

SUR QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES COMBINÉES

par

ADRIAN DIACONU

Dans ce travail on étudiera une classe de méthodes itératives obtenues par la modification de la méthode de Newton-Kantorovitch pour éviter la résolution à chaque pas d'itération d'une équation opérationnelle linéaire.

On considère l'application $P: X \rightarrow Y$; X, Y étant des espaces de Banach et l'on se pose le problème de la résolution de l'équation :

$$(1) \quad P(x) = \theta$$

θ étant l'élément nul de Y , c'est-à-dire de déterminer un $x^* \in X$ tel que $P(x^*) = \theta$.

Dans l'hypothèse qu'il existe la dérivée de type Fréchet de P dans un ensemble $D \subset X$, la méthode bien connue de Newton-Kantorovitch pour la résolution de l'équation (1) se ramène à construire une suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ $x_n \in X$, avec $x_0 \in X$ arbitraire, x_{n+1} étant la solution de l'équation linéaire :

$$(2) \quad P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -P(x_n); \quad n = 0, 1, \dots$$

Si pour chaque $n = 0, 1, \dots$ il existe $[P'(x_{n+1})]^{-1} \in \mathfrak{L}(Y, X)$, (par $\mathfrak{L}(Y, X)$ on désigne, l'ensemble des opérateurs linéaires de X à X), on peut exprimer x_{n+1} sous la forme :

$$(3) \quad x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n); \quad n = 0, 1, \dots$$

Nous remarquons par conséquent que l'application de la méthode de Newton-Kantorovitch se ramène à la résolution à chaque pas d'itération d'une équation linéaire du type (2).

Il est bien connu que le problème même de la résolution des équations linéaires, présente, du point de vue pratique, des difficultés techniques, même au cas où X et Y sont de dimension finie.

Pour éliminer cette difficulté, S. UL'M dans [4] combine la méthode de Newton avec la méthode de Schultz employée pour le calcul de l'inverse des applications linéaires. S. UL'm considère un élément initial $x_0 \in X$

et une application linéaire arbitraire $A_0 \in \mathfrak{L}(Y, X)$ et il construit les suites $(x_n)_{n=0}^\infty$, $x_n \in X$ et $(A_n)_{n=0}^\infty$ par les formules :

$$(4) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n (2E - P(x_{n+1}) A_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots$$

Dans le même travail, dans l'hypothèse de l'existence de la solution x^* de l'équation (1), de l'existence de l'application linéaire $[P'(x^*)]^{-1}$ et de la vérification des quelques restrictions imposées aux données du problème, S. Ul'm demontre la convergence des suites $(x_n)_{n=0}^\infty$ et $(A_n)_{n=0}^\infty$ vers x^* et A^* respectivement, l'ordre de convergence de la méthode étant égal à 2. Dans [5], O. VAARMAN réussit à imposer des restrictions plutôt à l'élément initial x_0 et à l'application A_0 , en démontrant l'existence de la solution x^* de l'équation (1) sans les hypothèses de S. Ul'm. Mais la convergence dans les hypothèses de Vaarman est linéaire.

Dans [1], [2] nous avons étudié la convergence de la méthode (4) sans l'hypothèse de l'existence de la solution de l'équation (1), en démontrant cette existence, de plus l'ordre de convergence est égal à 2. Dans cette manière nous avons également considéré des méthodes itératives obtenues par la combinaison de la méthode de la corde et de Steffensen avec la méthode de Schultz en obtenant des résultats analogues, les ordres de convergence étant $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et 2 respectivement.

On a étudié aussi les méthodes obtenues par la combinaison des méthodes de Newton, de la corde, et de Steffensen avec la méthode suivante :

$$A_{n+1} = A_n [3E - 3 A A_n - (A A_n)^2] \quad n = 0, 1, \dots$$

qui est employée pour l'inversion de l'application linéaire A , et qui a l'ordre de convergence 3. Par cette combinaison nous avons obtenu des conditions plus larges pour la convergence.

Le défaut de tous ces résultats est qu'on suppose l'existence de l'application $[P'(x)]^{-1} \in \mathfrak{L}(Y, X)$ pour chaque x appartenant à une sphère, du fait qu'il exige une étude qualitative des équations (2).

Dans ce travail nous ne supposons que l'existence de l'application $P'(x)$ pour chaque x dans une sphère et l'inversabilité de cette application pour $x = x_0$, x_0 étant l'élément initial de la méthode. Nous considérons également des méthodes combinées, en employant pour l'inversabilité des applications linéaires, des méthodes itératives à un ordre de convergence arbitraire. Nous présentons une étude de l'efficacité pratique de ces méthodes en trouvant la méthode optimale dans un sens qui sera précisé.

On soit que la méthode itérative employée par l'inversion de l'application linéaire A :

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n (E + B_n + B_n^2 + \dots + B_n^r) \\ B_{n+1} = E - A A_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

à l'ordre de convergence $r + 1$.

En considérant la méthode obtenue par combinaison avec la méthode de Newton-Kantorovitch on obtient la méthode :

$$(5) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ B_n = E - P'(x_{n+1}) A_n \\ A_{n+1} = A_n(E + B_n + \dots + B_n^r); \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

où $x_0 \in X$ est un élément initial arbitraire ; $A_0 : Y \rightarrow X$ une application linéaire arbitraire. Pour $r = 1$ nous obtenons la méthode (4) et pour $r = 2$ la méthode :

$$(6) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - A_n P(x_n) \\ A_{n+1} = A_n[3E - 3P'(x_{n+1})A_n + (P'(x_{n+1})A_n)^2]; \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

étudiée dans [2], dans les hypothèses mentionnées brièvement ci dessus.

Relativement à la méthode (5) et à l'équation (1) on peut énoncer le résultat suivant :

THEOREME 1. Si dans la sphère $S = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$ les conditions suivantes sont remplies :

i) l'application $P : X \rightarrow Y$ admet la dérivée du type Fréchet, qui vérifie la condition de Lipschitz, c'est-à-dire il existe un $L > 0$ tel que pour chaque $x, y \in S$

$$\|P'(x) - P'(y)\| \leq L\|x - y\|$$

ii) le point initial x_0 et l'application linéaire initiale $A_0 : Y \rightarrow X$ vérifient les inégalités suivantes :

$$\frac{L}{2} \|A_0\|^2 \|P(x_0)\| < c_1$$

$$\|E - P'(x_0) A_0\| < c_2$$

ou les nombres réels c_1 et c_2 sont déterminés par le système suivant :

$$(7) \quad \begin{cases} (c_1 + c_2) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^v \right]^2 d \leq 1 \\ \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^v \leq 1 \\ (2c_1 + c_2)^{r+1} d^r \leq c_2 \end{cases}$$

où

$$d = \max \left\{ \frac{L}{2c_1} \|A_0\|^2 \|P(x_0)\|, \frac{1}{c_2} \|E - P'(x_0) A_0\| \right\}$$

iii) le rayon de la sphère S vérifie l'inégalité

$$r \geq r_0 = \frac{2c_1 d}{L \|A_0\| (1 - d^{p-1})} \exp \frac{\sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}}{1 - \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v}$$

où $\alpha = 2c_1 + c_2$ et :

$$p = \min \left\{ 2, 1 + \frac{\ln(c_1 + c_2) \left[1 + \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v \right]^2 d}{\ln d}, 1 + \frac{\ln \frac{\alpha^{r+1} d^r}{c_2}}{\ln d} \right\}$$

alors l'on a les propriétés suivantes :

- j) les suites $(x_n)_{n=0}^\infty$ et $(A_n)_{n=0}^\infty$ sont convergentes,
- jj) l'équation (1) admet la solution $x^* \in S$ et $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- jjj) il existe l'application $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$ où $A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$
- iv) les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(8) \quad \|x^* - x\| \leq \frac{2c_1 d^{p^n}}{L \|A_0\| (1 - d^{p^n(p-1)})} \exp \frac{\sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}}{1 - \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v}$$

$$(9) \quad \|A^* - A_n\| \leq \|A_0\| \sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d^{p^n})}{(1 - (d^{p^n(p-1)})^v)} \exp \sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}$$

$$(10) \quad \|A_0\| \exp \left[- \frac{\sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}}{1 - \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v} \right] \leq \|A^*\| \leq \|A_0\| \exp \sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}$$

Démonstration. En utilisant la méthode de l'induction mathématique, nous démontrerons que pour chaque $n = 0, 1, \dots$ on a les propriétés suivantes :

a) $x_n \in S$,

b) $\rho_n = L/2 \|A_n\|^2 \|P(\dot{x}_n)\| \leq \theta_n d^{2^n} \leq c_1 d^{p^n}$

$\delta_n = \|E - P'(x_n)A_n\| \leq \mu_n d^{2^n} \leq c_2 d^{p^n}$,

où $(\theta_n)_{n=0}^\infty$ et $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ sont des suites données par $\theta_0 = c_1$, $\mu_0 = c_2$ et par le système récurrent :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = (\theta_n^2 + \theta_n \mu_n) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2\theta_n + \mu_n)^v d^{v \cdot 2^n} \right] \\ \mu_{n+1} = (2\theta_n + \mu_n)^{r+1} d^{(r-1)2^n} \end{cases}$$

pour $n = 0, 1, \dots$

c)

$$\|A_0\| \exp \left[- \frac{\sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}}{1 - \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v} \right] \leq \|A_n\| \leq \|A_0\| \exp \sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}$$

Les hypothèses du théorème assurent que les propriétés a)–c) sont vraies pour $n = 0$. En supposant leur valabilité pour chaque $n \leq k$ naturel, on déduira leur valabilité pour $n = k + 1$:

En ce qui concerne la propriété a), nous avons:

$$a) \quad \|x_{k+1} - x_0\| \leq \sum_{i=0}^k \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=0}^k \|A_i\| \|P(x_i)\|$$

Des hypothèses ii) il résulte $0 < \|A_0\| < +\infty$ et par ce que c) est vraie pour $n \leq k$, il résulte $\|A_i\| < 0$ pour chaque $i = 0, 1, \dots, k$, donc la division par $\|A_i\|$; $i = 0, 1, \dots, k$ est possible et alors on a:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &\leq \sum_{i=0}^k \frac{2c_1 d^{p^i}}{L\|A_i\|} < \frac{2c_1}{L\|A_0\|} \exp \frac{\sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}}{1 - \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v} \times \\ &\quad \times d(1 + d^{p-1} + \dots + d^{p^k-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Mais } p^k - 1 = (p - 1)(p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + p + 1) \geq k(p - 1)$$

Du fait que $d < 1$ il résulte que la série $\sum_{v=0}^{\infty} (d^{p-1})^v$ est convergente et sa somme est $\frac{1}{1 - d^{p-1}}$. On aura donc la délimitation suivante:

$$1 + d^{p-1} + \dots + d^{p^k-1} < 1 + d^{p-1} + \dots + d^{k(p-1)} < \frac{1}{1 - d^{p-1}}$$

et

$$\|x_{k+1} - x_0\| < \frac{2c_1 d}{L\|A_0\|(1 - d)} \exp \frac{\sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}}{1 - \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v} = r_0 \leq r$$

et nous en concluons $x_{k+1} \in S$.

b) Nous établirons d'abord les inégalités suivantes:

$$(11) \quad \|P(x_{k+1})\| \leq \frac{L}{2} \|A_k\| \|P(x_k)\| + \|P(x_k)\| \|E - P'(x_k)A_k\|$$

$$(12) \quad \|E - P'(x_{k+1})A_{k+1}\| \leq (\|E - P'(x_k)A_k\| + L\|A_k\|^2\|P(x_k)\|)^{r+1}$$

$$(13) \quad \|A_{k+1}\| \leq \|A_k\| \left[1 + \sum_{v=1}^r (\|E - P'(x_k)A_k\| + L\|A_k\|^2\|P(x_k)\|)^v \right]$$

Pour (11) on constate que l'on a:

$$\begin{aligned} \|P(x_{k+1})\| &\leq \|P(x_{k+1}) - P(x_k) - P'(x_k)(x_k - x_k)\| + \\ &\quad + \|P(x_k)\| \|E - P'(x_k)A_k\| \end{aligned}$$

Du fait que la dérivée de P vérifie sur S la condition de Liepschitz il résulte :

$$\|P(x) - P(y) - P'(y)(x - y)\| \leq \frac{L}{2} \|x - y\|^2$$

pour chaque $x, y \in S$. (voir [3] pp. 139). De $x_{k+1}, x_k \in S$ il résulte (11)

Pour (12) on a :

$$\begin{aligned} E - P'(x_{k+1}) A_{k+1} &= E - P'(x_{k+1}) A_k (E + B_k + \dots + B_k^r) = \\ E - P'(x_{k+1}) A_k - P'(x_{k+1}) A_k B_k (E + B_k + \dots + B_k^{r-1}) &= \\ B_k - P'(x_{k+1}) A_k B_k (E + B_k + \dots + B_k^{r-1}) &= (E - P'(x_{k+1}) A_k) B - \\ P'(x_{k+1}) A_k B_k^2 (E + B_k + \dots + B_k^{r-2}) &= \\ + B_k^2 - P'(x_{k+1}) A_k B_k^2 (E + B_k + \dots + B_k^{r-2}) \end{aligned}$$

et en continuant de cette manière, on obtient :

$$E - P'(x_{k+1}) A_{k+1} = B_k^r - P'(x_{k+1}) A_k B_k^r = B_k^{r+1}$$

Du fait que :

$$\|B_k\| \leq \|E - P'(x_k) A_k\| + L \|A_k\|^2 \|P(x_k)\|$$

il résulte l'inégalité (12) et maintenant (13) est évidente.

En multipliant par $\frac{L}{2} \|A_{k+1}\|^2$ (11), et en utilisant (12) nous obtenons l'inégalité récurrente suivante :

$$\rho_{k+1} \leq (\rho_k^2 + \rho_k \delta_k) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2\rho_k + \delta_k)^v \right]^2$$

et de (14) on déduit :

$$\delta_{k+1} \leq (\delta_k + 2\rho_k)^{r+1}$$

De l'hypothèse de l'induction, il résulte :

$$\rho_{k+1} \leq (\theta_k^2 + \theta_k \mu_k) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2\theta_k + \mu_k)^v d^{v \cdot 2^k} \right] d^{2^{k+1}} = \theta_{k+1} d^{2^{k+1}}$$

et

$$\delta_{k+1} \leq (2\theta_k + \mu_k)^{r+1} d^{(r+1)2^k} = (2\theta_k + \mu_k)^{r+1} d^{(r-1)2^k + 2^{k+1}} = \mu_{k+1} d^{2^{k+1}}$$

Mais

$$\theta_{k+1} d^{2^{k+1}-p^{k+1}} = \left[\left(\theta_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} \right)^2 + \left(\theta_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} \right) \left(\mu_k d^{2^k - \frac{p}{2} p^k} \right) \right] \cdot \left[1 + \sum_{v=1}^r (2\theta_k + \mu_k)^v d^{v \cdot 2^k} \right]$$

et

$$\mu_{k+1} d^{2^{k+1}-p^{k+1}} = (2\theta_k + \mu_k)^{r+1} d^{(r+1)2^k} d^{2^{k+1}-p^{k+1}} = \left[(2\theta_k + \mu_k) d^{2^k - \frac{p}{r+1} p^k} \right]^{r+1}$$

Du fait que :

$$\theta_k \leq c_1 d^{p^k - 2^k} \text{ et } \mu_k \leq c_2 d^{p^k - 2^k}$$

on a :

$$\theta_{k+1} d^{2^{k+1}-p^{k+1}} \leq (c_1^2 + c_1 c_2) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^{v \cdot p^k} \right]^2 (d^{2-p})^{p^k}$$

et

$$\mu_{k+1} d^{2^{k+1}-p^{k+1}} \leq (2c_1 + c_2)^{r+1} (d^{r+1-p})^{p^k}$$

Mais : $\gamma \geq 1$ et $1 < p \leq 2$ et on a : $(d^{2-p})^{p^k} \leq d^{2-p}$ et $(d^{r+1-p})^{p^k} \leq d^{r+1-p}$ et en effet $d^{p^k} \leq d$ donc :

$$\theta_{k+1} d^{2^{k+1}-p^{k+1}} \leq (c_1^2 + c_1 c_2) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^v \right]^2 d^{2-p}$$

et

$$\mu_{k+1} d^{2^{k+1}-p^{k+1}} \leq (2c_1 + c_2)^{r+1} d^{r+1-p}$$

De la manière dont a été défini p , il résulte :

$$(p+2) \ln d \geq \ln (c_1 + c_2) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^v \right]^2$$

$$(p-2) \ln d \geq \ln \frac{(2c_1 + c_2)^{r+1} d^{r-1}}{c_2}$$

d où il résulte :

$$(c_1 + c_2) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^v \right]^2 d^{2-p} \leq 1, \quad (2c_1 + c_2)^{r+1-p} d^{r+1-p} \leq c_2$$

Il s'ensuit

$$\rho_{k+1} \leq \theta_{k+1} d^{2^{k+1}} \leq c_1 d^{p^{k+1}} \text{ et } \delta_{k+1} \leq \mu_{k+1} d^{2^{k+1}} \leq c_2 d^{p^{k+1}}$$

c) De (13) et b) il résulte :

$$\|A_0\| \prod_{v=0}^k \left[1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^v})^s \right] \leq \|A_{k+1}\| \leq \|A_0\| \prod_{v=0}^k \left[1 + \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^v})^s \right]$$

Du fait que

$$0 < \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^s})^s < \sum_{s=1}^r (\alpha d)^s \leq 1,$$

en utilisant l'inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{v=0}^k \left[1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^v})^s \right]} &\leq \left[\frac{\sum_{v=0}^k \frac{1}{1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^v})^s}}{k+1} \right]^{k+1} < \\ &< \left[1 + \frac{1}{k+1} \frac{\sum_{v=0}^k \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^v})^s}{1 - \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v} \right]^{k+1} = \left[1 + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\sum_{s=1}^r \alpha^s \sum_{v=0}^k (d^s)^{p^v}}{1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d)^s} \right]^{k+1} \end{aligned}$$

Vu que $\sum_{v=0}^k (d^s)^{p^v} = d^p [1 + (d^s)^{p-1} + (d^s)^{p^2-1} + \dots + (d^s)^{p^k-1}]$ et $(d^s)^{p^i-1} < (d^{s(p-1)})^i$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$, la série $\sum_{i=0}^{\infty} (d^{s(p-1)})^i$ est convergente et elle a la somme : $\frac{1}{1 - d^{s(p-1)}}$ Il en résulte :

$$\sum_{v=0}^k (d^s)^{p^k} < \frac{d^s}{1 - d^{s(p-1)}}$$

donc :

$$\frac{1}{\prod_{v=0}^k \left[1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^v})^s \right]} < \left[1 + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d)^s}{1 - d^{s(p-1)}}}{1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d)^s} \right]^{k+1}$$

On remarque que la suite dont le terme général est :

$$v_{k+1} = \left[1 + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d)^s}{1 - d^{s(p-1)}}}{1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d)^s} \right]^{k+1}$$

est croissante et convergente. On peut en conclure qu'elle est bornée et que :

$$v_k < \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \exp \frac{\sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d)^s}{1 - d^{s(p-1)}}}{1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d)^s}$$

pour chaque $i = 0, 1, 2, \dots$

La suite dont le terme général est:

$$u_{k+1} = \frac{1}{\prod_{v=0}^k \left[1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^v})^s \right]}$$

est aussi croissante, par ce que $\frac{u_k}{u_{k+1}} = 1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^k})^s$ pour chaque $k = 0, 1, \dots$ et de $u_k < v_k$ pour chaque $k = 0, 1, \dots$ il résulte qu'elle est aussi bornée, donc elle est aussi convergente et:

$$u_k < \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \exp \frac{\sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d)^s}{1 - d^{s(p-1)}}}{1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d)^s}$$

pour chaque $k = 0, 1, \dots$

De manière analogue on déduit

$$\prod_{v=0}^k \left[1 + \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^v})^s \right] < \exp \left[\sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d)^s}{1 - d^{s(p-1)}} \right]$$

Les inégalités a), b), c) étant vraies aussi pour $n = k + 1$ le principe de l'induction mathématique assure leur valabilité pour chaque n naturel.

Du fait que les inégalités a) — c) sont vérifiées nous déduisons que les suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ données par (5) sont fondamentales:

En effet

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_i\| \|P(x_i)\| \leq \\ &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{2c_1 d^{p^i}}{L \|A_0\|} < \frac{2c_1}{L \|A_0\|} \exp \frac{\sum_{v=1}^r \frac{(\alpha d)^v}{1 - d^{v(p-1)}}}{1 - \sum_{v=1}^r (\alpha d)^v} \times \\ &\times d^{p^n} (1 + d^{p^{n+1}-p^n} + \dots + d^{p^{n+m-1}-p^n}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|A_{n+m} - A_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_{i+1} - A_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_i\| \|B_i\| + \|B_i\|^2 + \dots \\ &+ \|B_i\|^r \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|A_i\| [\alpha d^{p^i} + (\alpha d^{p^i})^2 + \dots + (\alpha d^{p^i})^r] < \\ &< \|A_0\| \exp \sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d)^s}{1 - d^{s(p-1)}} \sum_{i=n}^{n+m-1} \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^i})^s \end{aligned}$$

Du fait que $d^{p^{n+i}-p^n} < (d^{p^n(p-1)})^i$ $i = 1, 2, \dots, m-1$ et que la série $\sum_{i=0}^{\infty} (d^{p^n(p-1)})^i$ est convergente, et qu'elle a la somme $\frac{1}{1-d^{p^n(p-1)}}$, il résulte que :

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \frac{2c_1 d^{p^n}}{L \|A_0\| (1 - d^{p^n(p-1)})} \exp \frac{\sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d)^s}{1 - d^{s(p-1)}}}{1 - \sum_{s=1}^r (\alpha d)^s}$$

Du fait que :

$$\sum_{i=n}^{n+m-1} \sum_{s=1}^r (\alpha d^{p^i})^s < \sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d^{p^n})^s}{1 - (d^{p^n(p-1)})^s}$$

il résulte :

$$\|A_{n+m} - A_n\| \leq \|A_0\| \left[\sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d^{p^n})^s}{1 - (d^{p^n(p-1)})^s} \right] \exp \sum_{s=1}^r \frac{(\alpha d)^s}{1 - d^{s(p-1)}}$$

En désignant par $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ et par $A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ et en passant à limite dans les inégalités de ci-dessus $m \rightarrow \infty$ nous obtenons (8) et (9) respectivement. De c) par $n \rightarrow \infty$ il résulte aussi que $0 < \|A^*\| < +\infty$ et de b) pour $n \rightarrow \infty$ il résulte :

$$\frac{L}{2} \|A^*\|^2 \|P(x^*)\| = 0$$

$$\|E - P'(x^*)A^*\| = 0$$

d'où l'on conclut $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$. Le théorème est donc démontré.

Remarques. 1) S'il existe la dérivée de type Fréchet du second ordre de l'application P et $\|P''(x)\| < L$ pour chaque $x \in S$, la condition i) est remplie.

2) Du fait que $1 + \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^v > 1$, il résulte $(c_1 + c_2)d < 1$ et $c_1 d, c_2 d$, étant des nombres réels et positifs on déduit $c_1 d < 1, c_2 d < 1$ par suite la condition $\|E - P'(x)A_0\| < c_2 d < 1$ exprime l'existence de l'application $[P(x_0)]^{-1}$ et le fait qu'il est nécessaire que A_0 soit une approximation de cette application. L'avantage de ce théorème est qu'il ne suppose pas l'inversabilité de $P'(x)$ pour chaque x appartenant à une sphère mais seulement pour l'élément initial x_0 . Par conséquent, l'utilisation de la méthode (5) dans les hypothèses du théorème 1 consiste à établir l'existence de la solution de l'équation (2) pour $n = 0$ et à trouver une approximation $A_0 P(x_0)$ qui corresponde à cette solution de telle manière que la condition $\|E - P'(x_0)A_0\| < c_2$, soit remplie. Après avoir trouvé l'application A_0 , on peut appliquer la méthode (5), en déterminant la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ et la suite $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ chaque A_n étant une approximation de $[P'(x_n)]^{-1}$, et par suite la propriété de l'équation (2) d'être résoluble résulte pour $n = 1, 2, \dots$ de la démonstration du théorème.

3) D'après les inégalités (7) l'ordre de convergence de la méthode (5) est $1 < p \leq 2$. Si les inégalités plus restrictives suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} (c_1 + c_2) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^v \right] \leq 1 \\ \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v d^v \leq 1 \\ (2c_1 + c_2)^{r+1} d^{r+1} \leq c_2 \end{cases}$$

sont satisfaites, alors l'ordre de convergence de la méthode est égal à 2, donc il est égal à l'ordre de convergence de la méthode de Newton à l'aide de laquelle elle est obtenue.

Si les inégalités (11) ne sont pas satisfaites, mais les inégalités (7), le sont, d'après le théorème 1, la méthode (5) étant convergente, on peut affirmer qu'il existe un nombre n_0 tel que :

$$\frac{L}{2} \|A_{n_0}\|^2 \|P(x_{n_0})\| \leq \bar{c}_1 \bar{d}$$

$$\|E - P(x_{n_0})A_{n_0}\| \leq \bar{c}_2 \bar{d}$$

ou $\bar{d} < 1$ et $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ vérifient le système d'inégalités (11). On peut tirer la conclusion qu'il existe un $n_0 \in N$, à partir duquel l'ordre de convergence de la méthode (5) devient égal à 2.

4) Dans le cas $r = 1$, le système (7) revient au suivant :

$$(12) \quad \begin{cases} (c_1 + c_2) [1 + (2c_1 + c_2)d]^2 d \leq 1 \\ (2c_1 + c_2)^2 d \leq c_2 \end{cases}$$

dans ce cas, la troisième inégalité est une conséquence des inégalités ci-dessus.

Il résulte des faits établies ci-dessus que pour les applications pratiques de ces résultats le problème le plus difficile est le choix de $x_0 \in X$ et de l'application $A_0 \in \mathfrak{L}(Y, X)$, de telle manière que les conditions ii) soient remplies ce choix est conditionné par les constantes c_1 et c_2 . On remarque que si x_0 est déterminé et que si nous avons déterminé un $\tilde{A}_0 \in \mathfrak{L}(Y, X)$, tel que $\|E - P(x_0)\tilde{A}_0\| < 1$, alors on peut déterminer à l'aide de la méthode de Schultz un $A_0 \in \mathfrak{L}(Y, X)$ tel que $\|E - P(x_0)A_0\| < c_2$ pour chaque $c_2 < 1$. Par conséquent dans le couple (c_1, c_2) , $c_2 > 0$ peut être arbitrairement petit, le couple étant le meilleur, si c_1 prend la plus grande valeur possible.

Dans ce qui suit nous nous proposons de déterminer de tels couples de valeurs.

Nous introduirons les notations suivantes :

$$\mathfrak{D}_r^{(1)} = \left\{ (u, v) \in \mathbf{R}^2, 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1/(u+v) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2u+v)^v \right]^2 \leq 1 \right\}$$

$$\mathfrak{D}_r^{(2)} = \left\{ (u, v) \in \mathbf{R}^2, 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1 / \sum_{v=1}^r (2u+v)^v \leq 1 \right\}$$

$$\mathfrak{D}_r^{(3)} = \{ (u, v) \in \mathbf{R}^2, 0 \leq u < 1, 0 \leq v < 1/(2u+v)^{r+1} \leq v \}$$

On remarque immédiatement que $r_1 < r_2$ implique $\mathfrak{D}_{r_1}^{(1)} \subset \mathfrak{D}_{r_1}^{(1)}$, $\mathfrak{D}_{r_2}^{(2)} \subset \mathfrak{D}_{r_1}^{(2)}$ et $\mathfrak{D}_{r_1}^{(3)} \subset \mathfrak{D}_{r_2}^{(3)}$. Par suite les ensembles $\mathfrak{D}_{r_1}^{(1)}$, $\mathfrak{D}_{r_2}^{(2)}$ sont de plus en plus petits, à mesure que r croît et $\mathfrak{D}_{r_2}^{(3)}$ est alors de plus en plus large. L'ensemble dans lequel on peut trouver (c_1, c_2) sera $\mathfrak{D}_r = \mathfrak{D}_{r_1}^{(1)} \cap \mathfrak{D}_{r_2}^{(2)} \cap \mathfrak{D}_{r_2}^{(3)}$.

En étudiant l'allure de la courbe $(2u + v)^{r+1} = v$ le domaine $\mathfrak{D}_r^{(3)}$ dans le plan de axes uOv est celui qui est représenté par la figure 1.

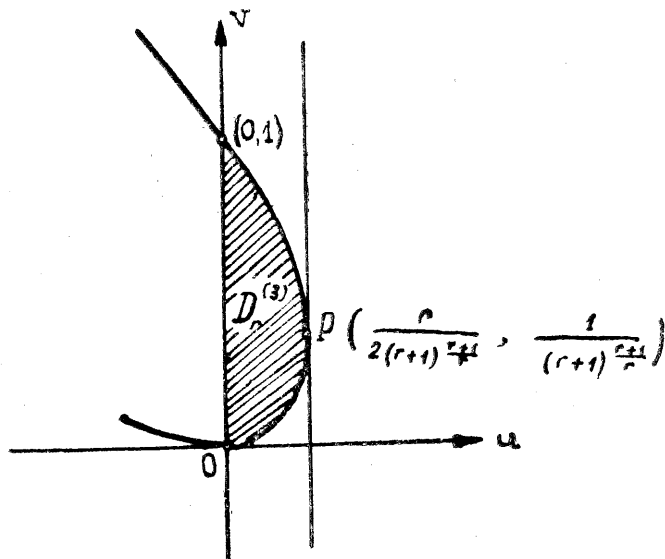


Fig. 1.

Soit P le point sur la courbe $(2u + v)^{r+1} = v$ dans lequel la tangente à cette courbe est parallèle à l'axe Ov .

On remarque que de tous les points de l'ensemble $\mathfrak{D}_r^{(3)}$, P a la plus grande abscisse.

Donc il est clair que si $P \in \mathfrak{D}_r$, les coordonnées de P , $(\bar{u}, \bar{v})$ représentant le couple des meilleurs valeurs pour c_1 et c_2 .

Alors on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. Les seules valeurs de r pour lesquelles $P \in \mathfrak{D}_r$ sont $r = 1$ et $r = 2$. Les valeurs qui correspondent pour les constantes c_1 et c_2 sont :

- a) pour $r = 1$ $c_1 = 1/8$, $c_2 = 1/4$
- b) pour $r = 2$ $c_1 = 1/(3\sqrt{3})$, $c_2 = 1/(3\sqrt{3})$.

Démonstration. On déterminera tout d'abord les coordonnées de P pour r arbitraire. Dans le système des axes uOv , l'arc de la courbe d'équation

$(2u + v)^{r+1} = v$ dans lequel $u \geq 0$, $v \geq 0$ peut s'écrire $u = \frac{1}{2} [v^{\frac{1}{r+1}} - v]$.

Du fait de la définition de P il résulte que $\bar{v}$, l'ordonnée de P , est la solution positive de l'équation $u'(v) = 0$, u' étant la dérivée de la fonction u

définie ci-dessus. L'expression de cette dérivée étant $u' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r+1} v^{-\frac{r}{r+1}} - 1 \right]$, il résulte $\bar{v} = \frac{1}{\frac{r+1}{r}}$, et dans l'expression de u il résulte $\bar{u} = \frac{r}{2(r+1)^{\frac{r}{r+1}}}$.

Pour $P \in \mathfrak{D}_r$ il est nécessaire que: $P \in \mathfrak{D}_r^{(1)}$ et $P \in \mathfrak{D}_r^{(2)}$. Du fait que $\sum_{v=1}^r (2\bar{u} + \bar{v})^v = \sum_{v=1}^r \frac{1}{(r+1)^{\frac{v}{r}}} = \frac{r}{(r+1)[(r+1)^{\frac{1}{r}} - 1]}$ ou que $r < 1$, ceci équivale

à $z_r = \frac{(r+1)^{r+1}}{(2r+1)^r}$. On remarque facilement (pour exemple en écrivant le rapport $\frac{z_{r+1}}{z_r}$ et en appliquant l'inégalité entre les moyennes) que la suite dont le terme général est z_r , définie ci-dessus, est décroissante. Par remplacement direct il résulte $z_1 = 4/3 > 1$, $z_2 = 27/25 > 1$, $z_3 = 256/343 < 1$, par suite les seules valeurs de r pour lesquelles $P \in \mathfrak{D}_r^{(2)}$ sont $r = 1$ et $r = 2$. Alors on a: pour $r = 1$, $u = 1/8$ et $v = 1/8$, donc $(\bar{u} + \bar{v})[1 + (2\bar{u} + \bar{v})]^2 = \frac{27}{32} < 1$, d'où il résulte que dans ce cas $P \in \mathfrak{D}_r^{(1)}$ pour $r = 2$, $u = 1/3\sqrt{3}$, $v = 1/3\sqrt{3}$ donc

$$(\bar{u} + \bar{v})[1 + (2\bar{u} + \bar{v}) + (2\bar{u} + \bar{v})^2]^2 = \frac{2(27 + \sqrt{27} + 1)^2}{\sqrt{27} \cdot 27^3} < 1$$

d'où l'on peut également conclure $P \in \mathfrak{D}_r^{(1)}$

Le théorème est donc démontré.

Remarques. 1) Dans les considérations ci-dessus nous avons envisagé l'ensemble de couples de nombres réels et positifs (c_1, c_2) qui vérifient le système:

$$(13) \quad \begin{cases} (c_1 + c_2) \left[1 + \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v \right]^2 \leq 1 \\ \sum_{v=1}^r (2c_1 + c_2)^v \leq 1 \\ (2c_1 + c_2)^{r+1} \leq c_3 \end{cases}$$

mais du fait que $d < 1$, il résulte que le système (11) est vérifié, c'est-à-dire il résulte que pour les constantes ci-dessus déterminées on a $p = 2$.

2) Nous bornons nos recherches au cas où $P \in \mathfrak{D}_r$. On peut considérer aussi d'autres cas et déterminer les meilleures valeurs de c_1 et c_2 qui vérifient (13) pour r -arbitraire, mais les calculs dans ce cas général sont plus compliqués.

Dans ce qui suit nous considérons les cas $r = 1$ et $r = 2$ et nous énonçons les théorèmes qui résultent du théorème 1 dans ces cas particuliers.

Soit $r = 1$. Nous sommes situés dans le cas de la méthode (4). Dans le théorème 2 on a: $c_1 = 1/8$, $c_2 = 1/4$ et $\alpha = 2c_1 + c_2 = 1/2$, $p = 2$. On énoncer le théorème suivant:

THÉOREME 3. Si dans la sphère $S = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ les conditions suivantes sont remplies :

i) l'application P admet la dérivée de type Fréchet qui vérifie la condition de Lipschitz, c'est-à-dire il existe un $L > 0$ tel que pour chaque $x, y \in S$ l'inégalité suivante est remplie :

$$\|P'(x) - P'(y)\| \leq L\|x - y\|$$

ii) le point initial x_0 et l'application initiale $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ vérifient les inégalités suivantes :

$$L \|A_0\|^2 \|P(x_0)\| < \frac{1}{4}$$

$$\|E - P'(x_0) A_0\| < \frac{1}{4}$$

iii) le rayon de la sphère S vérifie l'inégalité

$$r \geq r_0 = \frac{d}{4L\|A_0\|(1-d)} \exp^{\frac{d}{(1-d)(2-d)}}$$

ou

$$d = \max \{4L\|A_0\| \|P(x_0)\|, 4\|E - P'(x_0) A_0\|\}$$

alors :

j) les suites $(x_n)_{n=0}^\infty$ et $(A_n)_{n=0}^\infty$ générées par (4) sont convergentes

jj) l'équation (1) admet la solution $x^* \in S$ et $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

jjj) il existe l'application $[P'(x^*)]^{-1}$ et $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$ ou $A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

jv) les inégalités suivantes sont vérifiées

$$(14) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{d^{2^n}}{4L\|A_0\|(1-d^{2^n})} \exp \frac{d}{(1-d)(2-d)} \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(15) \quad \|A^* - A_n\| \leq \frac{\|A_0\| d^{2^n}}{2(1-d^{2^n})} \exp \frac{d}{2(1-d)} \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(16) \quad \frac{\|A_0\|}{\exp \frac{d}{(1-d)(2-d)}} \leq \|A^*\| \leq \|A_0\| \exp \frac{d}{1-d}$$

Soit $r = 2$. Dans ce cas nous nous sommes situés dans le cas de la méthode (6). Dans le théorème 2 on a : $c_1 = 1/(2\sqrt{3})$, $c_2 = 1/(3\sqrt{3})$, $\alpha = 1/(\sqrt{3})$, $p = 2$.

On remarque que dans ce cas nous avons obtenu la plus grande valeur pour c_1 . Dans ce cas on peut énoncer le théorème suivante :

THÉOREME 4. Si dans la sphère $S = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ les conditions suivantes sont remplies :

i) l'application P admet la dérivée de type Fréchet qui vérifie la condition de Lipschitz c'est-à-dire il existe un $L > 0$ tel que pour $x, y \in S$ l'inégalité suivante est remplie :

$$\|P'(x) - P'(y)\| \leq L\|x - y\|$$

ii) le point initial x_0 et l'application initiale $A_0 \in \mathfrak{L}(Y, X)$ vérifient les inégalités suivantes :

$$L \|A_0\|^2 \|P(x_0)\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\|E - P'(x_0)A_0\| < \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

iii) le rayon de la sphère S vérifie l'inégalité

$$r \geq r_0 = \frac{2d}{3L\sqrt{3}\|A_0\|(1-d)} \exp \frac{d\sqrt{3} + (\sqrt{3}+1)d^2}{(1-d^2)(3-d\sqrt{3}-d^2)}$$

alors :

$$d = \max \left\{ \frac{3}{3\sqrt{2}} L \|A_0\|^2 \|P(x_0)\|, 3\sqrt{3} \|E - P'(x_0)A_0\| \right\}$$

j) les suites $(x_n)_{n=0}^\infty$ et $(A_n)_{n=0}^\infty$ générées par (6) sont convergentes

jj) l'équation (1) admet la solution $x^* \in S$ et $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

jjj) il existe l'application $A^* = [P'(x^*)]^{-1}$ et $A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

jv) on a les inégalités suivantes :

$$(17) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{2d^{2^n}}{3L\sqrt{3}\|A_0\|(1-d^{2^n})} \exp \frac{d\sqrt{3} + (\sqrt{3}+1)d^2}{(1-d^2)(3-d\sqrt{3}-d^2)}$$

$$(18) \quad \|A^* - A_n\| \leq \|A_0\| \frac{\sqrt{3}d + (\sqrt{3}+1)d^{2^n+1}}{3(1-d^{2^n+1})} \exp \frac{\sqrt{3}d + (\sqrt{3}+1)d^2}{3(1-d^2)}$$

$$(19) \quad \frac{\|A_0\|}{\exp \frac{d\sqrt{3} + (\sqrt{3}+1)d^2}{(1-d^2)(3-d\sqrt{3}-d^2)}} \leq \|A^*\| \leq \|A_0\| \exp \frac{\sqrt{3}d + (\sqrt{3}+1)d^2}{3(1-d^2)}$$

Les résultats ci-dessus peuvent être appliqués à des cas particuliers d'équations pour la résolution des systèmes d'équations numériques, des équations différentielles, des équations intégrales etc. Des applications pratiques feront l'objet de travaux à paraître.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Diaconu, A., Păvăloiu, I., *Asupra unor metode iterative pentru rezolvarea ecuațiilor operationale neliniare* (I), Revista de Analiză Numerică și Teoria Aproximației, 1, 2, (1973), 61-79.
- [2] Diaconu, A., Păvăloiu, I., *Sur quelques méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles*, Revue d'Analyse Numérique et de la Théorie de l'Approximation, 1, (1972) 45-61.
- [3] Krasnosel'skii, M. A., Vainikko, G. M., Zabreiko, P. P., Rutitskii, I. B., Stečenko, V. I., *Priblizhennoe rešenje operatornih uravnenii*, Izdatel'stvo Nauka, Moskva, (1969).
- [4] Ul'm, S., *Ob iteracionnyh metodah s posledovatel'noi approksimacii obratnovo operatora*, Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR, 16, (1967), 403-411.
- [5] Vaarmann, O., *O nekatoryh iteracionnyh metodah posledovatel'noi aproksimacii abstraktnogo operatora*, (I), Izv. Acad. Nauk Estonskoi SSR, XVII, 4 (1968), 379-390.