

64
135
15-44-6

**„BABEŞ—BOLYAI" UNIVERSITY
FACULTY OF MATHEMATICS
RESEARCH SEMINARIES**

SEMINAR OF
FUNCTIONAL ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

Preprint Nr. 1, 1983

**CLUJ-NAPOCA
ROMANIA**

CONTENTS

1.	D. BRĂDEANU, Approximation procedures for the temperature field in the viscous incompressible flow through cylindrical tubes.....	1
2.	A. DIACONU, Sur quelques propriétés des dérivées de type Fréchet d'ordre supérieur.....	13
3.	A. DIACONU, Sur la dérivée de type Fréchet de l'application composée.....	27
4.	A. DIACONU, Sur la dérivée de type Fréchet d'ordre n de l'application inverse.....	42
5.	G. IANCU, Sur une fonction spline cubique.....	71
6.	G. IANCU, I. PĂVĂLOIU, I. ȘERB, Méthodes itératives optimales de type Steffensen obtenues par interpolation inverse.....	81
7.	P. T. MOCANU, D. RIPIANU, I. ȘERB, Sur l'ordre de stélarité d'une certaine classe de fonctions analytiques.....	89
8.	C. MUSTĂȚA, About the determination of extrema of a Hölder function.....	107
9.	A. B. NÉMETH, Normal cone valued metrics and nonconvex vector minimization principle.....	117
10.	A. B. NÉMETH, Vector minimization principles with and without the axiom of choice.....	155
11.	✓ I. PĂVĂLOIU, I. ȘERB, Sur des méthodes itératives de type interpolatoire à vitesse de convergence optimale.....	167
✓ 12.	I. PĂVĂLOIU, I. ȘERB, Sur des méthodes itératives optimales.....	175

Col. 133/S-44-6

SUR LA DÉRIVÉE DE TYPE FRÉCHET D'ORDRE n
DE L'APPLICATION INVERSE

par

Adrian Diaconu

Dans l'expression de certains opérateurs interviennent les dérivées de différents ordres de l'application inverse d'une application donnée. C'est pourquoi la nécessité s'impose de présenter une description de l'expression de la dérivée de la fonction inverse d'une application $f: X \rightarrow Y$ bijective où X et Y sont des espaces linéaires normés. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce travail. Nous présenterons une extension du résultat de TUROWICZ [2],[3] relatif à la dérivée d'ordre n de la fonction inverse d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Notre travail comprend trois paragraphes. Dans le premier on utilise un résultat établi dans [1] relatif à la dérivation de la fonction composée, pour obtenir une formule de récurrence pour le calcul des dérivées différents ordres de l'application inverse. Dans le deuxième paragraphe on présente quelques notions de la théorie des applications multilinéaires utilisées pour établir la formule générale de dérivation. Dans le troisième paragraphe on établit l'expression de la dérivée d'ordre n de l'application inverse et on en présente quelques cas particuliers.

§ 1. Relation de récurrence pour la dérivée d'ordre n de la fonction inverse.

Dans le travail [1] nous avons établi la formule pour la dérivation d'une fonction composée.

Nous rappelons que pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n$

on définit $A_{n; \alpha_1, \dots, \alpha_n}$ comme représentant l'ensemble des systèmes $(G_1, \dots, G_m)$ où les ensembles G_k dénommés "cellules" sont $G_k = \{i_1^{(k)}, \dots, i_{\alpha_k}^{(k)}\} \in \mathcal{C}_{n, \alpha_k}(H)$; $p_k = n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1})$ et $H_k = \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i$, $k = \overline{1, m}$ et $\mathcal{C}_{n, k}(E)$ représente l'ensemble des parts à k éléments de l'ensemble à n éléments, E .

Nous posons également :

$$(1.1) \quad \tilde{A}_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} = A_{n; \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{\ell_1}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{\ell_2}, \dots, \underbrace{\alpha_p, \dots, \alpha_p}_{\ell_p}}$$

où $\ell_1 \alpha_1 + \ell_2 \alpha_2 + \dots + \ell_p \alpha_p = n$

Soit $\sigma = (G_{1,1}, \dots, G_{1,\ell_1}, G_{2,1}, \dots, G_{2,\ell_2}, \dots, G_{p,1}, \dots, G_{p,\ell_p})$ un élément de

Nous posons

$$(1.2) \quad \varphi_{\alpha_i} = \{G_{i,1}, G_{i,2}, \dots, G_{i,\ell_i}\}, \quad i = \overline{1, p}$$

et

$$(1.3) \quad \bar{A}_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} = \{(\varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_p}) \mid \sigma \in \tilde{A}_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)}\}$$

Pour $p = n$ et $\alpha_k = k$, $k = \overline{1, n}$ nous posons

$$(1.4) \quad A[\ell_1, \dots, \ell_n] = \bar{A}_n^{(\ell_1, \dots, \ell_n)}$$

Dans [1] nous avons établi le théorème suivant :

THEOREME 1.1. Si

- i) l'application $f: X \rightarrow Y$ admet des dérivées Fréchet jusqu'à l'ordre n inclusivement au point $x \in X$;
 - ii) L'application $g: Y \rightarrow Z$ admet des dérivées Fréchet symétriques jusqu'à l'ordre n inclusivement au point $f(x) \in Y$;
- alors l'application $g \circ f: X \rightarrow Z$ admet des dérivées Fréchet

jusqu'à l'ordre n inclusivement au point x et

$$(1.5) \quad (g \circ f)^{(n)}(x) h_1 \dots h_n = \sum_{i=1}^n g^{(i)}(f(x)) U_{n,i}(f, x; h_1, \dots, h_n)$$

où

$$(1.6) \quad U_{n,i}(f, x; h_1, \dots, h_n) = \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{L}_{n,i}} \sum_{\pi \in A[l_1, \dots, l_n]} \prod_{p=1}^n \prod_{q=1}^{l_p} f^{(p)}(x) h_{j_p(\pi, q)} \dots h_{j_p(\pi, l_p)} \quad \text{où}$$

$\mathcal{L}_{n,i}$ représente l'ensemble des solutions du système

$$(1.7) \quad \begin{cases} l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = n \\ l_1 + l_2 + \dots + l_n = i \end{cases}$$

pour chaque $i = \overline{1, n}$. L'emploi du signe de produit dans l'expression de $U_{n,i}$ est symbolique, ces produits ayant la signification d'appliquer successivement $g^{(i)}(f(x))$ aux facteurs des ces produits. Par $\mathcal{L}$ nous désignons le système $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p)$ où $\mathcal{L}_i = \{G_{i,1}, \dots, G_{i,l_i}\}$ $i = \overline{1, n}$, $G_{i,k} = \{j_1^{(i,k)}, \dots, j_{l_i}^{(i,k)}\}$, $k = \overline{1, l_i}$, $i = \overline{1, n}$

Supposons dans le THEOREME 1.1, $Z = X$ et $f: X \rightarrow Y$ bijective. Alors il existe $f^{-1}: Y \rightarrow X$, l'inverse de l'application f . En ce cas, du fait que $f^{-1} \circ f = I_X$ il résulte :

$$(1.8) \quad (f^{-1} \circ f)^{(n)}(x) = \begin{cases} I_X, & \text{pour } n = 1 \\ \theta_{n-1}, & \text{pour } n > 1 \end{cases}$$

θ_{n-1} étant l'élément nul de $\mathcal{L}_{n-1}(X, Y)$. Par $\mathcal{L}_n(X, Y)$ nous désignons l'ensemble des applications n -linéaires et continues définies sur X^n avec valeurs en Y .

Ainsi de (1.5) - (1.6) pour $n = 1$ il résulte :

$$(1.9) \quad h = [f^{-1}(y)]' f'(x) h \quad \text{avec } y = f(x)$$

d'où si on choisit $h = [f'(x)]^{-1} t$, $t \in Y$ il résulte :

$$(1.10) \quad [f^{-1}(y)]' t = [f'(x)]^{-1} t \quad \text{pour chaque } t \in Y.$$

Si on suppose dans (1.5) - (1.6) $n > 1$ et $g = f^{-1}$ il résulte

$$(1.11) \quad \theta = \sum_{i=1}^n [f^{-1}(y)]^{(i)} U_{n,i}(f, x; h_1, \dots, h_n)$$

On détache de la 2^e somme du second membre de la relation (1.11) le terme obtenu pour $i = n$. On obtient

$$(1.12) \quad [f^{-1}(y)]^{(n)} U_{n,n}(f, x; h_1, \dots, h_n) = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{L}_{n,i}} \sum_{\pi \in A[l_1, \dots, l_n]} [f^{-1}(y)]^{(i)} \prod_{p=1}^n \prod_{q=1}^{l_p} h_{j_p(\pi, q)} \dots h_{j_p(\pi, l_p)}$$

On voit facilement que $U_{n,n}(f, x; h_1, \dots, h_n) = f'(x) h_1 \dots f'(x) h_n$

(voir p.ex. [1]).

Alors si on pose $h_i = [f'(x)]^{-1} t_i$, $i = \overline{1, n}$ il résulte de (1.12) :

$$(1.13) \quad [f^{-1}(y)]^{(n)} t_1 t_2 \dots t_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{L}_{n,i}} \sum_{\pi \in A[l_1, \dots, l_n]} [f^{-1}(y)]^{(i)} \prod_{p=1}^n \prod_{q=1}^{l_p} f^{(p)}(x) [f'(x)]^{-1} t_{j_p(\pi, q)} \dots [f'(x)]^{-1} t_{j_p(\pi, l_p)}$$

La formule (1.13) représente la formule de récurrence cherchée.

Si on utilise cette formule on obtient pour $n = 2$

$$(1.14) \quad ([f^{-1}(y)]'') t_1 t_2 = - [f'(x)]^{-1} f''(x) ([f'(x)]^{-1} t_1, [f'(x)]^{-1} t_2)$$

Pour $n = 3$ on obtient :

$$(1.15) \quad (f^{-1}(y))''' t_1 t_2 t_3 = \\ = [f'(x)]^{-1} f''(x) ([f'(x)]^{-1} t_1, [f'(x)]^{-1} f''(x) ([f'(x)]^{-1} t_2, [f'(x)]^{-1} t_3) \\ + [f'(x)]^{-1} f''(x) ([f'(x)]^{-1} t_2, [f'(x)]^{-1} f''(x) ([f'(x)]^{-1} t_1, [f'(x)]^{-1} t_3) \\ + [f'(x)]^{-1} f''(x) ([f'(x)]^{-1} t_3, [f'(x)]^{-1} f''(x) ([f'(x)]^{-1} t_1, [f'(x)]^{-1} t_2) \\ - [f'(x)]^{-1} f'''(x) ([f'(x)]^{-1} t_1, [f'(x)]^{-1} t_2, [f'(x)]^{-1} t_3)$$

Pour un ordre de dérivation supérieur à 3, les expressions se compliquent beaucoup.

§ 2. Couplage et enchaînements des applications multilinéaires.

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'introduire quelques notions relatives aux applications multilinéaires, notions qui seront utilisées à la description de la dérivée d'ordre n de l'application inverse.

Dans ce qui va suivre nous dirons que le rang de l'application A est n si $A \in \mathcal{L}_n(X, Y)$. On écrira $\text{rg}(A) = n$.

DEFINITION 2.1. Désignons par $A_1, A_2, \dots, A_k$ des applications multilinéaires avec $\text{rg}(A_1) = n$. On appelle couplage des applications multilinéaires $A_1, A_2, \dots, A_k$ l'application $A = [A_1, \dots, A_k] : X^n \rightarrow X^k$ définie par $A(x) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ où $y_\ell = A_\ell(x_{i_1}, \dots, x_{i_{j_\ell}})$, $j_\ell \in \text{rg}(A_\ell)$, $\ell = \overline{1, k}$ et $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{j_\ell}}\}_{\ell = \overline{1, k}}$ sont des ensembles disjoints.

Par dimension d'un couplage, nous entendrons le nombre des applications qui composent le couplage. Donc nous dirons que le

couplage A a la dimension k et nous écrirons $\dim A = k$ si on a $A = [A_1, \dots, A_k]$.

Ainsi qu'il résulte, de la définition ci-dessus, un couplage quelconque d'applications multilinéaires est une application de X^n à X^k . De ce fait il résulte qu'on peut composer deux couplages A et B au cas où $\dim A = \text{rg}(B_1) + \text{rg}(B_2) + \dots + \text{rg}(B_p)$ où $B = [B_1, \dots, B_p]$, la composition étant celle de deux applications. L'application $C = B \circ A : X^n \rightarrow X^p$ s'appelle couplage composé de A et B .

DEFINITION 2.2. L'application $T : X^n \rightarrow X$ s'appelle enchaînement de couplages s'il existe un nombre $q \in \mathbb{N}$ et les couplages $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_q$ à $\dim \bar{A}_1 = 1$ et $\text{rg} A_1^1 + \dots + \text{rg} A_1^k = n$ tels que $T = \bar{A}_1 \circ \bar{A}_2 \dots \circ \bar{A}_q$.

La totalité des ensembles des applications qui composent les couplages d'un enchaînement s'appellera l'ensemble des applications de l'enchaînement.

DEFINITION 2.3. Considérons l'ensemble des applications multilinéaires $\{A_1, \dots, A_m\}$. On appelle $(i_1, \dots, i_m)$ enchaînement de couplages avec la propriété que l'ensemble des applications de cet enchaînement contient l'application identique, l'application A_1 i_1 fois, l'application A_2 i_2 fois, etc., l'application A_m i_m fois.

Nous désignerons par $\mathcal{Y}_n^{[i_1, \dots, i_m]}(A_1, \dots, A_m)$ l'ensemble de tous les $(i_1, \dots, i_m)$ enchaînement de couplage générés par $\{A_1, \dots, A_m\}$.

Supposons $F \in \mathcal{Y}_n^{[i_1, \dots, i_m]}(A_1, \dots, A_m)$. Du fait que F est un enchaînement de couplages il résulte que toutes les applications qui composent les couplages à partir de la seconde arguments du couplage précédent. Ainsi le nombre des éléments qu'ils apparaissent comme arguments en F est égal à la somme des rangs des toutes les

applications composantes, donc à $i_1 a_1 + \dots + i_m a_m$, où $a_i = \text{rg}(A_i)$, $i = \overline{1, m}$. Ces arguments sont rangés en cellules. Chaque cellule est formée dans les applications quelles sont des arguments à une autre applications d'ent.

Ainsi

$$(2.1) \quad \mathcal{J}_n^{[i_1, \dots, i_m]}(A_1, \dots, A_m) \cong \mathcal{A}_{i_1 a_1 + \dots + i_m a_m}^{(a_1, \dots, a_m)}$$

d'où

$$(2.2) \quad \text{card } \mathcal{J}_n^{[i_1, \dots, i_m]}(A_1, \dots, A_m) = \frac{(i_1 a_1 + \dots + i_m a_m)!}{(a_1!)^{i_1} (a_2!)^{i_2} \dots (a_m!)^{i_m}}$$

En particulier l'ensemble générateur peut être choisi comme suit :

$$(2.3) \quad \left\{ [f'(x)]^{-1} f''(x), [f'(x)]^{-1} f'''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x) \right\}$$

En ce qui va suivre nous désignerons par $\mathcal{J}_n^{[i_1, \dots, i_m]}$ l'ensemble $\mathcal{J}_n^{[i_1, \dots, i_m]}([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x))$ et pour tous les enchaînements composant $\mathcal{J}_n^{[i_1, \dots, i_m]}$ nous poserons en évidence les applications génératrices. Par conséquent, pour $F \in \mathcal{J}_n^{[i_1, \dots, i_m]}$ nous écrirons $F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x))$.

Du fait que

$$(2.4) \quad \text{rg}([f'(x)]^{-1} f^{(k)}(x)) = k, \quad k = \overline{2, n}$$

et en tenant compte de (2.2) on déduit

$$(2.5) \quad \text{card } \mathcal{J}_n^{[i_1, \dots, i_m]} = \frac{(2i_2 + 3i_3 + \dots + ni_m)!}{i_2! \dots i_m! (2!)^{i_2} \dots (m!)^{i_m}}$$

Dans ce qui suit nous présentons une expression pour la dérivée de type Fréchet d'une application $G_n : X \rightarrow Y$ définie par :

$$(2.6) \quad G_n(x) = F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x)), \\ [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_n$$

où $F \in \mathcal{J}_n^{[i_1, \dots, i_m]}$ et $x, t_1, \dots, t_n$ sont des éléments fixés en X .

Dans ce but il est nécessaire de préciser quelques notions.

DEFINITION 2.4. Désignons par $X_1, \dots, X_n, Y$ des espaces linéaires normés et considérons l'application $g : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$. On dit que l'application g admet une k dérivée partielle de type Fréchet, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ s'il existe $\partial_k g(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(X_k, Y)$ et $\mathcal{E}_k : X_1 \times \dots \times X_n \times X_k \rightarrow Y$ tels que :

$$(2.7) \quad g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n) = \\ = \partial_k g(x_1, \dots, x_n)h + \mathcal{E}_k(x_1, \dots, x_n; h)$$

où

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{E}_k(x_1, \dots, x_n; h)\|}{\|h\|} = 0$$

En ces conditions l'application $\partial_k g(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(X_k, Y)$ s'appelle k dérivée partielle Fréchet de l'application g au point $(x_1, \dots, x_n)$.

REMARQUE 2.5. Pour $g \in \mathcal{L}_n(X, Y)$ on constate facilement que :

$$(2.8) \quad \partial_k g(x_1, \dots, x_n)h = g(x_1, \dots, x_{k-1}, h, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

pour chaque $k = \overline{1, n}$. Cette proposition peut se généraliser et alors on a le lemme suivant :

LEMME 2.6 Si l'application $g \in \bigcup_n^{[i_1, \dots, i_m]} (A_1, \dots, A_m)$ on a la relation (2.8) pour chaque $k = \overline{1, n}$.

Démonstration. Considérons $g : X^n \rightarrow X$, $g = \bar{A}_1 \circ \bar{A}_2 \circ \dots \circ \bar{A}_q$
 $\bar{A}_q = [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,r}]$ où $rg(\bar{A}_{q,1}) + \dots + rg(\bar{A}_{q,r}) = n$.
 Ainsi qu'il résulte de la définition d'un enchaînement, au calcul de g dans un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de X^n les éléments $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$ interviennent sous la forme d'arguments des applications $\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,r}$ du dernier couplage de cet enchaînement. Nous supposons que $\bar{A}_{q,p}$ est l'application qui contient l'argument x_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, $p \in \{1, \dots, r\}$. On a :

$$(2.9) \quad g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n) = \\ = \bar{A}_1 \circ \bar{A}_2 \circ \dots \circ \bar{A}_{q-1} \circ$$

$$\circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ , \bar{A}_{q,p+1}, \dots, \bar{A}_{q,r}] - \bar{A}_1 \circ \bar{A}_2 \circ \dots \circ \bar{A}_{q-1} \circ \\ \circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_n), \bar{A}_{q,p+1}, \dots, \bar{A}_{q,r}]$$

On met en évidence seulement les arguments de l'application $\bar{A}_{q,p}$.

Du fait que $\bar{A}_{q,p}$ est une application multilinéaire on a :

$$(2.10) \quad \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) = \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_n) + \\ + \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, h, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Stant donné que $\bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n)$ est l'argument d'une application multilinéaire du couplage $\bar{A}_{q-1}$, il résulte de (2.10)

$$(2.11) \quad \bar{A}_{q-1} \circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n), \bar{A}_{q,p+1}, \\ \dots, \bar{A}_{q,r}] = \\ = \bar{A}_{q-1} \circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_n), \bar{A}_{q,p+1}, \dots, \bar{A}_{q,r}] - \\ - \bar{A}_{q-1} \circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, h, x_{k+1}, \dots, x_n), \bar{A}_{q,p+1}, \dots, \bar{A}_{q,r}]$$

Si on continue de cette manière et on tient compte de la linéarité des applications composant les couplages de l'enchaînement il résulte :

$$(2.12) \quad \bar{A}_1 \circ \bar{A}_2 \circ \dots \circ \bar{A}_{q-1} \circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ , \bar{A}_{q,p+1}, \dots, \bar{A}_{q,r}] = \\ = \bar{A}_1 \circ \dots \circ \bar{A}_{q-1} \circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_n), \bar{A}_{q,p+1}, \dots, \bar{A}_{q,r}] - \\ - \bar{A}_1 \circ \dots \circ \bar{A}_{q-1} \circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, h, x_{k+1}, \dots, x_n), \bar{A}_{q,p+1}, \\ \dots, \bar{A}_{q,r}]$$

De (2.12) et (2.9) il résulte :

$$(2.13) \quad g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n) = \\ = \bar{A}_1 \circ \bar{A}_2 \circ \dots \circ \bar{A}_{q-1} \circ [\bar{A}_{q,1}, \dots, \bar{A}_{q,p-1}, \bar{A}_{q,p}(x_1, \dots, x_{k-1}, h, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ , \bar{A}_{q,p+1}, \dots, \bar{A}_{q,r}] = g(x_1, \dots, x_{k-1}, h, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Donc on a la relation (2.8) pour $g \in \bigcup_n^{[i_1, \dots, i_m]} (A_1, \dots, A_m)$. Le lemme est donc démontré.

Supposons donc $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ et :

$$(2.14) \quad \mathcal{K}_{n,m}^{[i_1, \dots, i_m]} = \bigcup_{\substack{A_i \in \mathcal{L}_{a_i}(X, X) \\ i=\overline{1,m}}} \mathcal{J}_m^{[i_1, \dots, i_m]}(A_1, \dots, A_m)$$

et considérons l'application :

$$(2.15) \quad F : \mathcal{L}_{a_1}(X, X) \times \dots \times \mathcal{L}_{a_m}(X, X) \longrightarrow \mathcal{K}_{n,m}^{[i_1, \dots, i_m]}$$

On a le lemme suivant :



LEMME 2.7 . Pour chaque application F on a :

$$(2.16) \quad \partial_k F(A_1, \dots, A_n)B = \sum_{i=1}^k F(A_1, \dots, A_n; B \rightarrow (A_i, 1))$$

où $F(A_1, \dots, A_n; B \rightarrow (A_k, 1)) \in \bigcap_n [i_1, \dots, i_{k-1}, i_k-1, i_{k+1}, \dots, i_n, 1]$ s'obtient de $F(A_1, \dots, A_n)$ par le remplacement de l'application A_k par B à la "1"-ième fois . On numérote les parutions d'une application selon les couplages en commençant par le premier en allant de gauche à droite.

Démonstration. Du fait que les applications composantes des couplages de l'enchaînement sont linéaire on constate que :

$$(2.17) \quad F(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k+B, A_{k+1}, \dots, A_n) - F(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^k F(A_1, \dots, A_n; B \rightarrow (A_i, 1)) + \varepsilon_k(A_1, \dots, A_n; B)$$

où $\varepsilon(A_1, \dots, A_n; B)$ représente une somme d'enchaînements dont chacun contient l'application B au moins en deux positions.

De cette manière il résulte :

$$(2.18) \quad \|\varepsilon_k(A_1, \dots, A_n)\| = P(\|A_1\|, \dots, \|A_n\|, \|B\|) \|B\|^2$$

où P est un polynôme à $n+1$ variables. De (2.18) on déduit :

$$(2.19) \quad \lim_{\|B\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_k(A_1, \dots, A_n)\|}{\|B\|} = 0$$

De (2.17) et (2.19) il résulte la relation (2.15). Le lemme est donc démontré.

Considérons maintenant les applications $g : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, $u_k : X \rightarrow X_k$, $k = \overline{1, n}$, où $X_1, X_2, \dots, X_n, X, Y$ sont des espaces normés. À l'aide des ces applications on construit l'application

$v : X \rightarrow Y$ par $v(x) = g(u_1(x), \dots, u_n(x))$. On a le lemme suivant :

LEMME 2.8 . Si les applications $u_k : X \rightarrow X_k$, $k = \overline{1, n}$ admettent des dérivées de type Fréchet au point $x \in X$ et l'application $g : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ admet des dérivées partielles de type Fréchet dans un voisinage du point $(y_1, \dots, y_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$, où $y_k = u_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, et si toutes ces dérivées sont continues en ce point, alors l'application $v : X \rightarrow Y$ définie ci-dessus admet une dérivée de type Fréchet au point x et on a :

$$(2.20) \quad v'(x)h = \sum_{k=1}^n \partial_k g(u_1(x), \dots, u_n(x)) u_k'(x)h$$

pour chaque $h \in X$.

Démonstration. Du fait que les applications u_k admettent des dérivées de type Fréchet au point $x \in X$, il résulte :

$$(2.21) \quad u_k(x+h) = u_k(x) + u_k'(x)h + \varepsilon_k(x, h), \quad k = \overline{1, n}$$

De la dérivabilité de g au point $(y_1, \dots, y_n)$ on déduit :

$$(2.22) \quad \begin{aligned} & g(y_1+t_1, y_2+t_2, \dots, y_n+t_n) - g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n [g(y_1+t_1, \dots, y_{k-1}+t_{k-1}, y_k+t_k, y_{k+1}, \dots, y_n) - \\ & \quad - g(y_1+t_1, \dots, y_{k-1}+t_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)] = \\ &= \sum_{k=1}^n [\partial_k g(y_1+t_1, \dots, y_{k-1}+t_{k-1}, y_k, \dots, y_n) t_k + \\ & \quad + \varepsilon_k(y_1+t_1, \dots, y_{k-1}+t_{k-1}, y_k, \dots, y_n) t_k] = \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_k g(y_1, \dots, y_n) t_k + \sum_{k=1}^n \{ \partial_k g(y_1+t_1, \dots, y_{k-1}+t_{k-1}, y_k, \dots, y_n) - \\ & \quad - \partial_k g(y_1, \dots, y_n) \} t_k + \varepsilon_k(y_1+t_1, \dots, y_{k-1}+t_{k-1}, y_k, \dots, y_n) t_k \} \end{aligned}$$

En choisissant $y_k = u_k(x)$ et $t_k = u'_k(x)h + \varepsilon_k(x, h)$ pour $k = \overline{1, n}$ il résulte de (2.21) et (2.22)

$$(2.23) \quad v(x+h) - v(x) = \sum_{k=1}^n \partial_k g(u_1(x), \dots, u_n(x)) u'_k(x) h + \omega(x, h)$$

où

$$(2.24) \quad \omega(x, h) = \sum_{k=1}^n \partial_k g(u_1(x), \dots, u_n(x)) \varepsilon_k(x, h) + \sum_{k=1}^n \{ [\partial_k g(u_1(x) + u'_1(x)h + \varepsilon_1(x, h), \dots, u_{k-1}(x) + u'_{k-1}(x)h + \varepsilon_{k-1}(x, h), u_k(x), \dots, u_n(x)) - \partial_k g(u_1(x), \dots, u_n(x))] (u'_k(x)h + \varepsilon_k(x, h)) + \varepsilon_k(u_1(x) + u'_1(x)h + \varepsilon_1(x, h), \dots, u_{k-1}(x) + u'_{k-1}(x)h + \varepsilon_{k-1}(x, h), u_k(x), \dots, u_n(x); u'_k(x)h + \varepsilon_k(x, h)) \}.$$

De (2.24) et en tenant compte de la continuité des dérivées partielles de g il résulte facilement que

$$(2.25) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\omega(x, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

De (2.24) et (2.25) il résulte la propriété exprimée par le lemme 2.8.

Relativement à l'application définie par (2.6) on a le théorème suivant :

THEOREME 2.9. Si l'application f admet une dérivée de type Fréchet d'ordre $n+1$ au point $x \in X$, alors pour chaque $t_1, \dots, t_n \in X$ fixés l'application $G_n : X \rightarrow X$ définie par (2.6) admet une dérivée Fréchet au point x et pour $h \in X$ on a :

$$(2.26) \quad G'_n(x)h = \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^{L_k} F([f'(x)]^{-1} f''^{(n)}_{(x)}, \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}_{(x)}; -[f'(x)]^{-1} f''_{(x)} h [f'(x)]^{-1} f^{(n)}_{(x)} + [f'(x)]^{-1} f^{(k+1)}_{(x)} h \rightarrow ([f'(x)]^{-1} f^{(k)}_{(x)}; i)) [f'(x)]^{-1} t_1, \dots, [f'(x)]^{-1} t_n - \sum_{k=1}^n F([f'(x)]^{-1} f''_{(x)}, \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}_{(x)}) [f'(x)]^{-1} t_1, \dots, [f'(x)]^{-1} t_{k-1}, [f'(x)]^{-1} f''_{(x)} h [f'(x)]^{-1} t_k, [f'(x)]^{-1} t_{k+1}, \dots, [f'(x)]^{-1} t_n$$

Démonstration. En employant le lemme 2.8 on a :

$$(2.27) \quad G'_n(x)h = \sum_{k=2}^n \left\{ \partial_k F([f'(x)]^{-1} f''_{(x)}, \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}_{(x)}) [f'(x)]^{-1} t_1, \dots, [f'(x)]^{-1} t_n \cdot ([f'(x)]^{-1} f^{(k)}_{(x)})' h + \sum_{k=1}^n \left\{ \partial_{n+k-1} F([f'(x)]^{-1} f''_{(x)}, \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}_{(x)}) [f'(x)]^{-1} t_1, \dots, [f'(x)]^{-1} t_n \cdot ([f'(x)]^{-1} t_k)' h \right\} \right\}$$

On peut démontrer facilement (v. par ex [1]) que

$$(2.28) \quad ([f'(x)]^{-1} f^{(k)}_{(x)})' h = ([f'(x)]^{-1})' h f^{(k)}_{(x)} + [f'(x)]^{-1} f^{(k+1)}_{(x)} h = -[f'(x)]^{-1} f''_{(x)} h [f'(x)]^{-1} f^{(k)}_{(x)} + [f'(x)]^{-1} f^{(k+1)}_{(x)} h$$

et

$$(2.29) \quad ([f'(x)]^{-1} t_k)' h = -[f'(x)]^{-1} f''_{(x)} h [f'(x)]^{-1} t_k$$

En employant les lemmes 2.6 - 2.8 ainsi que les relations (2.27) - (2.29) on déduit la conclusion du théorème.

§ 3. L'expression de la dérivée Fréchet d'ordre n
de l'application inverse

En tenant compte des notations et des notions introduites au paragraphe antérieur on peut établir le théorème suivant :

THEOREME 3.1. Si l'application bijective $f: X \rightarrow Y$ admet
des dérivées Fréchet symétriques au point $x \in X$ jusqu'à l'ordre n
inclusivement, alors l'application $f^{-1}: Y \rightarrow X$ admet des dérivées
Fréchet d'ordre n au point $y = f(x)$ et pour chaque $t_1, \dots, t_n \in Y$
on a :

$$(3.1) \quad (f^{-1}(y))^{(n)} t_1 t_2 \dots t_n = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{P}_{n,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{n,k}^{(i_2, \dots, i_n)}} (-1)^{n+k-1} F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x)) \cdot \\ \cdot [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_n \quad ; n \geq 2$$

où $\mathcal{P}_{n,k}$ représente l'ensemble des solutions du système

$$(3.2) \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + 3i_4 + \dots + (n-1)i_n = n-1 \\ i_2 + i_3 + \dots + i_n = n - k - 1 \end{cases}$$

Démonstration. Nous emploierons l'induction mathématique.

De (3.1) on obtient pour $n = 2$

$$(3.3) \quad (f^{-1}(y))^{(2)} t_1 t_2 = \sum_{k=0}^1 \sum_{(i_2) \in \mathcal{P}_{2,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{2,k}^{(i_2)}} (-1)^{2+k-1} F([f'(x)]^{-1} f''(x)) \cdot \\ \cdot ([f'(x)]^{-1} t_1, [f'(x)]^{-1} t_2)$$

Le système $\mathcal{P}_{2,0}$ a évidemment la seule solution $i_2 = 1$.
Du fait que $F([f'(x)]^{-1} f''(x))$ contient une seule application il
résulte :

$$F([f'(x)]^{-1} f''(x)) = [f'(x)]^{-1} f''(x)$$

De cette manière, il résulte de (3.3)

$$(f^{-1}(y))^{(2)} t_1 t_2 = -[f'(x)]^{-1} f''(x) ([f'(x)]^{-1} t_1, [f'(x)]^{-1} t_2)$$

en on constate qu'on a obtenu la même expression que l'expression
(1.14) obtenue directement. Par suite, la relation (3.1) est vraie
pour $n = 2$.

Supposons maintenant que la relation (3.1) est vraie pour $n=m$.
Dans cette hypothèse, en posant $h = f^{-1}(y+t_1) - f^{-1}(y)$, il résulte :

$$(3.4) \quad \frac{d^m f^{-1}(y+t_1)}{dy^m} t_2 \dots t_{m+1} - \frac{d^m f^{-1}(y)}{dy^m} t_2 \dots t_{m+1} = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{P}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m,k}^{(i_2, \dots, i_m)}} (-1)^{m+k-1} \left\{ F([f'(x+h)]^{-1} f''(x+h), \dots, [f'(x+h)]^{-1} f^{(m)}(x+h)) \cdot \right. \\ \cdot [f'(x+h)]^{-1} t_1 [f'(x+h)]^{-1} t_2 \dots [f'(x+h)]^{-1} t_m - \\ \left. - F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x)) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_m \right\}$$

En employant l'application $G_n: X \rightarrow X$ définie par (2.5) il
résulte :

$$(3.5) \quad \frac{d^m f^{-1}(y+t_1)}{dy^m} t_2 \dots t_{m+1} - \frac{d^m f^{-1}(y)}{dy^m} t_2 \dots t_{m+1} = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{P}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m,k}^{(i_2, \dots, i_m)}} (-1)^{m+k} [G_m(x+h) - G_m(x)]$$

En supposant l'existence de la dérivée Fréchet d'ordre $m+1$ de l'application f et en utilisant le théorème 2.9 il résulte l'existence de la dérivée Fréchet de G_m et

$$(3.6) \quad G_m(x+h) - G_m(x) = G'_m(x)h + \varepsilon_m(x,h)$$

$$\text{où } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_m(x,h)\|}{\|h\|} = 0$$

Du fait que

$$(3.7) \quad h = f^{-1}(y+t_1) - f^{-1}(y) = t_1 + (x, t_1) = [f'(x)]^{-1} t_1 + \bar{\varepsilon}(x, t_1)$$

et de (3.5) et (3.6) on déduit :

$$(3.8) \quad \frac{d^m f^{-1}(y+t_1)}{dy^m} t_2 \dots t_{m+1} - \frac{d^m f^{-1}(y)}{dy^m} t_2 \dots t_{m+1} = \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{P}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m, (i_2, \dots, i_m)}} (-1)^{m+k-1} [G'_m(x) [f'(x)]^{-1} t_1 + G'_m(x) \bar{\varepsilon}(x, t_1) + \varepsilon_m(x, h)]$$

De (3.8) il résulte l'existence de $\frac{d^{m+1} f^{-1}(y)}{dy^{m+1}}$ et

$$(3.9) \quad \frac{d^{m+1} f^{-1}(y)}{dy^{m+1}} t_1 t_2 \dots t_m t_{m+1} = \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{P}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m, (i_2, \dots, i_m)}} (-1)^{m+k-1} G'_m(x) [f'(x)]^{-1} t_1$$

En utilisant le théorème 2.9 on déduit :

$$(3.10) \quad G'_m(x) [f'(x)]^{-1} t_1 = \sum_{p=2}^m \sum_{i=1}^{l_p} \left\{ F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x); -[f'(x)]^{-1} f''(x) [f'(x)]^{-1} t_1, [f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x) + [f'(x)]^{-1} f^{(p+1)}(x) [f'(x)]^{-1} t_1 \rightarrow ([f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x); \dots) [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} \right. \\ \left. - \sum_{p=2}^m F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x) [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{p-1}, [f'(x)]^{-1} f''(x) [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} t_p, [f'(x)]^{-1} t_{p+1}, \dots, [f'(x)]^{-1} t_{m+1} \right.$$

De la linéarité des applications composantes de F il résulte :

$$(3.11) \quad F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x); -[f'(x)]^{-1} f''(x) [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x) + [f'(x)]^{-1} f^{(p+1)}(x) [f'(x)]^{-1} t_1 \rightarrow ([f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x); i)) [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} \\ + F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x) [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{p-1}, [f'(x)]^{-1} f''(x) [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} t_p, [f'(x)]^{-1} t_{p+1}, \dots, [f'(x)]^{-1} t_{m+1} \rightarrow ([f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x); i)) [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} + \\ + F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x); [f'(x)]^{-1} f^{(p+1)}(x) [f'(x)]^{-1} t_1 \rightarrow ([f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x); i)) [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1}$$

De (3.10) et (3.11) on déduit :

$$(3.12) \quad G'_m(x) [f'(x)]^{-1} t_1 = -H_1^{(m,k;F)}(i_2, \dots, i_m) + H_2^{(m,k;F)}(i_2, \dots, i_m)$$

où

$$(3.13) \quad H_1^{(m,k;F)}(i_2, \dots, i_m) =$$

$$= \sum_{p=2}^m \left[\sum_{i=1}^{i_p} F_{i,1}^{(m,k,p,i;F)}(i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0) + F_{i,2}^{(m,k,p,i;F)}(i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0) \right]$$

et

$$(3.14) \quad H_2^{(m,k,i;F)}(i_2, \dots, i_m) = \begin{cases} \sum_{p=2}^{m-1} \left[\sum_{i=1}^{i_p} F_{i,1}^{(m,k,p,i;F)}(i_2, \dots, i_{p-1}, i_{p-1}+1, i_{p+1}, \dots, i_m, 0) \right] & \text{pour } k < m-2 \\ \sum_{i=1}^{i_m} F_{i,2}^{(m,k,i;F)}(i_2, \dots, i_{m-1}, i_{m-1}+1, 1) & \text{pour } k = m-2 \end{cases}$$

En (3.13) nous avons posé

$$(3.15) \quad F_{1,1}^{(m,k,p,i;F)}(i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0) = F([f'(x)]^{-1}f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f^{(m)}(x); [f'(x)]^{-1}f''(x)[f'(x)]^{-1}t_1, [f'(x)]^{-1}f^{(p)}(x) \rightarrow [f'(x)]^{-1}f^{(p)}(x); i) [f'(x)]^{-1}t_2 \dots [f'(x)]^{-1}t_{m+1}$$

et

$$(3.16) \quad F_{1,2}^{(m,k,p,i;F)}(i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0) = F([f'(x)]^{-1}f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f^{(m)}(x), [f'(x)]^{-1}t_2 \dots [f'(x)]^{-1}t_{p-1}, [f'(x)]^{-1}f''(x)[f'(x)]^{-1}t_1, [f'(x)]^{-1}t_p, [f'(x)]^{-1}t_{p+1}, \dots, [f'(x)]^{-1}t_{m+1})$$

En (3.14) nous avons posé

$$(3.17) \quad F_{2,1}^{(m,k,p,i;F)}(i_2, \dots, i_{p-1}, i_{p-1}+1, i_{p+2}, \dots, i_m, 0) = F([f'(x)]^{-1}f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f^{(m)}(x); [f'(x)]^{-1}f^{(p+1)}(x)[f'(x)]^{-1}t_1 \rightarrow [f'(x)]^{-1}f^{(p)}(x); i) [f'(x)]^{-1}t_2 \dots [f'(x)]^{-1}t_{m+1}$$

et

$$(3.18) \quad F_{2,2}^{(m,k,i;F)}(i_2, \dots, i_{m-1}, i_{m-1}+1, 1) = F([f'(x)]^{-1}f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f^{(m)}(x); [f'(x)]^{-1}f^{(m+1)}(x)[f'(x)]^{-1}t_1 \rightarrow [f'(x)]^{-1}f^{(m)}(x); i) [f'(x)]^{-1}t_2 \dots [f'(x)]^{-1}t_{m+1}$$

On constate que : $F_{i,1}^{(m,k,p,i;F)}(i_2+1, i_3, \dots, i_m, p)$, $F_{i,2}^{(m,k,p,i;F)}(i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0)$, $F_{2,1}^{(m,k,p,i;F)}(i_2, \dots, i_{p-1}, i_{p-1}+1, i_{p+1}, \dots, i_m, 0)$ et $F_{2,2}^{(m,k,p,i;F)}(i_2, \dots, i_{m-1}, i_{m-1}+1, 1)$ sont des $(j_2, \dots, j_m, j_{m+1})$ enchaînements de couplages généraux par

$[f'(x)]^{-1}f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f^{(m)}(x), [f'(x)]^{-1}f^{(m+1)}(x)$.

Ces enchaînements sont calculés au point:

$$([f'(x)]^{-1}t_1, \dots, [f'(x)]^{-1}t_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

où $(j_2, \dots, j_m, j_{m+1})$ est égal à $(i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0)$ pour les deux premiers enchaînements et respectivement à $(i_2, \dots, i_{p-1}, i_{p-1}+1, i_{p+1}+1, i_{p+2}, \dots, i_m, 0)$ et $(i_2, \dots, i_{m-1}, i_{m-1}+1, 1, 0)$ pour les deux derniers.

Si nous examinons l'ensemble $\mathcal{S}_{m,k}$ des solutions du système

$$(3.19) \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + 3i_4 + \dots + (m-1)i_m = m-1 \\ i_2 + i_3 + i_4 + \dots + i_m = m-k+1 \end{cases}$$

il résulte pour i_m les possibilités

$$(3.20) \quad i_m = 1, \quad i_2 = i_3 = \dots = i_{m-1} = 0 \quad \text{et} \quad k = m-2$$

où

$$i_m = 0.$$

Il en résulte que l'enchaînement $F([f'(x)]^{-1}f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f^{(m)}(x), [f'(x)]^{-1}f^{(m+1)}(x))$ contient effectivement l'application $[f'(x)]^{-1}f^{(m)}(x)$.

seulement au cas $k = m - 2$ et seulement une fois. De (3.20) on déduit également que $[f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x)$ est l'application unique qui compose l'enchaînement.

Donc, pour $k = m - 2$

$$F([f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x)) [f'(x)]^{-1} t_1, \dots, [f'(x)]^{-1} t_m = \\ = [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_m$$

Pour ce motif,

$$(3.21) \quad F_{2,2}^{(m,k,i;F)}(i_2, \dots, i_{m-1}, i) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < m-2 \\ [f'(x)]^{-1} f^{(m+k)}(x) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m-1} & \text{pour } k = m-2 \end{cases}$$

et pour i on a la valeur unique $i = 1$.

De (3.9) et (3.12) il résulte :

$$(3.22) \quad \frac{d^{m+1} f^{-1}(y)}{dy^{m+1}} t_1 t_2 \dots t_m t_{m+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{I}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m,k}^{(i_2, \dots, i_m)}} (-1)^{m+k} H_1^{(m,k;F)}(i_2, \dots, i_m) + \\ + \sum_{k=0}^{m-2} \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{I}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m,k}^{(i_2, \dots, i_m)}} (-1)^{m+k-1} H_2^{(m,k;F)}(i_2, \dots, i_m)$$

La dernière partie du second membre de (3.22) peut s'écrire sous la forme :

$$(3.23) \quad \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{I}_{m,k-1}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m,k-1}^{(i_2, \dots, i_m)}} (-1)^{m+k} H_2^{(m,k-1;F)}(i_2, \dots, i_m)$$

De (3.21), (3.22) et (3.23) on déduit :

$$(3.24) \quad \frac{d^{m+1} f^{-1}(y)}{dy^{m+1}} t_1 t_2 \dots t_m t_{m+1} = \\ = \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{I}_{m,0}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m,0}^{(i_2, \dots, i_m)}} (-1)^m H_1^{(m,0;F)}(i_2, \dots, i_m) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-2} (-1)^{m+k} \left[\sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{I}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m,k}^{(i_2, \dots, i_m)}} H_1^{(m,k;F)}(i_2, \dots, i_m) + \right. \\ \left. + \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{I}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m,k}^{(i_2, \dots, i_m)}} H_2^{(m,k-1;F)}(i_2, \dots, i_m) - \right. \\ \left. - [f'(x)]^{-1} f^{(m+1)}(x) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} \right]$$

Pour $k = 0$ le système (3.19) nous donne par la soustraction des ces équations terme à terme

$$i_3 + 2i_4 + \dots + (m-2)i_m = 0,$$

d'où il résulte $i_3 = i_4 = \dots = i_m = 0$, d'où à nouveau $i_2 = m - 1$.

Donc $\mathcal{I}_{m,0} = \{(i_2, \dots, i_m) / i_2 = m-1, i_3 = i_4 = \dots = i_m = 0\}$.

De (3.13) et (3.15) on déduit :

$$(3.25) \quad H_1^{(m,0;F)}(m-1,0,\dots,0) = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} F_{1,i}^{(m,m-2,2,i;F)}(m,0,\dots,0) + F_{1,2}^{(m,m-2,2;F)}(m,0,\dots,0) = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} F([f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x); [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x) [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x) \rightarrow \\ \rightarrow ([f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x); i)) [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} + \\ + F([f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x)) [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1}$$

En $H_1^{(m,0;F)}(m-1,0,\dots,0)$ on a $F \in \mathcal{F}_{m,0}^{[i-1,0,\dots,0]}$

Nous remarquons qu'en (3.25) tous les termes de $H_1^{(m,0;F)}(m-1,0,\dots,0)$ sont des enchaînements qui contiennent $[f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x)$ m fois et si $F \in \mathcal{F}_{m,0}^{[i-1,0,\dots,0]}$, il résulte de (3.25) :

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[m-1, 0, \dots, 0]}} H_1^{(m, 0; F)}(m-1, 0, \dots, 0) = \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[m, 0, \dots, 0]}} F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m)}(x)) \cdot [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (3.26) \quad & \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{P}_{m,0}} (-1)^m \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]}} H_1^{(m, 0; F)}(i_2, \dots, i_m) = \\ & = (-1)^m \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[m-1, 0, \dots, 0]}} H_1^{(m, 0; F)}(m-1, 0, \dots, 0) = \\ & = (-1)^m \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[m, 0, \dots, 0]}} F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m+1)}(x)) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} = \\ & = (-1)^m \sum_{(i_2, \dots, i_{m+1}) \in \mathcal{P}_{m,0}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[i_2, \dots, i_{m+1}]}} F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m+1)}(x)) \cdot [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} t_2 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} \end{aligned}$$

Supposons maintenant $k \in \{1, 2, \dots, m-2\}$. Posons

$$(3.27) \quad \mathcal{F}_{p,i} = \left\{ (F, [f'(x)]^{-1} f''(x) [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x) \rightarrow \rightarrow ([f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x); i)) / F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]} \right\}$$

$i = 1, 2, \dots, i_p \quad ; \quad p = 1, 2, \dots, m.$

et

$$(3.28) \quad \mathcal{G}_p = \left\{ F \circ \underbrace{[I, \dots, I]}_{p-2}, [f'(x)]^{-1} f''(x), \underbrace{[I, \dots, I]}_{m-p+1} ; F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]} \right\}$$

$p = 1, 2, \dots, m$

En (3.28) l'opération $\circ$ signifie la composition entre l'enchaînement F et le couplage $[I, \dots, I, [f'(x)]^{-1} f''(x), I, \dots, I]$; I étant l'application identique.

On a évidemment :

$$(3.29) \quad \mathcal{F}_{m+1}^{[i_2+1, i_3, \dots, i_m; 0]} = \left(\bigcup_{p=2}^m \bigcup_{i=1}^{i_p} \mathcal{F}_{p,i} \right) \cup \left(\bigcup_{p=2}^m \mathcal{G}_p \right)$$

et du fait que les ensembles $\mathcal{F}_{p,i}$ et $\mathcal{G}_p$ sont disjoints il résulte que

$$\begin{aligned} (3.30) \quad & \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[i_2+1, i_3, \dots, i_m; 0]}} F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m+1)}(x)) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} \\ & = \sum_{p=2}^m \sum_{i=1}^{i_p} \sum_{\mathcal{F}_{p,i}} (F, [f'(x)]^{-1} f''(x) [f'(x)]^{-1} t_1 [f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x) \rightarrow \rightarrow ([f'(x)]^{-1} f^{(p)}(x); i)) + \sum_{p=2}^m \sum_{\mathcal{G}_p} F \circ [I, \dots, I, [f'(x)]^{-1} f''(x), I, \dots, I] = \\ & = \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]}} \left\{ \sum_{p=2}^m \left[\sum_{i=1}^{i_p} F_{i,1}^{(m,k,p,i;F)}(i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0) + F_{i,2}^{(m,k,p;F)}(i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0) \right] \right\} \\ & = \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]}} H_1^{(m,k;F)}(i_2, \dots, i_m) \end{aligned}$$

On constate que :

$$\begin{aligned} (3.31) \quad & \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]}} H_2^{(m,k-1;F)}(i_2, \dots, i_m) = \\ & = \sum_{p=2}^{m-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]}} \sum_{i=1}^{i_p} F_{2,1}^{(m,k,p,i;F)}(i_2, \dots, i_{p-1}, i_p-1, i_{p+1}+1, i_{p+2}, \dots, i_m, 0) = \\ & = \sum_{p=2}^{m-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]}} F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m+1)}(x)) \cdot [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1} \end{aligned}$$

Ainsi qu'il résulte de l'énoncé du théorème, nous avons désigné par $\mathcal{F}_{m+1,k}$ l'ensemble des solutions du système

$$(3.32) \quad \begin{cases} j_2 + 2j_3 + \dots + (n-3)j_n + nj_{n+1} = n \\ j_2 + j_3 + \dots + j_n + j_{n+1} = n - k \end{cases}$$

et en écrivant $j_2 - 1 = i_2, j_3 = i_3, \dots, j_n = i_n$, il résulte $(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{J}_{n,k}$.

En outre le système (3.32) peut s'écrire sous la forme :

$$(3.34) \quad \begin{cases} j_2 + 2j_3 + \dots + (p-2)j_{p-1} + (p-2)(j_p+1) + (p-1)(j_{p+1}-1) + \\ \quad + (p+2)j_{p+2} + \dots + nj_n = n - 1 \\ j_2 + j_3 + \dots + j_{p-1} + j_p + 1 + j_{p+1} - 1 + j_{p+2} + \dots + j_n = \\ \quad = n - (k-1) - 1 = n - k \end{cases}$$

pour chaque $p = 2, \dots, n-1$.

En écrivant par $j_2 = i_2, \dots, j_{p-1} = i_{p-1}, j_p + 1 = i_p, j_{p+1} - 1 = i_{p+1}, j_{p+2} = i_{p+2}, \dots, j_n = i_n$ il résulte $(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{J}_{n,k}$.

Tenant compte que le système (3.32) peut s'écrire sous la forme (3.33) ou sous l'une des formes (3.34) où $p \in \{2, \dots, n-1\}$ est fixé, on déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{(j_2, \dots, j_{m+1}) \in \mathcal{J}_{m+1,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[i_2, \dots, i_{m+1}]}} T_{m+1}(F, x) = \\ = \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{J}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[i_2+1, i_3, \dots, i_m, 0]}} T_{m+1}(F, x) + \\ + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{J}_{m,k-1}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[i_2, \dots, i_{p-1}, i_p-1, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_m, 0]}} T_{m+1}(F, x) \end{aligned}$$

et en tenant compte de (3.30) et (3.31) on déduit :

$$(3.34) \quad \sum_{(j_2, \dots, j_{m+1}) \in \mathcal{J}_{m+1,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[i_2, \dots, i_{m+1}]}} T_{m+1}(F, x) =$$

$$\begin{aligned} = \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{J}_{m,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]}} H_1^{(m,k;F)}(i_2, \dots, i_m) + \\ + \sum_{(i_2, \dots, i_m) \in \mathcal{J}_{m,k-1}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m^{[i_2, \dots, i_m]}} H_2^{(m,k-1;F)}(i_2, \dots, i_m) \end{aligned}$$

Nous avons posé $T_{m+1}(F, x) = F([f'(x)]^{-1}f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1}f^{(m+1)}(x)) [f'(x)]^{-1}t_1 \dots [f'(x)]^{-1}t_{m+1}$. Pour $k = m-1$ le système (3.32) a la solution unique $j_2 = \dots = j_m = 0, j_{m+1} = 0$. De cette manière, pour $k = m+1$ on déduit :

$$(3.35) \quad (-1)^{m+k} \sum_{(j_2, \dots, j_{m+1}) \in \mathcal{J}_{m+1,m+1}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[j_2, \dots, j_{m+1}]}} T_{m+1}(F, x) = - \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[0, \dots, 0, 1]}} T_{m+1}(F, x) = - [f'(x)]^{-1} f''(x) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_{m+1}$$

De (3.24), (3.26), (3.34) et (3.35) il résulte :

$$(3.36) \quad \frac{d^{m+1} f^{(m+1)}(y)}{dy^{m+1}} t_1 t_2 \dots t_m t_{m+1} = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m+k} \sum_{(j_2, \dots, j_{m+1}) \in \mathcal{J}_{m+1,k}} \sum_{F \in \mathcal{F}_{m+1}^{[j_2, \dots, j_{m+1}]}} F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(m+1)}(x)) ([f'(x)]^{-1} t_1, \dots, [f'(x)]^{-1} t_{m+1})$$

La relation (3.36) montre que la relation (3.1) est vraie pour $n=m+1$. En vertu du principe de l'induction mathématique il résulte que cette

relation est vraie pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Le théorème est donc démontré.

REMARQUES. A) Dans le cas $X = Y = \mathbb{R}$, en tenant compte que l'application successive de plusieurs applications multilinéaires donne leur produit, on déduit :

$$\begin{aligned} & F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x)) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_n = \\ &= \frac{(f''(x))^{i_2} (f'''(x))^{i_3} \dots (f^{(n)}(x))^{i_n}}{(f'(x))^{i_2 + i_3 + \dots + i_n}} \cdot \frac{1}{(f'(x))^n} t_1 \dots t_n = \\ &= \frac{(f''(x))^{i_2} (f'''(x))^{i_3} \dots (f^{(n)}(x))^{i_n}}{(f'(x))^{2n-k-1}} t_1 \dots t_n. \end{aligned}$$

pour chaque $F \in \mathcal{F}_n^{[i_2, \dots, i_n]}$

Donc on a :

$$\begin{aligned} (3.25) \quad & \sum_{F \in \mathcal{F}_n^{[i_2, \dots, i_n]}} F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x)) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_n = \\ &= \text{card } \mathcal{F}_n^{[i_2, \dots, i_n]} \cdot \frac{(f''(x))^{i_2} (f'''(x))^{i_3} \dots (f^{(n)}(x))^{i_n}}{(f'(x))^{2n-k-1}} t_1 \dots t_n \end{aligned}$$

Les équations du système (3.2) nous donnent par addition

$$2i_2 + 3i_3 + \dots + ni_n = 2n - k - 2$$

En employant la relation (2.5) le premier membre de (3.25) devient :

$$\frac{(2n-k-2)!}{i_2! \dots i_n! (2!)^{i_2} \dots (n!)^{i_n}} \cdot \frac{(f''(x))^{i_2} (f'''(x))^{i_3} \dots (f^{(n)}(x))^{i_n}}{(f'(x))^{2n-k-1}} t_1 \dots t_n$$

Après simplification par $t_1, \dots, t_n$ il résulte donc de (3.1)

$$(3.26) \quad (f^{-1}(y))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{P}_{n,k}} \frac{(2n-k-2)!}{i_2! \dots i_n!} \frac{1}{(f'(x))^{2n-k-2}} \cdot \left(\frac{f''(x)}{2!} \right)^{i_2} \left(\frac{f'''(x)}{3!} \right)^{i_3} \dots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right)^{i_n}$$

Cette relation a été établie par TUROWICZ [3]. Une démonstration directe de cette formule est donnée aussi dans [2].

B) Du fait que

$$\| [f^{-1}(y)]^{(n)} \| = \sup_{\substack{\|t_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \| (f^{-1}(y))^{(n)} t_1 t_2 \dots t_n \|$$

et que

$$\begin{aligned} & \| F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x)) [f'(x)]^{-1} t_1 \dots [f'(x)]^{-1} t_n \| \leq \\ & \leq \| F([f'(x)]^{-1} f''(x), \dots, [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x)) \| \cdot \| [f'(x)]^{-1} \|^{2n} \| t_1 \| \dots \| t_n \| \leq \\ & \leq \| [f'(x)]^{-1} f''(x) \|^{i_2} \dots \| [f'(x)]^{-1} f^{(n)}(x) \|^{i_n} \| [f'(x)]^{-1} \|^{2n} \| t_1 \| \dots \| t_n \| \leq \\ & \leq \| f''(x) \|^{i_2} \dots \| f^{(n)}(x) \|^{i_n} \| [f'(x)]^{-1} \|^{2n-k-1} \| t_1 \| \dots \| t_n \| \end{aligned}$$

on déduit par une voie similaire à celle employée dans la remarque

A) :

$$(3.27) \quad \| [f^{-1}(y)]^{(n)} \| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{P}_{n,k}} \frac{(2n-k-2)!}{i_2! \dots i_n!} \| [f'(x)]^{-1} \|^{2n-k-1}$$

$$\left(\frac{\| f''(x) \|}{2!} \right)^{i_2} \left(\frac{\| f'''(x) \|}{3!} \right)^{i_3} \dots \left(\frac{\| f^{(n)}(x) \|}{n!} \right)^{i_n}$$

Cette relation peut être utilisée pour évaluer le reste dans les formules d'interpolation inverse.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 DIACONU, A., Sur la dérivée de type Fréchet de l'application composée, Preprint Nr.1, 1983, "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminars, Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods.
- 2 PAVALOIU, I., Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981.
- 3 TUROWICZ, B.A., Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse, Colloq. Math. (1959), 83 - 87.

SUR UNE FONCTION SPLINE CUBIQUE

par

G. Iancu

Désignons par

$$(1) \quad \Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

une partition de l'intervalle $[a, b]$ et par

$$(2) \quad f_0, f_1, \dots, f_n$$

les valeurs de la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sur les noeuds (1).

Nous considérons la fonction spline cubique qui correspond à ces données [1], sous la forme :

$$(3) \quad s(x) = \frac{M_1 - M_{1-1}}{6 h_1} (x - x_{1-1})^3 + \frac{M_{1-1}}{2} (x - x_{1-1})^2 + M_{1-1}(x - x_{1-1}) + f_{1-1}$$

où $M_1 \neq M_{1-1}$, $x \in [x_{1-1}, x_1]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, qui vérifie, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$ les conditions :

$$(4) \quad \begin{aligned} s(x_{1-1}) &= f_{1-1} \\ s'(x_{1-1}) &= M_{1-1} \end{aligned}$$

Si nous imposons les conditions

$$(5) \quad \begin{aligned} s(x_1) &= f_1 \\ s'(x_1) &= M_1 \end{aligned}$$

pour chaque $i = 0, 1, \dots, n$ on obtient la formule de récurrence