți ale funcției H se extind, în general, la toate scurgerile care au loc în vecinătatea suprafeței corpului. Aceste proprietăți arată că ecuația energiei în raport cu variabilele lui Mises are o singularitate de tipul celei întîlnite și la ecuația mișcării și că în rezolvarea problemei distribuției temperaturii în stratul limită, prin metode numerice, se va folosi, în vecinătatea corpului, o soluție de forma (13).

Comportarea la infinit a soluției ecuației energiei ($\psi \rightarrow \infty$). Comportarea asimptotică a ecuației (2) pentru $\psi \rightarrow \infty$ nu poate fi găsită în condiții generale. De aceea vom face, de la început, două precizări: (a) vom considera soluții particulare, admițînd că comportarea acestora nu se îndepărtează, în mod esențial, de aceea a soluției din condiții mai generale, (b) problema este matematic corect pusă dacă $\psi_\infty < \infty$ (și $U = U_1$, $H = 0$ pentru $\psi = \psi_\infty$) și că ea rămîne corect pusă și cînd $\psi \rightarrow \infty$, adică și atunci cînd domeniul de integrare se întinde pînă la infinit (șir de probleme corect puse).

În planul (ξ, ζ) definit cu formulele (9), să considerăm scurgerea particulară din punct de vedere termic potrivit cu formula $k = \text{const.}$ sau $T_w - T_\infty = A\xi^k$ (A, k — constante date) și să admitem că $\partial H/\partial \xi = 0$ și $U = U_1$ pentru $\zeta \rightarrow \infty$. Rezultate numerice obținute, de exp. [2], arată că spre frontiera exterioară a stratului limită se poate admite că $\psi/\sqrt{\xi} \approx \text{const.}$

Ținînd seama de aceste ipoteze ecuația energiei (10) se reduce, efectuînd calculele, la o ecuație ordinară pentru $H(\zeta)$ de forma

$$H'' + \frac{\sigma}{2} \zeta H' - k\sigma H(\zeta) = 0, \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (14)$$

$$H = 0 \text{ pentru } \zeta = M$$

care are pe $\zeta = \infty$ ca punct singular neregulat. Comportarea asimptotică a soluției ecuației (2) este dată de soluția de la infinit a ecuației (14) în considerarea $M \rightarrow \infty$. Soluțiile ecuației (14) sînt

$$H_1(\zeta) = \zeta^{2k}, H_2(\zeta) = \zeta^{-(1+2k)} e^{-\frac{\sigma \zeta^2}{4}}, \zeta \rightarrow \infty \quad (15)$$

Dacă $k \geq 0$, comportarea la infinit a soluției ecuației energiei (10) este dată de $H(\zeta) = H_2(\zeta)$. Această proprietate se menține și pentru $k < 0$. Într-adevăr, integrala ecuației (14) cu $H(M) = 0$ este

$$H(\zeta) = \zeta^{-(1+2k)} e^{-\frac{\sigma \zeta^2}{4}} - M^{-(1+4k)} e^{-\frac{\sigma M^2}{4}} \zeta^{2k}$$

Cînd $M \rightarrow \infty$ ultimul termen tinde la zero și găsim că $H = H_2(\zeta)$, $\zeta \rightarrow \infty$, pentru orice valori reale k și pentru toate valorile σ admise de problema hidrodinamică.

Din formula asimptotică $H = H_2(\zeta)$, $\zeta \rightarrow \infty$, se pot deduce ușor și formule de comportare asimptotică pentru soluțiile ecuațiilor diferențiale din vecinătatea punctului critic (7)–(6). Într-adevăr, cu $U_1 = C_1 X$ găsim, după (9):

$$\xi = \frac{C_1}{2} X^2, \zeta = \sqrt{\frac{2}{C_1}} \frac{\psi}{X} = \eta \sqrt{\frac{2}{C_1}}, k = \frac{\gamma}{2}.$$

Ecuația (10) se reduce, astfel, la ecuația (7) considerată în domeniul punctului de la infinit (cu $W \approx 0$). Comportarea asimptotică a soluției ecuației (7), valabilă în vecinătatea punctului critic ($X \rightarrow 0$) este dată de $H = H_2(\zeta)$ și are forma

$$H(\eta) = \eta^{-(1+\gamma)} e^{-\frac{\sigma \eta^2}{2C_1}}, \eta \rightarrow \infty \quad (16)$$

În mod analog se poate obține din $H = H_2(\zeta)$ și comportarea pentru $\eta \rightarrow \infty$ a soluției ecuației (6) dacă punem $\sigma = 1$, $k = 1$ ($\gamma = 2$):

$$W = \eta^{-3} e^{-\frac{\eta^2}{2C_1}}, \eta \rightarrow \infty \quad (17)$$

(Intrat în redacție la 29 noiembrie 1975)

BIBLIOGRAFIE

1. D. Brădeanu, *O metodă a micilor perturbații pentru ecuația lui Mises*, Studii și cerc. de mecanică apl. nr. 2, 1974, București.
2. D. Brădeanu, *Rezolvarea numerică a problemei stratului limită în forma lui Mises prin metoda diferențelor finite*, Stud. Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math.-Mech., f. 2, 1974.
3. S. Levy, *Heat Transfer to Property Laminar Boundary-Layer Flows...*, Jour. Aeronaut. Sciences, May, 1952.
4. P. Brădeanu, *Mecanica fluidelor*, Editura Tehnică, București 1973.

THE ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF THE SOLUTIONS OF ENERGY EQUATION FOR THE INCOMPRESSIBLE BOUNDARY LAYER (von Mises variables)

(Summary)

In its first part this paper discusses the similar solutions of the incompressible boundary layer equations (the equations of the momentum and energy) in von Mises' form in terms of the X, ψ or $X, \eta = \psi/X$ variables (ψ — the stream function).

Then the asymptotic representation into the wall region ($\psi \rightarrow 0$), the point at infinity ($\psi \rightarrow \infty$) and into the region of the similarity (at the stagnation point) for the solutions of the energy equation is given.