

604
133
B-44-6

**„BABEŞ—BOLYAI” UNIVERSITY
FACULTY OF MATHEMATICS
RESEARCH SEMINARIES**

SEMINAR OF
FUNCTIONAL ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

Preprint Nr. 1, 1983

**CLUJ-NAPOCA
ROMANIA**

Col. 133/S-44-6

CONTENTS

1. D. BRĂDEANU, Approximation procedures for the temperature field in the viscous incompressible flow through cylindrical tubes..... 1
2. A. DIACONU, Sur quelques propriétés des dérivées de type Fréchet d'ordre supérieur..... 13
3. A. DIACONU, Sur la dérivée de type Fréchet de l'application composées..... 27
4. A. DIACONU, Sur la dérivée de type Fréchet d'ordre n de l'application inverse..... 42
5. G. IANCU, Sur une fonction spline cubique..... 71
6. G. IANCU, I. PĂVĂLOIU, I. ȘERB, Méthodes itératives optimales de type Steffensen obtenues par interpolation inverse..... 81
7. P. T. MOCANU, D. RIPIANU, I. ȘERB, Sur l'ordre de stélarité d'une certaine classe de fonctions analytiques..... 89
8. C. MUSTĂȚA, About the determination of extrema of a Hölder function..... 107
9. A. B. NÉMETH, Normal cone valued metrics and nonconvex vector minimization principle..... 117
10. A. B. NÉMETH, Vector minimization principles with and without the axiom of choice..... 155
11. ✓ I. PĂVĂLOIU, I. ȘERB, Sur des méthodes itératives de type interpolatoire à vitesse de convergence optimale..... 167
- ✓ 12. I. PĂVĂLOIU, I. ȘERB, Sur des méthodes itératives optimales..... 175

$$= \delta + \|[f(x)]^{-1}\|,$$

donc $\delta \leq (\delta + \|[f(x)]^{-1}\|) \|f(x+h) - f(x)\| \|[f(x)]^{-1}\|$.

Du fait que f est dérivable, il résulte qu'elle est continue, d'où l'on déduit qu'il existe un h_0 dans X tel que pour chaque $h \in X$ avec $\|h\| \leq \|h_0\|$ on a:

$$\|f(x+h) - f(x)\| \cdot \|[f'(x)]^{-1}\| < 1,$$

d'où il résulte:

$$\delta \leq \frac{\|[f'(x)]^{-1}\|^2 \|f(x+h) - f(x)\|}{1 - \|f(x+h) - f(x)\| \cdot \|[f'(x)]^{-1}\|}$$

et à cause de la continuité de f il résulte la continuité de g , donc:

$$(45) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|[f'(x+h)]^{-1} - [f'(x)]^{-1}\| = 0.$$

De (43) et (45) il résulte que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\| \varepsilon_g(x,h) \|}{\|h\|} = 0$, donc g

admet une dérivée Fréchet et cette dérivée est donnée par (40). La proposition est donc démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 Diaconu, A., Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenues par l'interpolation inverse (I); Preprint Nr. 4, 1981, "Babeş-bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research seminars, Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods, 1-51.
- 2 Diaconu, A., Interpolare cu noduri multiple, vol. Studiul unor operatori ce intervin în fizică tehnică şi economie, Contract M.E.I. Nr. 9 / 1982.

SUR LA DÉRIVÉE DE TYPE FRÉCHET DE L'APPLICATION COMPOSÉE

par

Adrian Diaconu

Dans ce travail nous désirons établir une formule pour exprimer la dérivée d'ordre n de l'application composée de deux fonctions à l'aide des dérivées de diverse ordres des fonctions composantes. Dans le cas des fonctions réelles de variables réelles de telles formules sont connues. Une démonstration en est donnée dans [5].

Dans [6], T. POPOVICIU établit une formule pour la différence divisée d'ordre n d'une fonction composée de deux fonctions réelles de variables réelles. Certains aspect de cette formule ont été généraliser par I. PAVALOIU dans [3], [4]. Dans ([2], p.309) et dans [4] on donne sans démonstration un cas particulier de la formule que nous établirons dans ce qui va suivre.

Considérons les espaces linéaires et normés X, Y, Z et les applications $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$. Par l'application composée des applications f et g nous entendons l'application $g \circ f: X \rightarrow Z$ définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Nous designons par $\mathcal{L}_m(X, Y)$ l'ensemble des applications n linéaires et continues en rapport à chaque variable.

Nous établirons pour commencer le lemme suivant:

LEMME 1. Considérons les applications $u_i: X \rightarrow Y$, $i = \overline{1, n}$, $w: X \rightarrow Z$ et $v: Z \rightarrow \mathcal{L}_m(X, Y)$ qui admettent des dérivées de type Fréchet du premier ordre. Dans ces conditions l'application

$g : X \rightarrow Y$ définie par $g(x) = v(w(x))(u_1(x), \dots, u_n(x))$ admet une dérivée du premier ordre et

$$(1) \quad g'(x)h = v'(w(x))w'(x)h(u_1(x), \dots, u_n(x)) + \sum_{k=1}^n v(w(x))(u_1(x), \dots, u_{k-1}(x), u'_k(x)h, u_{k+1}(x), \dots, u_n(x))$$

Démonstration. Du fait que les fonctions $u_i : X \rightarrow Y, i = \overline{1, n}$ et $w : X \rightarrow Z$ admettent des dérivées Fréchet il résulte :

$$u_i(x+h) = u_i(x) + u'_i(x)h + \varepsilon_{u_i}(x, h), \quad i = \overline{1, n}$$

et

$$w(x+h) = w(x) + w'(x)h + \varepsilon_w(x, h)$$

où

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_{u_i}(x, h)\|}{\|h\|} = 0; \quad i = \overline{1, n} \quad \text{et} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_w(x, h)\|}{\|h\|} = 0$$

à cause de ces relations il résulte :

$$(2) \quad g(x+h) - g(x) = v(w(x+h))(u_1(x+h), \dots, u_n(x+h)) - v(w(x))(u_1(x), \dots, u_n(x)) = \\ = v(w(x) + w'(x)h + \varepsilon_w(x, h))(u_1(x) + u'_1(x)h + \varepsilon_{u_1}(x, h), \dots, \\ \dots, u_n(x) + u'_n(x)h + \varepsilon_{u_n}(x, h)) - v(w(x))(u_1(x), \dots, u_n(x))$$

Du fait que l'application $v : Z \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ admet une dérivée de type Fréchet il résulte :

$$(3) \quad v(w(x) + w'(x)h + \varepsilon_w(x, h)) = v(w(x)) + v'(w(x)). \\ \cdot (w'(x)h + \varepsilon_w(x, h)) + \varepsilon_v(w(x), w'(x)h + \varepsilon_w(x, h)).$$

De (2) et (3) on déduit :

$$(4) \quad g(x+h) - g(x) = v'(w(x))w'(x)h(u_1(x), \dots, u_n(x)) + \\ + \sum_{k=1}^n v(w(x))(u_1(x), \dots, u_{k-1}(x), u'_k(x)h, u_{k+1}(x), \dots, u_n(x)) + \\ + \varepsilon(x, h)$$

où

$$(5) \quad \varepsilon(x, h) = \sum_{p=2}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} v(w(x)) (q_1, \dots, q_n)_{[i_1, \dots, i_p]} + \\ + [v'(w(x)) \varepsilon_w(x, h) + \varepsilon_v(w(x), w'(x)h + \varepsilon_w(x, h))] \cdot \\ \cdot (u_1(x) + u'_1(x)h + \varepsilon_{u_1}(x, h), \dots, u_n(x) + u'_n(x)h + \varepsilon_{u_n}(x, h))$$

où

$$(6) \quad (q_1, \dots, q_n)_{[i_1, \dots, i_p]} = \\ = (u_1(x), \dots, u_{i_1-1}(x), u'_{i_1}(x)h, u_{i_1+1}(x), \dots, u_{i_p-1}(x), u'_{i_p}(x)h, \\ u_{i_p+1}(x), \dots, u_n(x))$$

De (5) et (6) on déduit :

$$(7) \quad \frac{\|\varepsilon(x, h)\|}{\|h\|} \leq \sum_{p=2}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \|v(w(x))\| \cdot A_{i_1, \dots, i_p} + \\ + \sum_{p=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \|v'(w(x))\| \cdot \|w'(x)\| \cdot \|h\| A_{i_1, \dots, i_p} + \\ + \left[\|v'(w(x))\| \frac{\|\varepsilon_w(x, h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\varepsilon_v(w(x), w'(x)h + \varepsilon_w(x, h))\|}{\|w'(x)h + \varepsilon_w(x, h)\|} (\|w'(x)\| + \right. \\ \left. + \frac{\|\varepsilon_w(x, h)\|}{\|h\|}) \right] \times \prod_{i=1}^n (\|u_i(x)\| + \|u'_i(x)\| \cdot \|h\| + \|\varepsilon_{u_i}(x, h)\|)$$

où

$$(8) \quad A_{1, \dots, 1_p} = \frac{\prod_{i=1}^n \|u_i(x)\| \cdot \prod_{j=1}^p \|u'_j(x)\|}{\prod_{j=1}^p \|u_{i_j}(x)\|} \|h\|^p$$

De (7) et (8) il résulte immédiatement $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(x, h)\|}{\|h\|} = 0$

d'où à cause de (4) on déduit (1). Le lemme est donc démontré.

De ce lemme il résulte évidemment le corollaire suivant

COROLLAIRE 2. Si les applications $u_i : X \rightarrow Y$, $i = \overline{1, n}$, $w : X \rightarrow Z$ et $v : Z \rightarrow \mathcal{L}_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}(X, Y)$ admettent des dérivées Fréchet, alors l'application $g : X \rightarrow Y$ définie par :

$$g(x) = v(w(x))(u_1^{\alpha_1}(x), \dots, u_n^{\alpha_n}(x))$$

admet une dérivée Fréchet et

$$(9) \quad g'(x)h = v'(w(x))w'(x)h(u_1^{\alpha_1}(x), \dots, u_n^{\alpha_n}(x)) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} v(w(x))(u_1^{\alpha_1}(x), \dots, u_{k-1}^{\alpha_{k-1}}(x), \underbrace{u_k^{\alpha_k}(x), \dots, u_k^{\alpha_k}(x)}_i, u_{k+1}^{\alpha_{k+1}}(x), \dots, u_n^{\alpha_n}(x)) \cdot \underbrace{u'_k(x)h, u_k^{\alpha_k-1}(x)}_{\alpha_k-i-1}$$

Si $v(w(x)) \in \mathcal{L}_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}(X, Y)$ est symétrique, alors on a la relation

$$(10) \quad g'(x)h = v'(w(x))w'(x)h(u_1^{\alpha_1}(x), \dots, u_n^{\alpha_n}(x)) + \sum_{k=1}^n \alpha_k v(w(x))(u_1^{\alpha_1}(x), \dots, u_{k-1}^{\alpha_{k-1}}(x), u_k^{\alpha_k-1}(x), u'_k(x)h, u_{k+1}^{\alpha_{k+1}}(x), \dots, u_n^{\alpha_n}(x))$$

En ce qui concerne la dérivée du premier ordre de l'application composée on a le lemme suivant :

LEMME 3. Si l'application $f : X \rightarrow Y$ admet une dérivée

Fréchet au point $x \in X$ et l'application $g : Y \rightarrow Z$ admet aussi une dérivée Fréchet au point $f(x) \in Y$, alors l'application $g \circ f : X \rightarrow Z$ admet une dérivée Fréchet au point $x \in X$ et

$$(11) \quad (g \circ f)'(x)h = g'(f(x))f'(x)h$$

Démonstration. Des hypothèses du lemme on déduit

$$(12) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \varepsilon_f(x, h),$$

pour chaque $h \in X$ et où $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_f(x, h)\|}{\|h\|} = 0$ et

$$(13) \quad g(y+t) = g(y) + g'(y)t + \varepsilon_g(y, t)$$

pour $y = f(x)$ et $\lim_{\|t\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon_g(y, t)\|}{\|t\|} = 0$. De (12) et (13) il résulte

$$(14) \quad \begin{aligned} (g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) = \\ &= g(f(x) + f'(x)h + \varepsilon_f(x, h)) - g(f(x)) = \\ &= g'(f(x)) [f'(x)h + \varepsilon_f(x, h)] + \varepsilon_g(f(x), f'(x)h + \varepsilon_f(x, h)) = \\ &= g'(f(x))f'(x)h + \varepsilon(x, h), \end{aligned}$$

où

$$(15) \quad \varepsilon(x, h) = g'(f(x)) \varepsilon_f(x, h) + \varepsilon_g(f(x), f'(x)h + \varepsilon_f(x, h))$$

De (15) on déduit :

$$\frac{\|\varepsilon(x, h)\|}{\|h\|} = \|g'(f(x))\| \frac{\|\varepsilon_f(x, h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\varepsilon_g(f(x), f'(x)h + \varepsilon_f(x, h))\|}{\|f'(x)h + \varepsilon_f(x, h)\|} \cdot \left(\|f'(x)\| + \frac{\|\varepsilon_f(x, h)\|}{\|h\|} \right)$$

d'où il résulte $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(x, h)\|}{\|h\|} = 0$ et à cause de (14) on déduit la relation (11). Le lemme est donc démontré.

Si nous imposons la condition que les dérivées Fréchet de diverse ordres de l'application g soient symétriques et utilisons la relation (11) à laquelle nous appliquons successivement le lemme 1, nous déduisons :

$$(16) \quad (g \circ f)''(x)h_1h_2 = g''(f(x))f'(x)h_1f'(x)h_2 + g'(f(x))f''(x)h_1h_2$$

$$(17) \quad (g \circ f)'''(x)h_1h_2h_3 = g'''(f(x))f'(x)h_1f'(x)h_2f'(x)h_3 + \\ + g''(f(x)) [f'(x)h_1f''(x)h_2h_3 + f'(x)h_2f''(x)h_1h_3 + \\ + f'(x)h_3f''(x)h_1h_2] + g'(f(x))f'''(x)h_1h_2h_3$$

Dans (17) la parenthèse signifie que $g''(f(x))$ s'applique à tous les termes contenus à l'intérieur de cette parenthèse.

Pour la dérivée du quatrième ordre on a :

$$(18) \quad (g \circ f)^{(4)}(x)h_1h_2h_3h_4 = \sum_{i=1}^4 g^{(i)}(f(x))U_i(f, x; h_1, h_2, h_3, h_4)$$

où

$$U_1(f, x; h_1, h_2, h_3, h_4) = f^{(4)}(x)h_1h_2h_3h_4$$

$$U_2(f, x; h_1, h_2, h_3, h_4) = f''(x)h_1h_2f''(x)h_3h_4 + f''(x)h_1h_3f''(x)h_2h_4 + \\ + f''(x)h_1h_4f''(x)h_2h_3 + f'(x)h_1f'''(x)h_2h_3h_4 + f'(x)h_2f'''(x)h_1h_3h_4 + \\ + f'(x)h_3f'''(x)h_1h_2h_4 + f'(x)h_4f'''(x)h_1h_2h_3$$

$$U_3(f, x; h_1, h_2, h_3, h_4) = f'(x)h_1f'(x)h_2f''(x)h_3h_4 + \\ + f'(x)h_1f'(x)h_3f''(x)h_2h_4 + f'(x)h_1f'(x)h_4f''(x)h_2h_3 + \\ + f'(x)h_2f'(x)h_3f''(x)h_1h_4 + f'(x)h_2f'(x)h_4f''(x)h_1h_3 + \\ + f'(x)h_3f'(x)h_4f''(x)h_1h_2$$

Nous posons maintenant

$$(21) \quad \bar{A}_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} = \{(\varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_p}) \mid \sigma \in \bar{A}_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)}\}$$

$$\text{où } \varphi_{\alpha_i} = \{G_{i,1}, G_{i,2}, \dots, G_{i,\ell_i}\} ; i = \overline{1, p} \quad \text{et}$$

$$\sigma = (G_{1,1}, \dots, G_{1,\ell_1}, G_{2,1}, \dots, G_{2,\ell_2}, \dots, G_{p,1}, \dots, G_{p,\ell_p})$$

Le nombre des éléments de $\bar{A}_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)}$ est évidemment

$$\frac{n!}{(\alpha_1!)^{\ell_1} \ell_1! (\alpha_2!)^{\ell_2} \ell_2! \dots (\alpha_p!)^{\ell_p} \ell_p!}$$

Dans l'expression de la dérivée Fréchet d'ordre n de la fonction composée intervient l'ensemble décrit par (21) avec $p = n$ et $\alpha_i = 1, i = \overline{1, n}$ et nous écrivons

$$(22) \quad A[l_1, \dots, l_n] = \bar{A}_n^{(1, \dots, 1)}$$

A l'aide des notations et des résultats ci-dessus, le principal résultat de ce travail est le suivant:

THEOREME 4. Si

i) l'application $f: X \rightarrow Y$ admet des dérivées Fréchet jusqu'à l'ordre n inclusivement au point $x \in X$;

ii) l'application $g: Y \rightarrow Z$ admet des dérivées Fréchet symétriques jusqu'à n inclusivement au point $f(x) \in Y$;

alors l'application $g \circ f: X \rightarrow Z$ admet des dérivées Fréchet jusqu'à l'ordre n inclusivement au point x et

$$(23) \quad (g \circ f)^{(n)}(x)h_1 \dots h_n = \sum_{i=1}^n g^{(i)}(f(x))U_{n,i}(f, x; h_1, \dots, h_n)$$

où

$$(24) \quad U_{n,i}(f, x; h_1, \dots, h_n) =$$

$$= \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{L}_{n,i}} \sum_{\pi \in A[l_1, \dots, l_n]} \prod_{p=1}^n \prod_{q=1}^{l_p} f^{(p)}_{\pi(p,q)}(x) h_{j_{\pi(p,q)}^{(p,q)}} \dots h_{j_{\pi(n,l_n)}^{(n,l_n)}}$$

où $\mathcal{L}_{n,i}$ représente l'ensemble des solutions du système

$$(25) \quad \begin{cases} l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = n \\ l_1 + l_2 + \dots + l_n = 1 \end{cases}$$

pour chaque $i = \overline{1, n}$. L'emploi du signe de produit dans l'expression de $U_{n,i}$ est symbolique ayant la signification d'appliquer successivement $g^{(i)}(f(x))$ aux facteurs des ces produits. Par π nous désignons l'ensemble $\{q_1, \dots, q_n\}$ où $q_i = \{G_{i,1}, G_{i,2}, \dots, G_{i,l_i}\}$ et $G_{i,k} = \{j_{i,k}^{(i,k)}, \dots, j_{i,k}^{(i,k)}\}$ $k = \overline{1, l_i}$; $i = \overline{1, n}$.

Démonstration. L'existence des dérivées jusqu'à l'ordre n de l'application $g \circ f$ au point x résulte par utilisation successive du lemme 2. Les relations (23) - (24) seront établies par induction mathématique. À cause des relations (16) - (18) on déduit que les relations (23) - (24) sont vérifiées pour $n = 1, 2, 3, 4$. Nous supposons que (23) - (24) sont vraies pour $n=k$. Dans cette hypothèse en employant le lemme 1 il résulte :

$$(26) \quad \begin{aligned} & (g \circ f)^{(k+1)}(x) h_1 h_2 \dots h_k h_{k+1} = \\ &= \sum_{i=1}^k [g^{(i+1)}(f(x)) f'(x) h_{k+1} U_{k,i}(f, x; h_1, \dots, h_k) + g^{(i)}(f(x)) U'_{k,i}(f, x; h_1, \dots, h_k) f] \\ &= g'(f(x)) U'_{k,i}(f, x; h_1, h_2, \dots, h_k) h_{k+1} + \\ &+ \sum_{i=2}^k g^{(i)}(f(x)) [f'(x) h_{k+1} U_{k,i-1}(f, x; h_1, \dots, h_k) + U'_{k,i-1}(f, x; h_1, \dots, h_k) f] \\ &+ g^{(k+1)}(f(x)) f'(x) h_{k+1} U_{k,k}(f, x; h_1, \dots, h_k) \end{aligned}$$

On remarque facilement que la solution unique du système :

$$\begin{cases} l_1 + 2l_2 + \dots + kl_k = k \\ l_1 + l_2 + \dots + l_k = 1 \end{cases}$$

est $l_1 = \dots = l_{k-1} = 0$ et $l_k = 1$ d'où

$$\{j_{i,1}^{(p,q)}, \dots, j_{i,p}^{(p,q)}\} = \begin{cases} \emptyset & p = \overline{1, k-1} \\ \{1, \dots, k\} & p = k \end{cases}$$

donc

$$(27) \quad U_{1,k}(f, x; h_1, \dots, h_k) = f^{(k)}(x) h_1 h_2 \dots h_k.$$

En outre la solution unique du système :

$$\begin{cases} l_1 + 2l_2 + \dots + kl_k = k \\ l_1 + l_2 + \dots + l_k = k \end{cases}$$

est $l_1 = k, l_2 = \dots = l_k = 0$, d'où

$$\{j_{i,1}^{(p,q)}, \dots, j_{i,p}^{(p,q)}\} = \begin{cases} \{q\} & p = 1, q = \overline{1, k} \\ \emptyset & p = \overline{2, k} \end{cases}$$

donc

$$(28) \quad U_{k,k}(f, x; h_1, \dots, h_k) = f'(x) h_1 f'(x) h_2 \dots f'(x) h_k$$

À cause de (27) on déduit :

$$(29) \quad U'_{1,k}(f, x; h_1, \dots, h_k) h_{k+1} = f^{(k+1)}(x) h_1 \dots h_k h_{k+1} = U_{1,k+1}(f, x; h_1, h_2, \dots, h_{k+1})$$

et à cause de (28) il résulte :

$$(30) \quad f'(x) h_{k+1} U_{k,k}(f, x; h_1, \dots, h_k) = f'(x) h_1 \dots f'(x) h_k f'(x) h_{k+1} = U_{k+1,k+1}(f, x; h_1, \dots, h_k, h_{k+1}).$$

(Nous avons, tenu compte aussi de la symétrie des dérivées Fréchet de l'application g).

En outre

$$(31) \quad f'(x) h_{k+1} U_{k,i-1}(f, x; h_1, \dots, h_k) = \\ = \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{P}_{k,i-1}} \sum_{\pi \in A[l_1, \dots, l_k]} f'(x) h_{k+1} \prod_{p=1}^k \prod_{q=1}^{l_p} f^{(p)}(x) h_{j_p^{(p,q)}} \dots h_{j_p^{(p,l_p)}}$$

Les indices des variables des dérivées de f situés au second membre de la relation (31) sont

$$(32) \quad (k+1), \underbrace{(j_1^{(1,1)}), \dots, (j_1^{(1,l_1)})}_{l_1}, \underbrace{(j_2^{(2,1)}), \dots, (j_2^{(2,l_2)})}_{l_2}, \dots, \underbrace{(j_k^{(k,1)}), \dots, (j_k^{(k,l_k)})}_{l_k}$$

Si nous posons $t_1 = l_1 + 1, t_2 = l_2, \dots, t_k = l_k$ et désignons par τ le système d'indices (32), il résulte évidemment

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 + \dots + kt_k + (k+1)t_{k+1} = k+1 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_k + t_{k+1} = i \end{cases}$$

et $\tau \in A[t_1, t_2, \dots, t_{k+1}]$. Tous les systèmes d'indices τ de type (32) sont constitués par le seul élément "k+1" et les autres indices constituent un élément arbitraire de l'ensemble $A[t_1, t_2, \dots, t_k]$

Evidemment

En outre nous appliquons le lemme 1. Nous constatons que

$$(33) \quad U_{k,i}(f, x; h_1, \dots, h_k) h_{k+1} = \\ = \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{P}_{k,i}} \sum_{\pi \in A[l_1, \dots, l_k]} \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^{l_p} \left[\prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq p}}^{l_p} f^{(p)}(x) h_{j_p^{(p,\lambda)}} \dots h_{j_p^{(p,l_p)}} \right] \left[f^{(p+1)}(x) h_{k+1} h_{j_p^{(p+1,q)}} \dots h_{j_p^{(p+1,l_p)}} \right]$$

Les indices des variables des dérivées de f d'un terme arbitraire des sommes du membre droit de l'égalité (33) pour $p < k$ sont :

$$(34) \quad \underbrace{(j_1^{(1,1)}), \dots, (j_1^{(1,l_1)})}_{l_1}, \underbrace{(j_2^{(2,1)}), \dots, (j_2^{(2,l_2)})}_{l_2}, \dots, \underbrace{(j_{p-1}^{(p-1,1)}), \dots, (j_{p-1}^{(p-1,l_{p-1})})}_{l_{p-1}}, \\ \underbrace{(j_p^{(p,1)}), \dots, (j_p^{(p,l_p)})}_{l_p}, \dots, \underbrace{(j_{p+1}^{(p+1,1)}), \dots, (j_{p+1}^{(p+1,l_{p+1})})}_{l_{p+1}}, \dots, \underbrace{(j_k^{(k,1)}), \dots, (j_k^{(k,l_k)})}_{l_k}$$

En posant $t_1 = l_1 + 1, t_2 = l_2, \dots, t_{p-1} = l_{p-1}, t_p = l_p + 1, t_{p+1} = l_{p+1}, \dots, t_k = l_k, t_{k+1} = 0$ et en désignant par τ le système d'indices (34), il résulte immédiatement :

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 + \dots + kt_k + (k+1)t_{k+1} = k+1 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_k + t_{k+1} = i \end{cases}$$

et $\tau \in A[t_1, \dots, t_{k+1}]$. Tous les systèmes d'indices τ de type (34) ont la propriété d'avoir dans la première cellule à $k+1$ éléments, l'élément "k+1", le reste des éléments de cette cellule constitue la cellule à k éléments d'un bloc B_p de $A[t_1, \dots, t_{p-1}, t_{p+1}, t_{p+1}, \dots, t_k]$. Les autres cellules de τ constituent les autres cellules du bloc arbitraire B_p . Nous désignons par $A^{(p+1,l)}[t_1, t_2, \dots, t_{k+1}]$ l'ensemble de tous les systèmes τ donnés par (34). Evidemment

$$A^{(p+1,l)}[t_1, t_2, \dots, t_{k+1}] \subset A[t_1, t_2, \dots, t_{k+1}]$$

pour chaque $q = \overline{1, p+1}$

et $p = \overline{1, k-1}$

Pour $p = k$ les indices des variables des dérivées de f sont

$$(35) \quad \underbrace{(j_1^{(1,1)}, \dots, j_1^{(1, l_1)})}_{l_1}, \underbrace{(j_2^{(2,1)}, j_2^{(2,2)}, \dots, j_2^{(2, l_2)})}_{l_2}, \dots, \underbrace{(j_{k-1}^{(k-1,1)}, \dots, j_{k-1}^{(k-1, l_{k-1})})}_{l_{k-1}}, \dots, \underbrace{(j_k^{(k,1)}, \dots, j_k^{(k, l_k)})}_{l_k}$$

En posant $t_1 = l_1, \dots, t_{k-1} = l_{k-1}, t_k = l_k - 1, t_{k+1} = 1$ et en désignant par τ le système (35) il résulte cette fois

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 + \dots + kt_k + (k+1)t_{k+1} = k+1 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_k + t_{k+1} \end{cases}$$

et $\tau \in A[t_1, \dots, t_{k+1}]$. Pour des raisons similaires à celles du cas précédent nous employons la notation $A^{(k+1,1)}[t_1, t_2, \dots, t_{k+1}]$, ayant comme au cas précédent $A[t_1, t_2, \dots, t_{k+1}] \subset A^{(k+1,1)}[t_1, t_2, \dots, t_{k+1}]$ pour chaque $q = 1, t_{k+1}$

On remarque qu'on a la relation :

$$(36) \quad A^{(1)}[t_1, \dots, t_{k+1}] = A[t_1, \dots, t_{k+1}] \cup \left(\bigcup_{p=1}^k \bigcup_{q=1}^{t_{p+1}} A^{(p+1,q)}[t_1, \dots, t_{k+1}] \right)$$

En effet l'inclusion du second membre résulte des considérations ci-dessus et l'inclusion inverse résulte du fait que chaque $\tau \in A[t_1, \dots, t_{k+1}]$ a l'une des formes (33), (34) ou (35). L'égalité (36) est donc vraie.

Considérons l'application $T: A[t_1, \dots, t_{k+1}] \rightarrow \mathcal{T}$ étant un espace linéaire. De (36) on déduit :

$$(37) \quad \sum_{\pi \in A[t_1, \dots, t_{k+1}]} T(\pi) = \sum_{\pi \in A^{(1)}[t_1, \dots, t_{k+1}]} T(\pi) + \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^{t_{p+1}} \sum_{\pi \in A^{(p+1,q)}[t_1, \dots, t_{k+1}]} T(\pi)$$

A cause des relations (31), (33), (37) et des remarques ci-dessus il résulte :

$$(38) \quad f'(x) h_{k+1} U_{k,i-1}(f, x; h_1, \dots, h_k) + U'_{k,i}(f, x; h_1, \dots, h_k) h_{k+1} = \sum_{(t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathcal{P}_{k+1,i}} \sum_{\pi \in A[t_1, \dots, t_{k+1}]} \prod_{p=1}^{k+1} \prod_{q=1}^{t_p} f^{(p)}(x) h_{j_1^{(p,q)}} \dots h_{j_p^{(p,q)}}$$

pour chaque $i = \overline{2, k}$.

De (26), (28), (30) et (38) il résulte :

$$(39) \quad U_{k+1,i}(f, x; h_1, \dots, h_k, h_{k+1}) = \sum_{(t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathcal{P}_{k+1,i}} \sum_{\pi \in A[t_1, \dots, t_{k+1}]} \prod_{p=1}^{k+1} \prod_{q=1}^{t_p} f^{(p)}(x) h_{j_1^{(p,q)}} \dots h_{j_p^{(p,q)}}$$

donc les relations (23) et (24) sont vraies pour $n = k+1$ et en vertu du principe de l'induction mathématique ces relations sont vraies pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Le théorème est donc démontré.

REMARQUE 5. Pour $h_1 = h_2 = \dots = h_n$ on obtient la relation :

$$(40) \quad (g \circ f)^{(n)}(x) h^n = \sum_{i=1}^n \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{P}_{n,i}} \frac{n!}{(1!)^{l_1} (2!)^{l_2} \dots (n!)^{l_n} l_1! \dots l_n!} g^{(i)}(f(x)) (f'(x) h)^{l_1} (f''(x) h^2)^{l_2} \dots (f^{(n)}(x) h^n)^{l_n}$$

En effet si nous posons $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$ dans (23) et (24) il résulte :

$$\prod_{p=1}^{l_p} f^{(p)}(x) h_{j_1(p,1)} \dots h_{j_{l_p}(p,1)} = \left(f^{(p)}(x) h^p \right)^{l_p} \quad \text{pour chaque}$$

$p = \overline{1, n}$ et

$$\prod_{p=1}^n \prod_{q=1}^{l_p} f^{(p)}(x) h_{j_1(p,1)} \dots h_{j_{l_p}(p,1)} = \prod_{p=1}^n \left(f^{(p)}(x) h^p \right)^{l_p}$$

pour chaque $\pi \in A[l_1, \dots, l_n]$

Ainsi

$$\sum_{\pi \in A[l_1, \dots, l_n]} \prod_{p=1}^n \prod_{q=1}^{l_p} f^{(p)}(x) h_{j_1(p,1)} \dots h_{j_{l_p}(p,1)} = \text{card}\{A[l_1, \dots, l_n]\}$$

$$\prod_{p=1}^n \left(f^{(p)}(x) h^p \right)^{l_p} = \frac{n!}{(1!)^{l_1} (2!)^{l_2} \dots (n!)^{l_n} l_1! \dots l_n!} \prod_{p=1}^n \left(f^{(p)}(x) h^p \right)^{l_p}$$

donc la relation (40) est démontrée.

Cette relation figure sans démonstration dans [2], [4]. Dans le cas $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une démonstration en a été donnée par I. PAVALOIU dans [5].

La formule obtenue peut être utilisée en outre au calcul successif des dérivées de diverse ordres de l'application inverse d'une application $f: X \rightarrow Y$. Ce calcul constitue le sujet du travail [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1.] DIACONU, A., Sur la dérivée de type Fréchet d'ordre n de l'application inverse, Preprint Nr.1, 1983, "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminaire,, Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods.
- [2.] KRASHOSEL'SKIJ, A.M., VAININKO, M.G., ZABRETKO, P.P., RUTICKIJ, V.A., STEČENKO, V., Priblizhennoe rešenie operatornih uravnenij, Izd. Nauka glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva (1969).
- [3.] PAVALOIU, I., Contribuții la studiul metodelor iterative rapid convergente care se aplică la rezolvarea ecuațiilor operaționale, Teză de doctorat, Institutul de Calcul Cluj (1971).
- [4.] PAVALOIU, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
- [5.] PAVALOIU, I., Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare, Ed. Dacia Cluj-Napoca, 1981.
- [6.] POPOVICIU, T., Introduction à la théorie des différences divisées, Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, t.42, 1, 65 - 78 (1940).