

UN SCHEMA IMPLICITE AUX DIFFERENCES FINIES POUR LE PROBLEME DE LA COUCHE LIMITE HYDRODYNAMIQUE

par

Doina Brădeanu

Dans ce travail on présente un schéma implicite aux différences finies pour le problème de la couche limite hydrodynamique, formulé dans les variables de von Mises, (X, ψ) . On étudie la consistance et la stabilité du problème à la limite discrétisée. On montre que l'erreur de troncature est d'ordre 2 par rapport aux pas du réseau. La stabilité locale du schéma se démontre en utilisant le critère de stabilité de von Neumann.

1. Notations et énoncé du problème.

- x, y - les coordonnées de la couche limite;
- u - la vitesse du fluide dans la direction longitudinale Ox ;
- u_∞ - la vitesse du fluide à l'infini;
- u_1 - la vitesse du fluide sur la frontière extérieure;
- L - une longueur caractéristique du corps;
- ν - le coefficient de viscosité cinématique;
- X, ψ - les variables adimensionnelles de von Mises: $X=x/L$, $\psi = \bar{\psi} \sqrt{\nu L u_\infty}$, $\bar{\psi}$ étant la fonction de courant donnée par $u = \partial \bar{\psi} / \partial y$
- $U(X, \psi)$,
- $U_1(X)$ - la vitesse adimensionnelle u/u_∞ et u_1/u_∞ ;
- $G(X, \psi)$ - la fonction adimensionnelle dans $U = (U_1^2 - G)^{1/2}$
- $\psi_\infty(X)$ - la fonction de courant sur la frontière extérieure;
- D - le domaine des variables de von Mises dans la couche li-

mite: $D = (X_0, X_N) \times (0, \psi_\infty)$.

Nous considérons l'opérateur parabolique de von Mises défini par:

$$(1) \quad A(G) = \frac{\partial G}{\partial X} - \sqrt{U_1^2 - G} \frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2},$$

qui intervient dans l'étude du mouvement plan stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans la couche limite, [4].

La détermination de la fonction inconnue $G(X, \psi)$ peut se faire en résolvant le problème à la limite suivant:

$$(2) \quad A(G(X, \psi)) = 0, \quad (X, \psi) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$$(3) \quad G(X, 0) = U_1^2(X), \quad G(X, \psi_\infty) = 0, \quad G(X_0, \psi) = G^0(\psi), \quad (X, \psi) \in \partial D,$$

où $G^0(\psi)$ est la valeur initiale connue de la fonction $G(X, \psi)$.

Conformément aux approximations utilisées dans la théorie de la couche limite et à la condition pour la vitesse sur le corps solide (en accord avec la formule de tension tangentielle), le domaine de définition $D(A)$ de l'opérateur de von Mises peut être déterminé par:

$$D(A) = \left\{ G \in C^{k, m}(D) \cap C^{k, 1}(\partial D) \mid \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\partial^k G(X, \psi)}{\partial \psi^k} = \infty, \quad X \in (X_0, X_N), \right.$$

$$\left. p \geq 2, \quad G(X, 0) = U_1^2(X), \quad G(X, \psi_\infty) = 0, \quad G(X_0, \psi) = G^0(\psi) \right\}.$$

Le problème à la limite (2)-(3) est un problème à une frontière libre par ce que la fonction $\psi_\infty(X)$ est inconnue. En utilisant une méthode numérique pour la résolution du problème (2)-(3), la va-

leur de la fonction de courant sur la frontière extérieure de la couche limite se détermine par la condition du contact lisse pour la vitesse adimensionnelle $U(X, \psi)$, condition donnée par l'inégalité

$$(4) \quad \left| \frac{\partial U}{\partial \psi} \right| \leq \varepsilon \quad \text{pour } \psi = \psi_{\infty},$$

où ε est un nombre positif donné, suffisamment petit.

L'intégration numérique du problème de von Mises peut être effectuée en tenant compte de la singularité de l'opérateur A pour le cas $\psi \rightarrow 0$. Le changement de variables

$$\xi = X, \quad \eta = \frac{\psi}{\psi_{\infty}(X)}$$

a l'avantage de transformer le domaine D de la couche limite dans un domaine aux frontières connues de forme rectangulaire, $\tilde{D} = (X_0, X_N) \times (0, 1)$, mais alors la fonction $\psi_{\infty}(X)$ se présente dans l'expression de l'opérateur de von Mises modifié,

$$(5) \quad L(G) = \frac{\partial G}{\partial X} - \frac{\psi'_{\infty}}{\psi_{\infty}} \eta \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{1}{\psi_{\infty}^2} \sqrt{U_1^2 - G} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}.$$

On obtient, alors, de (2)-(3), le problème opératoire à la limite suivant:

$$(6) \quad L(G(X, \eta)) = 0, \quad (X, \eta) \in \tilde{D}$$

$$(7) \quad G(X, 0) = U_1^2(X), \quad G(X, 1) = 0, \quad G(X_0, \eta) = G^0(\eta), \quad (X, \eta) \in \partial \tilde{D},$$

où l'opérateur L a le domaine de définition

$$\tilde{D}(L) = \left\{ G \in C^{k, m}(\tilde{D}) \cap C^{k, 1}(\partial \tilde{D}) \mid \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial^k G(X, \eta)}{\partial \eta^k} = \infty, X \in (X_0, X_N), \right. \\ \left. p \geq 2, G(X, 0) = U_1^2(X), G(X, 1) = 0, G(X_0, \eta) = G^0(\eta) \right\}.$$

2. La discrétisation de l'opérateur de von Mises par un schéma implicite aux différences finies. On considère l'équation de von

Mises sous la forme (6) et on prend un petit intervalle $X, X+\Delta X$

X_0, X_N où l'équation peut être écrite sous la forme intégrale suivante:

$$(8) \quad \int_X^{X+\Delta X} L(G(X, \eta)) \, dX = 0,$$

ou

$$G(X+\Delta X, \eta) = G(X, \eta) + \int_X^{X+\Delta X} \left(\frac{\psi'_\infty}{\psi_\infty} \eta G_\eta + \frac{U}{\psi_\infty^2} G_{\eta\eta} \right) dX.$$

Nous introduisons la fonction

$$(9) \quad F(X, \eta, G_\eta, G_{\eta\eta}) = \frac{\psi'_\infty}{\psi_\infty} \eta G_\eta + \frac{U}{\psi_\infty^2} G_{\eta\eta}$$

et nous remplaçons le domaine des variations continues des arguments X et η (le domaine du mouvement dans la couche limite) par un réseau rectangulaire, c'est-à-dire par un ensemble discret de points (noeuds):

$$D_\Delta = \{X_n, \eta_j \mid 0 \leq X_0 \leq X_n \leq X_N, 0 \leq \eta \leq 1, X_n = X_0 + n\Delta X, \eta_j = j\Delta\eta; n=0,1,\dots,N; j=0,1,\dots,J\}.$$

En utilisant la formule de quadrature bien connue des trapèzes pour le calcul de l'intégrale de la fonction F , l'équation (8) se transforme en l'équation implicite (aux différences finies sur le réseau D_Δ) suivante:

$$(10) \quad g_{n+1,j} = g_{n,j} + \frac{\Delta X}{2} \sum_{k=0}^1 f_{n+k,j}$$

où: $g_{n,j}$ est la valeur approchée de la fonction G donnée par

l'équation d'approximation (10), $G(X_n, \eta_j) \approx z_{n,j}$;

$$(11) \quad f_{n+k,j} = F(X_{n+k}, \eta_j, \frac{\delta_\eta g_{n+k,j}}{2 \Delta \eta}, \frac{\delta_\eta^2 g_{n+k,j}}{\Delta \eta^2}) = f_\Delta(z_{n+k,j}) ;$$

δ_η et δ_η^2 sont les opérateurs des différences finies centrales, appliquées sur deux et trois noeuds, qui sont d'ordre $(\Delta \eta)^2$

Par conséquent, nous pouvons attacher au problème à la limite (6)-

-(7) le schéma implicite aux différences finies suivant:

$$(12) \quad a_{n+1,j} z_{n+1,j-1} - \left(\frac{1}{r} + b_{n+1,j}\right) z_{n+1,j} + c_{n+1,j} z_{n+1,j+1} + s_{n,j} = 0$$

$$(j=1, 2, \dots, J-1)$$

avec les conditions aux limites

$$(13) \quad z_{n,0} = U_1(X_n), \quad z_{n,J} = 0, \quad n=0, 1, \dots, N$$

$$z_{0,j} = q_j^0, \quad j=0, 1, \dots, J$$

où

$$a_{n+k,j} = - \frac{j(\Delta \eta)^2}{2} \left(\frac{\psi'_\infty}{\psi_\infty} \right)_{n+k} + \frac{U_{n+k,j}}{\psi_\infty^2 n+k}$$

$$(14) \quad b_{n+k,j} = \frac{2U_{n+k,j}}{\psi_\infty^2 n+k} \quad k=0, 1$$

$$c_{n+k,j} = \frac{j(\Delta \eta)^2}{2} \left(\frac{\psi'_\infty}{\psi_\infty} \right)_{n+k} + \frac{U_{n+k,j}}{\psi_\infty^2 n+k}$$

$$(15) \quad s_{n,j} = a_{n,j} z_{n,j-1} + \left(\frac{1}{r} - b_{n,j} \right) z_{n,j} + c_{n,j} z_{n,j+1} ; \quad r = \frac{\Delta X}{2\Delta \eta^2}.$$

3. L'erreur de troncature du schéma aux différences finies. La consistance. Soit $G_{n,j} \equiv G(X_n, \eta_j)$ la valeur de la solution

exacte du problème à la limite (6)-(7) dans le point $(X_n, \eta_j) \in D_\Delta$.

L'erreur de troncature $\tau_{n,j}$ est donnée par la formule:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \tau_{n,j} &= \frac{1}{\Delta x} (G_{n+1,j} - G_{n,j}) - \frac{1}{2} [f_{\Delta}(G_{n+1,j}) + f_{\Delta}(G_{n,j})] = \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x, \eta, G_{\eta}, G_{\eta\eta}) dx - \\
 &\quad - \frac{1}{2} [f_{\Delta}(G_{n+1,j}) + f_{\Delta}(G_{n,j})].
 \end{aligned}$$

La consistance du schéma aux différences (12) est donnée par la proposition suivante:

PROPOSITION 1. Si dans le domaine D les conditions suivantes sont remplies:

$$(17) \quad G \in C^{k,m}(\underline{D}), \quad k, m \in \mathbb{Z}_+;$$

$$(18) \quad \partial F / \partial G_{\eta} \quad \text{et} \quad \partial F / \partial G_{\eta\eta} \quad \text{sont bornées,}$$

alors le schéma aux différences finies (12) est consistant avec une erreur de troncature d'ordre 2 par rapport aux pas Δx et $\Delta \eta$.

Démonstration. Nous utiliserons les développements en série de Taylor des fonctions de réseau $G_{n+1,j-1}$ et $G_{n+1,j+1}$ au voisinage du point (x_{n+k}, η_j) en posant, pour simplifier l'écriture, $G = G_{n+k,j}$, $k = 0, 1$. Alors, les opérateurs des différences centrales δ_{η} et δ_{η}^2 appliqués à la fonction G auront les expressions:

$$\delta_{\eta} G = 2 G_{\eta} \Delta \eta + \frac{1}{3} (\Delta \eta)^3 d_{\eta}^3 G + o(\Delta \eta^5)$$

$$\delta_{\eta}^2 G = G_{\eta\eta} (\Delta \eta)^2 + \frac{1}{12} (\Delta \eta)^4 d_{\eta}^4 G + o(\Delta \eta^6)$$

et l'opérateur f_{Δ} , de (11), appliqué à la fonction G , s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned}
 (19) \quad f_{\Delta}(G) &= F(x, \eta, G_{\eta} + \frac{\Delta \eta^2}{6} d_{\eta}^3 G + o(\Delta \eta^4), G_{\eta\eta} + \frac{\Delta \eta^2}{12} d_{\eta}^4 G + o(\Delta \eta^4)) = \\
 &= F(x, \eta, G_{\eta}, G_{\eta\eta}) + \frac{\Delta \eta^2}{6} \left(\frac{\partial F}{\partial G_{\eta}} d_{\eta}^3 G + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial G_{\eta\eta}} d_{\eta}^4 G \right) + o(\Delta \eta^4)
 \end{aligned}$$

Si dans (16) on applique la formule des trapèzes pour le calcul de l'intégrale et si on y substitue les expressions (19), alors les termes de la forme $F(X, \gamma, G_\gamma, G_{\gamma\gamma})$ se réduiront. On déduit maintenant aisément que dans le domaine D dans lequel les conditions (17)-(18) sont remplies, nous avons l'estimation suivante:

$$\varepsilon_{n,j} = O((\Delta X)^2, (\Delta \gamma)^2).$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons tenu compte, évidemment, du fait que la formule des trapèzes introduit une erreur d'ordre 3 par rapport au pas ΔX .

Le schéma aux différences finies (12) est, par conséquent, consistant avec une erreur de troncature d'ordre 2.

4. La stabilité du schéma aux différences finies. Désignons par $g_{n,j}$ la solution exacte de l'équation aux différences finies (12) et par $g_{n,j}^*$ la solution calculée. Alors, l'erreur de stabilité a l'expression $z_{n,j} = g_{n,j} - g_{n,j}^*$.

Nous déterminerons l'équation à laquelle satisfait l'erreur $z_{n,j}$, en supposant que le schéma (12) est stable, ou que cette erreur est petite (on peut donc supposer que les puissances de l'erreur $z_{n,j}$ sont négligeables). À cet effet, en utilisant la série du binôme où on peut se limiter aux deux premiers termes, nous avons

$$U_{n+k,j} = U_{n+k,j}^* - \frac{1}{2} \frac{z_{n+k,j}}{U_{n+k,j}^*}$$

où

$$U_{n+k,j}^* = (U_{n+k,j}^2 - g_{n+k,j}^*)^{1/2}$$

Nous allons substituer cette expression de $U_{n+k,j}$, calculer

tous les termes et négliger les puissances de $z_{n,j}$ dans les équations (12). On arrive à l'équation aux différences finies suivante pour l'erreur $z_{n,j}$:

$$(20) \sum_{k=0}^1 \sum_{s=-1,0,1} \frac{1}{\psi_{\infty n+k}^2} (\alpha_{n+k,j}^{(s)} z_{n+k,j+s} + \beta_{n+k,j}^{(s)} g_{n+k,j+s}^*) = 0$$

où $\alpha_{n+k,j}^{(-1)} = U_{n+k,j}^* + \tilde{a}_{n+k,j} = \beta_{n+k,j}^{(-1)}$;

$$(21) \alpha_{n+k,j}^{(0)} = - \left[(-1)^{k+1} \frac{\psi_{\infty n+k}^2}{r} + 2 U_{n+k,j}^* + \frac{P_{n+k,j}^*}{2 U_{n+k,j}^*} \right] =$$

$$= \beta_{n+k,j}^{(0)} - \frac{P_{n+k,j}^*}{2 U_{n+k,j}^*} ;$$

$$\alpha_{n+k,j}^{(1)} = U_{n+k,j}^* - \tilde{a}_{n+k,j} = \beta_{n+k,j}^{(1)} ;$$

$$\tilde{a}_{n+k,j} = - \frac{j(A\eta)^2}{2} (\psi_{\infty} \psi'_{\infty})_{n+k} ;$$

$$P_{n+k,j}^* = g_{n+k,j+1}^* - 2g_{n+k,j}^* + g_{n+k,j-1}^* .$$

En ce qui concerne la stabilité du schéma (20) nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION 2. Si dans le domaine D_{Δ} est remplie la condition

$$(22) \quad P_{n,j}^* \geq 0 \quad , \quad n=0,1,\dots,N \quad ; \quad j=1,2,\dots,J-1$$

et si les fonctions qui interviennent à titre de coefficients dans l'expression de l'opérateur différentiel (5) sont des fonctions suffisamment lisses, alors le schéma aux différences (20) est localement stable pour chaque valeur du paramètre r du réseau.

Démonstration. Nous allons utiliser le critère de stabilité de von Neumann, en supposant que les coefficients α/ψ_∞^2 sont constants et en négligeant le terme libre. Nous cherchons, dans ces conditions, pour le schéma (20) des solutions représentées par la série de Fourier

$$(23) \quad z_{n+k,j+s} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{n+k}(m) e^{im(j+s)\Delta\eta}$$

En substituant (23) dans (20), on obtient la condition suivante:

$$v_{n+1}(m) = G(\Delta X, \Delta\eta, m) v_n(m), \quad m \in \mathbb{Z},$$

où le facteur d'amplification G a l'expression:

$$G(\Delta X, \Delta\eta, m) = -(\psi^2 \sum_{\omega n+1} \sum_{s=-1,0,1} \alpha_{n,j}^{(s)} e^{ims\Delta\eta}) (\psi^2 \sum_{\omega n} \sum_{s=-1,0,1} \alpha_{n+1,j}^{(s)} e^{ims\Delta\eta})^{-1}.$$

Pour le facteur d'amplification on obtient une nouvelle expression par la substitution des coefficients α , donnés par (21) et à la suite de calculs élémentaires. Si en outre, nous utilisons le fait que les fonctions $U(X, \eta)$ et $\psi_\infty(X)$ sont lisses, les coefficients de l'opérateur différentiel (5) peuvent être remplacés au voisinage d'un noeud par des valeurs constantes, c'est-à-dire que $U_{n+1,j}^* \approx U_{n,j}^*$ et $\psi_{\omega n+1} \approx \psi_{\omega n}$. Nous avons donc:

$$(24) \quad G(r, Y) = -\left(a + \frac{\psi_{\omega n}^2}{r} + bi\right) \left(a - \frac{\psi_{\omega n}^2}{r} + bi\right)^{-1},$$

où

$$Y = m\Delta\eta; \quad b = -2\tilde{a}_{n,j} \sin Y;$$

$$a = 2U_{n,j}^* \cos Y - \left(2U_{n,j}^* + \frac{P_{n,j}^*}{2U_{n,j}^*}\right); \quad U_{n,j}^* > 0.$$

La condition de stabilité de von Neumann, [2], exige que pour chaque Y on ait $|G| < 1$. On peut constater aisément, en utilisant (24), que cette inégalité est vérifiée quelle que soit la valeur du paramètre r du réseau, avec $\bar{Y}$ arbitraire, si

$$(25) \quad a < 0.$$

Or, l'inégalité (22) nous assure que la condition (25) est remplie.

La stabilité locale du schéma aux différences (20) est ainsi complètement démontrée.

Remarques. 1°. La condition (22) est remplie dans une région assez vaste située à l'intérieur de la couche limite, [1].

2°. La consistance et la stabilité du schéma aux différences implique, conformément au théorème de Lax, [2], [3], la convergence de ce schéma.

B I B L I O G R A P H I E

1. BRADEANU, D., Rezolvarea numerică a problemei stratului limită în forma lui Mises, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Series Math-Mech, 2, 1974, 69-77.
2. ISAACSON, E., KELLER, H.B., Analysis of Numerical Methods, J. Wiley, New York, 1966.
3. MARINESCU, G., Analiză numerică, Ed. Acad. R.S.R., 1974.
4. SCHLICHTING, H., Teorie pogranticinogo sloia, IIL Moskva, 1956.