

UN SCHÉMA IMPLICITE AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR LE PROBLÈME DE LA COUCHE LIMITE HYDRODYNAMIQUE

DOINA BRĂDEANU

1. Notations et énoncé du problème.

- x, y — les coordonnées de la couche limite
 u — la vitesse du fluide dans la direction longitudinale Ox
 u_∞ — la vitesse du fluide à l'infini
 u_1 — la vitesse du fluide sur la frontière extérieure
 L — une longueur caractéristique du corps
 ν — le coefficient de viscosité cinématique
 X, Ψ — les variables adimensionnelles de von Mises: $X = x/L$,
 $\Psi = \bar{\Psi} \sqrt{\nu L U_\infty}$, $\bar{\Psi}$ étant la fonction de courant donnée par
 $u = \partial \bar{\Psi} / \partial y$.

 $U(X, \Psi)$,

 $U_1(X)$ — la vitesse adimensionnelle u/u_∞ et u_1/u_∞
 $G(X, \Psi)$ — la fonction adimensionnelle dans $U = \sqrt{U_1^2 - G}$
 $\Psi_\infty(X)$ — la fonction de courant sur la frontière extérieure

 D — le domaine des variables de von Mises dans la couche limite:

 $D = (X_0, X_N) \times (0, \Psi_\infty)$

Nous considérons l'opérateur parabolique de von Mises défini par

$$A(G) = \frac{\partial G}{\partial X} - \sqrt{U_1^2 - G} \frac{\partial^2 G}{\partial \Psi^2} \quad (1)$$

qui intervient dans l'étude du mouvement plan stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans la couche limite, [4].

La détermination de la fonction inconnue $G(X, \Psi)$ peut se faire en résolvant le problème à la limite suivant:

$$A(G(X, \Psi)) = 0, \quad (X, \Psi) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$G(X, 0) = U_1^2(X), \quad G(X, \Psi_\infty) = 0, \quad G(X_0, \Psi) = G^0(\Psi), \quad (X, \Psi) \in \partial D \quad (3)$$

où $G^0(\Psi)$ est la valeur initiale connue de la fonction $G(X, \Psi)$.

Conformément aux approximations utilisées dans la théorie de la couche limite et à la condition pour la vitesse sur le corps solide (en accord avec la formule de tension tangentielle-frottement), le domaine de définition $D(A)$ de l'opérateur de von Mises peut être déterminé par

$$D(A) = \left\{ G \in C^{k,m}(D) \cap C^{k,1}(\partial D) \mid \lim_{\Psi \rightarrow 0} \frac{\partial^p G(X, \Psi)}{\partial \Psi^p} = \infty, \right.$$

$$\left. \forall X \in (X_0, X_N), p \geq 2, G(X, 0) = U_1^2, G(X, \Psi_\infty) = 0, G(X_0, \Psi) = G^0(\Psi) \right\}$$

Le problème à la limite (2)–(3) est un problème à une frontière libre parce que la fonction $\Psi_\infty(X)$ est inconnue. En utilisant une méthode numérique pour la résolution du problème (2)–(3), la valeur de la fonction de courant sur la

frontière extérieure de la couche limite se détermine par la condition du contact lisse pour la vitesse adimensionnelle $U(X, \Psi)$, condition donnée par l'inégalité

$$\left| \frac{\partial U}{\partial \Psi} \right| \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad \Psi = \Psi_\infty \quad (4)$$

où ε est un nombre positif donné suffisamment petit.

L'intégration numérique du problème de von Mises peut être effectuée en tenant compte de la singularité de l'opérateur A pour le cas $\Psi \rightarrow 0$.

Le changement de variables

$$\xi = X, \quad \eta = \frac{\Psi}{\Psi_\infty(X)}$$

a l'avantage de transformer le domaine D de la couche limite dans un domaine aux frontières connues de forme rectangulaire, $\tilde{D} = (X_0, X_N) \times (0, 1)$, mais alors la fonction $\Psi_\infty(X)$ se présente dans l'expression de l'opérateur de von Mises modifié, qui prend l'expression suivante

$$L(G) = \frac{\partial G}{\partial X} - \frac{\Psi'_\infty}{\Psi_\infty} \eta \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{1}{\Psi_\infty^2} \sqrt{U_1^2 - G} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} \quad (5)$$

On obtient, alors, de (2)–(3), le problème opératoriel à la limite suivant :

$$L(G(X, \eta)) = 0, \quad (X, \eta) \in \tilde{D} \quad (6)$$

$$G(X, 0) = U_1^2(X), \quad G(X, 1) = 0, \quad G(X_0, \eta) = G^0(\eta), \quad (X, \eta) \in \partial \tilde{D}, \quad (7)$$

où l'opérateur L a le domaine de définition suivant

$$\tilde{D}(L) = \left\{ G \in C^{k,m}(\tilde{D}) \cap C^{k,1}(\partial \tilde{D}) \mid \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial^p G(X, \eta)}{\partial \eta^p} = \infty, \right.$$

$$\left. \forall X \in (X_0, X_N), \quad p \geq 2, \quad G(X, 0) = U_1^2(X), \quad G(X, 1) = 0, \quad G(X_0, \eta) = G^0(\eta) \right\}$$

2. La discrétisation de l'opérateur de von Mises par un schéma implicite aux différences finies. On considère l'équation de von Mises sous la forme (6) et on prend un petit intervalle $[X, X + \Delta X] \subset [X_0, X_N]$ où l'équation peut être écrite sous la forme intégrale suivante

$$\int_X^{X+\Delta X} L(G(X, \eta)) dX = 0 \quad (8)$$

où

$$G(X + \Delta X, \eta) = G(X, \eta) + \int_X^{X+\Delta X} \left(\frac{\Psi'_\infty}{\Psi_\infty} \eta G_\eta + \frac{U}{\Psi_\infty^2} G_{\eta\eta} \right) dX$$

Nous introduisons la fonction

$$F(X, \eta, G_\eta, G_{\eta\eta}) = \frac{\Psi'_\infty}{\Psi_\infty} \eta G_\eta + \frac{U}{\Psi_\infty^2} G_{\eta\eta} \quad (9)$$

et nous remplaçons le domaine des variations continues des arguments X et η (le domaine du mouvement dans la couche limite) par un réseau rectangulaire, c'est-à-dire par un ensemble discret de points (noeuds)

$$D_\Delta = \{X_n, \eta_j, 0 \leq X_n \leq X_N, 0 \leq \eta \leq 1, X_n = X_0 + n\Delta X, \\ \eta_j = j\Delta\eta; n = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, J\}$$

En utilisant la formule de quadrature bien connue des trapèzes pour le calcul de l'intégrale de la fonction F , l'équation (8) se transforme en l'équation implicite (aux différences finies sur le réseau D_Δ) suivante

$$g_{n+1,j} = g_{n,j} + \frac{\Delta X}{2} \sum_{k=0}^1 f_{n+k,j} \quad (10)$$

où

$g_{n,j}$ est la valeur approchée de la fonction G donnée par l'équation d'approximation (10) : $G(X_n, \eta_j) \approx g_{n,j}$;

$$f_{n+k,j} = F\left(X_{n+k}, \eta_j, \frac{\delta_\eta g_{n+k,j}}{2\Delta\eta}, \frac{\delta_\eta^2 g_{n+k,j}}{\Delta\eta^2}\right) \equiv f_\Delta(g_{n+k,j}); \quad (11)$$

δ_η et δ_η^2 sont les opérateurs des différences finies centrales, appliqués sur deux et trois noeuds qui sont d'ordre $(\Delta\eta)^2$.

Par conséquent, nous pouvons attacher au problème à la limite (6) — (7) le schéma implicite aux différences finies suivant

$$a_{n+1,j} g_{n+1,j} - \left(\frac{1}{r} + b_{n+1,j}\right) g_{n+1,j} + c_{n+1,j} g_{n+1,j+1} + s_{n,j} = 0 \quad (12) \\ (j = 1, 2, \dots, J-1)$$

avec les conditions aux limites

$$g_{n,0} = U_1^2(X_n), \quad g_{n,J} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

$$g_{0,j} = G_j^0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J$$

où

$$a_{n+k,j} = -\frac{j(\Delta\eta)^2}{2} \left(\frac{\Psi'_\infty}{\Psi_\infty}\right)_{n+k} + \frac{U_{n+k,j}}{\Psi_{\infty,n+k}^2} \\ b_{n+k,j} = \frac{2U_{n+k,j}}{\Psi_{\infty,n+k}^2} \\ c_{n+k,j} = \frac{j(\Delta\eta)^2}{2} \left(\frac{\Psi'_\infty}{\Psi_\infty}\right)_{n+k} + \frac{U_{n+k,j}}{\Psi_{\infty,n+k}^2} \quad (14)$$

$$s_{n,j} = a_{n,j} g_{n,j-1} + \left(\frac{1}{r} - b_{n,j}\right) g_{n,j} + c_{n,j} g_{n,j+1}; \quad r = \frac{\Delta X}{2\Delta\eta^2}. \quad (15)$$

3. L'erreur de troncature du schéma aux différences finies. La consistance.

Soit $G_{n,j} \equiv G(X_n, \eta_j)$ la valeur de la solution exacte du problème à la limite (6)–(7) dans le point $(X_n, \eta_j) \in D_\Delta$.

L'erreur de troncature $\tau_{n,j}$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \tau_{n,j} &= \frac{G_{n+1,j} - G_{n,j}}{\Delta X} - \frac{1}{2} [f_\Delta(G_{n+1,j}) + f_\Delta(G_{n,j})] = \\ &= \frac{1}{\Delta X} \int_{X_n}^{X_{n+1}} F(X, \eta, G_\eta, G_{\eta\eta}) dX - \frac{1}{2} [f_\Delta(G_{n+1,j}) + f_\Delta(G_{n,j})] \end{aligned} \quad (16)$$

La consistance du schéma aux différences (12) est donnée par le théorème suivant :

THÉOREME 1. Si dans le domaine $\tilde{D}$ les conditions suivantes sont remplies :

- (a) $G \in C^{k,m}(\tilde{D})$, $\forall k, m \in \mathbb{Z}_+$;
 (b) $\partial F / \partial G_\eta$ et $\partial F / \partial G_{\eta\eta}$ sont bornées, alors le schéma aux différences finies (12) est consistant avec une erreur de troncature d'ordre 2 par rapport aux pas ΔX et $\Delta \eta$.

Démonstration. Nous utiliserons les développements en série de Taylor des fonctions de réseau $G_{n+1,j-1}$ et $G_{n+1,j+1}$ au voisinage du point (X_{n+k}, η_j) en posant, pour simplifier l'écriture, $G \equiv G_{n+k,j}$, $k = 0, 1$. Alors, les opérateurs des différences centrales δ_η et δ_η^2 appliqués à la fonction G auront les expressions

$$\delta_\eta G = 2G_\eta \Delta \eta + \frac{1}{3} (\Delta \eta)^3 d_\eta^3 G + o(\Delta \eta^5);$$

$$\delta_\eta^2 G = G_{\eta\eta} \Delta \eta^2 + \frac{1}{12} (\Delta \eta)^4 d_\eta^4 G + o(\Delta \eta^6)$$

et l'opérateur f_Δ , de (12), appliqué à la fonction G s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned} f_\Delta(G) &= F(X, \eta, G_\eta + \frac{\Delta \eta^3}{6} d_\eta^3 G + o(\Delta \eta^4), G_{\eta\eta} + \frac{\Delta \eta^4}{12} d_\eta^4 G + o(\Delta \eta^6)) = \\ &= F(X, \eta, G_\eta, G_{\eta\eta}) + \frac{\Delta \eta^3}{6} \left(\frac{\partial F}{\partial G_\eta} d_\eta^3 G + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial G_{\eta\eta}} d_\eta^4 G \right) + o(\Delta \eta^4) \end{aligned} \quad (17)$$

Si dans (16) on applique la formule des trapèzes pour le calcul de l'intégrale et si on y substitue les expressions (17), alors les termes de la forme $F(X, \eta, G_\eta, G_{\eta\eta})$ se réduiront. On déduit maintenant aisément que dans le domaine D dans lequel les conditions (a)–(b) sont remplies, nous avons l'estimation de l'erreur de troncature suivante

$$\tau_{n,j} = o((\Delta X)^2, (\Delta \eta)^2).$$

Pour obtenir ce résultat nous avons évidemment tenu compte du fait que la formule des trapèzes introduit une erreur d'ordre 3 par rapport au pas ΔX .

Le schéma aux différences finies (12) est, par conséquent, consistant avec une erreur de troncature d'ordre 2.

4. La stabilité du schéma aux différences finies. Désignons par $g_{n,j}$ la solution exacte de l'équation aux différences finies (12) et par $g_{n,j}^*$ la solution calculée. Alors, l'erreur de stabilité a l'expression $z_{n,j} = g_{n,j} - g_{n,j}^*$.

Nous déterminerons l'équation à laquelle satisfait l'erreur $z_{n,j}$, en supposant que le schéma (12) est stable, ou que cette erreur est petite (on peut donc supposer que les puissances de l'erreur $z_{n,j}$ sont négligeables). À cet effet, en utilisant la série du binôme où on peut se limiter aux deux premiers termes, nous avons

$$U_{n+k,j} = U_{n+k,j}^* - \frac{1}{2} \frac{z_{n+k,j}}{U_{n+k,j}^*},$$

où

$$U_{n+k,j}^* = \sqrt{U_{1n+k}^2 - g_{n+k,j}^*}.$$

Nous allons substituer cette expression de $U_{n+k,j}$, calculer tous les termes et négliger les puissances de $z_{n,j}$ dans les équations (12). On arrive à l'équation aux différences finies suivantes pour l'erreur $z_{n,j}$:

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{s=-1,0,1} \frac{1}{\Psi_{\infty,n+k}^2} (\alpha_{n+k,j}^{(s)} z_{n+k,j+s} + \beta_{n+k,j}^{(s)} g_{n+k,j+s}^*) = 0 \quad (18)$$

où

$$\alpha_{n+k,j}^{(-1)} = U_{n+k,j}^* + \tilde{a}_{n+k,j} = \beta_{n+k,j}^{(-1)};$$

$$\alpha_{n+k,j}^{(0)} = - \left[(-1)^{k+1} \frac{\Psi_{\infty,n+k}^2}{r} + 2U_{n+k,j}^* + \frac{P_{n+k,j}^*}{2U_{n+k,j}^*} \right] = \beta_{n+k,j}^{(0)} - \frac{P_{n+k,j}^*}{2U_{n+k,j}^*};$$

$$\alpha_{n+k,j}^{(1)} = U_{n+k,j}^* - \tilde{a}_{n+k,j} = \beta_{n+k,j}^{(1)}; \quad (19)$$

$$\tilde{a}_{n+k,j} = - \frac{j(\Delta\eta)^2}{2} (\Psi_{\infty} \Psi'_{\infty})_{n+k};$$

$$P_{n+k}^* = g_{n+k,j+1}^* - 2g_{n+k,j}^* + g_{n+k,j-1}^*.$$

En ce qui concerne la stabilité du schéma (18) nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. Si dans le domaine D_{Δ} est remplie la condition

$$(a) \quad P_{n,j}^* \geq 0, \quad \forall n = 0, 1, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, J-1$$

et si les fonctions qui interviennent à titre de coefficients dans l'expression de l'opérateur différentiel (5) sont des fonctions suffisamment lisses, alors le schéma aux différences (18) est localement stable pour chaque valeur du paramètre r du réseau.

Démonstration. Nous allons utiliser le critère de stabilité de von Neumann, en supposant que les coefficients α/Ψ_{∞}^2 sont constants et en négligeant le terme

libre. Nous cherchons, dans ces conditions, pour le schéma (18) des solutions représentées par la série de Fourier

$$z_{n+k,j+s} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{n+k}(m) e^{im(j+s)\Delta\eta}, \quad k = 0; 1. \quad (20)$$

En substituant (20) dans (18), on obtient la condition suivante

$$v_{n+1}(m) = G(\Delta X, \Delta\eta, m) v_n(m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

où le facteur d'amplification G a l'expression

$$G(\Delta X, \Delta\eta, m) = - \left(\Psi_{\infty, n+1}^2 \sum_{s=-1,0,1} \alpha_{n,j}^{(s)} e^{ims\Delta\eta} \right) \left(\Psi_{\infty, n}^2 \sum_{s=-1,0,1} \alpha_{n+1,j}^{(s)} e^{ims\Delta\eta} \right)^{-1}.$$

Pour le facteur d'amplification on obtient une nouvelle expression par la substitution des coefficients α , donnés par (19) et à la suite de calculs élémentaires. Si, en outre, nous utilisons le fait que les fonctions $U(X, \eta)$ et $\Psi_{\infty}(X)$ sont lisses, les coefficients de l'opérateur différentiel (5) peuvent être remplacés au voisinage d'un noeud par des valeurs constantes, c'est-à-dire que $U_{n+1,j}^* \approx U_{n,j}^*$ et $\Psi_{\infty, n+1} \approx \Psi_{\infty, n}$. Nous avons donc :

$$G(r, Y) = - \left(a + \frac{\Psi_{\infty, n}^2}{r} + bi \right) \left(a - \frac{\Psi_{\infty, n}^2}{r} + bi \right)^{-1} \quad (21)$$

où

$$\begin{aligned} Y &= m\Delta\eta, \\ a &= 2U_{n,j}^* \cos Y - \left(2U_{n,j}^* + \frac{P_{n,j}^{*f}}{2U_{n,j}^*} \right), \quad U_{n,j}^* > 0; \\ b &= -2\tilde{a}_{n,j} \sin Y \end{aligned} \quad (22)$$

La condition de stabilité de von Neumann, [2], exige que pour chaque Y on ait $|G| < 1$. On peut constater aisément, en utilisant (21), que cette inégalité est vérifiée quelle que soit la valeur du paramètre r du réseau, avec Y arbitraire, si

$$a < 0. \quad (23)$$

Or, l'inégalité (a) nous assure que la condition (23) est remplie.

La stabilité locale du schéma aux différences (18) est ainsi complètement démontrée.

Remarques. 1° La condition (a) est remplie dans une région assez vaste située à l'intérieur de la couche limite, [1].

2°. La consistance et la stabilité du schéma aux différences implique, conformément au théorème de Lax, [2], [3], la convergence de ce schéma.

(Manuscrit reçu le 28 décembre 1979)

BIBLIOGRAPHIE

1. Brădeanu, D., *Rezolvarea numerică a problemei stratului limită în forma lui Mises*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math.-Mech., XIX, 1 (1974), 69-77.
2. Isaacson, E., Keller, H. B., *Analysis of Numerical Methods*, J. Wiley, New York, 1966.
3. Marinescu, G., *Analiză numerică*, Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1974.
4. Schlichting, H., *Teoria pogrannicnogo sloia*, IIL, Moskva, 1956.

O SCHEMĂ IMPLICITĂ CU DIFERENŢE FINITE PENTRU PROBLEMA STRATULUI LIMITĂ HIDRODINAMIC

(Rezumat)

În lucrare se construieşte o schemă implicită cu diferenţe finite pentru problema stratului limită hidrodinamic, considerată în variabilele lui von Mises (X şi Y). Problema la limită discretizată se studiază din punctul de vedere al consistenţei şi al stabilităţii. Se arată că eroarea de trunchiere este de ordinul 2 relativ la paşii reţelei, iar stabilitatea locală a schemei se demonstrează folosind criteriul lui von Neumann.