„BABEŞ—BOLYAI" UNIVERSITY
FACULTY OF MATHEMATICS
RESEARCH SEMINARIES

SEMINAR OF

FUNCTIONAL ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

Preprint Nr. 1, 1983

CLUJ-NAPOCA
ROMANIA

C O N T E N T S

vergence est la méthode obtenue en rangeant les nombres p_i en ordre décroissant et les nombres α_i en ordre croissant.

B I B L I O G R A P H I E

[1]. C. IANCU, I. PAVALOIU, La résolution des équations par interpolation inverse de type Hermite. Seminar of Functional Analysis and Numerical Methods, "Babeş-Bolyai" University, Faculty of Mathematics, Research Seminaries, Preprint Nr. 4 (1981), 72-84.

[2]. I. PAVALOIU, Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare. Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981.

[3]. S. POPA, Asupra unei probleme a lui P. Erdös si G. Weiss, Studii şi Cercetări Matematice, 33, 5 (1981), 539-542.

SUR L'ORDRE DE STÉLARITÉ D'UNE CERTAINE CLASSE DE FONCTIONS ANALYTIQUES

par

PETRU T. MOCANU, DUMITRU RIPEANU et IOAN ŞERB

1. Dans ce travail on détermine l'ordre de stélarité de la transformée par un certain opérateur de la classe des fonctions étoilées d'un ordre donné α et on détermine combien l'ordre obtenu est „plus grand" que le nombre α. À cet effet, parmi les expressions qui montrent de combien l'ordre obtenu est "plus grand" que le nombre α on choisit et étudie la différence et le quotient des deux ordres.

2. Nous rappelons qu'une fonction f de la variable complexe $z = x + iy$ (x et y nombres réels) holomorphe dans le disque unité, $U = \{z : |z| < 1\}$ et normée par les conditions $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, donc qui admet le développement

$$f(z) = z + a_1 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \qquad (|z| < 1),$$

s'appelle étoilée de l'ordre $\alpha < 1$ si pour tout z de U on a

$$\mathrm{Re}\, \frac{z f'(z)}{f(z)} > \alpha .$$

L'ordre de stélarité d'une classe S de fonctions $f(z)$, holomorphes dans U et normées par les conditions $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ est par définition le plus grand nombre δ à la propriété que $S \subset S^*(\delta)$, où par $S^*(\delta)$ on entend la classe des fonctions étoilées de l'ordre δ. L'ordre en question sera désigné par $\Delta(S)$.

L'opérateur de Libera L est défini par la relation

$$g(z) = L(f)(z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(s)\, ds$$

où $f(s)$ est une fonction holomorphe dans U. On entend par la notation usuelle $L(S)$ la classe des fonctions qui sont les transformées des fonctions de la classe S par l'opérateur L.

On posera pour la commodité $\ell = \ln 2$.

3. Dans les notations ci-dessus on a ([1])

$$\text{(1)}\qquad \Delta(L(S^*(\alpha))) = \begin{cases} f_1(\alpha) = \dfrac{\alpha(2\alpha - 1)}{2(2^{-2\alpha} + \alpha - 1)} - 1 & \text{si } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2(2\ell - 1)} - 1 & \text{si } \alpha = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2(1 - \ell)} - 1 & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

pour $\alpha \in [-\frac{1}{2}, 1)$.

PROPOSITION 1. <u>La fonction</u> $f_1(\alpha)$ <u>de</u> (1) <u>est une fonction convexe de</u> α <u>et</u> $f_1''(\alpha) > 0$.

<u>Démonstration.</u> (1) donne

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} f_1'(\alpha) = \dfrac{[4\ell\alpha^2 + 2(2-\ell)\alpha - 1]\,2^{-2\alpha} + 2\alpha^2 - 4\alpha + 1}{2(2^{-2\alpha} + \alpha - 1)^2} \\[2ex] f_1''(\alpha) = \dfrac{A(\alpha)}{(2^{-2\alpha} + \alpha - 1)^2}\,, \end{cases}$$

avec

$$\text{(3)}\qquad A(\alpha) = 1 + [-4\ell^2\alpha^3 + 6\ell^2\alpha^2 - 2\ell(3+\ell)\alpha - 3 + 2\ell]\,2^{-2\alpha} + 2[2\ell^2\alpha^2 + \ell(4-\ell)\alpha + 1 - \ell]\,2^{-4\alpha}.$$

Par conséquent

$$\text{(4)}\qquad A'(\alpha) = 2\ell^2[-8\ell\alpha^2 - 4(3-\ell)\alpha + 3]\,2^{-4\alpha}\,B(\alpha),$$

avec

$$\text{(5)}\qquad B(\alpha) = 1 + \frac{4\ell\alpha^3 - 6(1+\ell)\alpha^2 + 2(6+\ell)\alpha - 3}{-8\ell\alpha^2 - 4(3-\ell)\alpha + 3}\,2^{2\alpha},$$

de sorte que

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} B'(\alpha) = \dfrac{4\alpha(2\alpha - 1)P(\ell\alpha)\,2^{2\alpha}}{[-8\ell\alpha^2 - 4(3-\ell)\alpha + 3]^2} \\[2ex] P(x) = -8x^3 + 4(-1+3\ell)x^2 + (6 - 7\ell - 4\ell^2)x + 3(3 - 5\ell + \ell^2). \end{cases}$$

Le polynôme

$$\text{(7)}\qquad P'(x) = -24x^2 + 8(-1+3\ell)x + 6 - 7\ell - 4\ell^2,$$

a les racines réelles x_1 et x_2 parce que son réalisant est $P_1(\ell)$, avec

$$\text{(8)}\qquad P_1(x) = 20 - 33x + 6x^2.$$

Le polynôme $P_1(x)$ admet les racines $x_3 \in (0,1)$ et $x_4 > 1$. Or, $P_1(0{,}6932) = 0{,}00755744 > 0$, de sorte que $\ell = 0{,}69314\ldots < 0{,}6932 < x_3$, donc

$$\text{(9)}\qquad P_1(\ell) > 0,$$

et x_1, x_2 sont des nombres réels. Le polynôme $P_2(x) = 6 - 7x - 4x^2$ admet une racine positive x_5 et $P_2(0{,}69) = -0{,}7344 < 0$, de sorte que $\ell > 0{,}69 > x_5$, donc $P_2(\ell) < 0$, de sorte que les racines x_1 et x_2 de $P'(x)$ de (7) sont positives. Le polynome

$$\text{(10)}\qquad P_3(x) = 3 - 5x + x^2,$$

admet les racines $x_6 \in (0,1)$ et $x_7 > 1$, et $P_3(0{,}694) = 0{,}011636 > 0$, de sorte que $\ell < 0{,}694 < x_6$, donc en (6)

$$\text{(11)}\qquad P_3(\ell) = (1/3)\,P(0) > 0\,,$$

ce qui donne le tableau 1.

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
$P'(x)$		$-$			0	$+$	0	$-$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P(0) > 0$	$\searrow$	$P(x_1)$	$\nearrow$	$P(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

Tableau 1

En (7) $x_2 = (1/6)(-1 + 3\ell + \sqrt{(P_1(\ell))/2})$, avec $P_1($

de sorte que (6) donne

$$(12)\quad \begin{cases} P(x_2) = C(\ell)\ ;\ C(x) = (1/54)(P_4(x) + \sqrt{2}\ P_1^{3/2}(x))\ ; \\ P_4(x) = 428 - 549\,x - 99\,x^2\ , \end{cases}$$

avec $P_1(x)$ de (8). Le polynôme $P_4(x)$ admet une racine positive x_8 et $P_4(0{,}693) = -0{,}001651 < 0$, de sorte que $x_8 < 0{,}693 < \ell$, donc $P_4(\ell) < 0$ ce qui fait qu'en (6) et (12) le signe de $P(x_2)$ n'est pas évident. Pour le déterminer, il suffit de tenir compte que pour $x \in (0,1)$ en (12) $C'(x) < 0$ et que $C(0{,}6931) < 0$, de sorte qu'en (12) $P(x_2) = C(\ell) < C(0{,}6931) < 0$, auquel cas le tableau 1 donne le tableau 2.

x	$-\infty$		0		x_9		x_1		x_2		$+\infty$
$P'(x)$	$-$		$-$		$-$		0	$+$	0	$-$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P(0) > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$P(x_1)$	$\nearrow$	$P(x_2) < 0$	$\searrow$	$-\infty$

Tableau 2

Si en (5) $P_5(\alpha) = -8\,\ell\alpha^2 - 4(3-\ell)\,\alpha + 3$, ayant $P_5(-\infty) = -\infty$, $P_5(-1/2) = 9 - 4\ell > 0$, $P_5(1/2) = -3 < 0$, $P_5(\alpha)$ admet les racines $\alpha_1 < -1/2$ et $\alpha_2 \in (0,1/2)$.

Or,

$$(13)\qquad \alpha_2 = \frac{1}{4\ell}\left(-3 + \ell + \sqrt{9+\ell^2}\right).$$

Par suite (6) donne $P(\ell\alpha) = 3\sqrt{9+\ell^2}\,(P_6(\ell))/(1 + 3\ell + \sqrt{9+\ell^2})$,

avec

$$(14)\qquad P_6(x) = 4 - 3\,x - 4\,x^2.$$

Le polynôme $P_6(x)$ admet une racine positive $(-3+\sqrt{73})/8 = 0{,}69300\ldots < \ell$, de sorte que

$$(15)\qquad P_6(\ell) < 0\ ,$$

et $P(\ell\alpha_2) < 0$, donc au tableau 2

$$(16)\qquad x_9/\ell < \alpha_2\ .$$

Le tableau 2 et (16) donnent le tableau 3, qui donne le tableau 4.

α	$-\frac{1}{2}$		0		x_9/ℓ		α_3		α_2		$\frac{1}{2}$		1
$B'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0		$+$				0	$-$	
$B(\alpha)$	$B(-\frac{1}{2})$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$B(\frac{x_9}{\ell})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$B(1)$

Tableau 3

α	$-\frac{1}{2}$		0		α_3		α_2		$\frac{1}{2}$		1
$B(\alpha)$	$-$		0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$A'(\alpha)$	$-$		0	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$A(\alpha)$	$A(-\frac{1}{2})$	$\searrow$	0	$\searrow$	$A(\alpha_3)$	$\nearrow$			0	$\nearrow$	$A(1)$

Tableau 4

Si l'on écrit en (1) $D(\alpha) = 2^{-2\alpha} + \alpha - 1$, alors $D'(\alpha) = 1 - 2\ell\,2^{-2\alpha}$, auquel cas les tableaux 4 et 5 donnent en (2) $f''(\alpha) > 0$ pour $\alpha \in \left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$, et la proposition est démontrée.

α	$-\frac{1}{2}$		0		$(\log 2\ell)/2\ell$		$\frac{1}{2}$		1
$D'(\alpha)$			$-$		0		$+$		
$D(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/4$

Tableau 5

Remarque 1. Le développement :

(17) $$2^{m\alpha} = 1 + m\ell\alpha + \frac{m^2}{2}\ell^2\alpha^2 + \frac{m^3}{6}\ell^3\alpha^3 + \dots \quad ,$$

donne en (2)

(18) $$f_1''(\alpha) = (4/3)\ell^2 \frac{P_3(\ell)}{(-1+2\ell)^3} + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots \quad ,$$

avec $P_3(x)$ de (10), auquel cas (11) donne $0 < f_1''(0) < \infty$. Si on écrit $\alpha = 1/2 + \varepsilon$, (2) et (3) donnent

$$f_1''(\alpha) = g(\varepsilon) =$$

$$= 4\cdot \frac{2 - [3+\ell+\ell(6-\ell)\varepsilon + 4\ell^2\varepsilon^3]2^{-2\varepsilon} + [1+\ell+\ell(4+\ell)\varepsilon+2\ell^2\varepsilon^2]2^{-4\varepsilon}}{(-1+2\varepsilon+2^{-2\varepsilon})^3},$$

c'est-à-dire à l'aide de (17)

$$g(\varepsilon) = (\ell^2)/3 \cdot (P_7(\ell)/(1-\ell)^3) + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \dots \quad ,$$

avec $P_7(x) = -6 + 8x + x^2$. Le polynôme $P_7(x)$ admet une racine positive $\sqrt{22} - 4 = 0{,}690\ldots < \ell$, de sorte que $P_7(\ell) > 0$, c'est-à-dire en (2) $0 < f_1''(\frac{1}{2}) < \infty$. Il va de soi que la valeur $f_1''(0)$ pouvait s'obtenir directement, par le développement de $f_1(\alpha)$ de (1) à l'aide de (17) :

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2(-1+2\ell)}\left[3 - 4\ell + 2\frac{(1-\ell)^2}{-1+2\ell}\alpha + \frac{4}{3}\ell^2\frac{3-5\ell+\ell^2}{(-1+2\ell)^2}\alpha^2 + \dots\right],$$

de sorte que $f_1''(0)$ prend la valeur donnée par (18).

Remarque 2. On peut vérifier de suite qu'au tableau 4, $A'(\alpha_2) > 0$, parce que (4) et (5) donnent

(19) $$A'(\alpha_2) = \ell^2\, 2^{1-2\alpha_2} P_8(\alpha_2),$$

avec $P_8(\alpha) = 4\ell\alpha^3 - 6(1+\ell)\alpha^2 + 2(6+\ell)\alpha - 3$, auquel cas (13) donne

$$P_8(\alpha_2) = -\frac{9}{4}\,\frac{P_6(\ell)}{12+9\ell+\ell^2+(4+3\ell)\sqrt{9+\ell^2}},$$

avec $P_6(x)$ de (14), auquel cas (15) donne $P_8(\alpha_2) > 0$, donc en (19) $A'(\alpha_2) > 0$.

4. On considère l'opérateur $I_{\beta,\gamma}$ défini par

(20) $$g = I_{\beta,\gamma}(f)$$

$$g(z) = \left(\frac{\beta+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f^\beta(s)\, s^{\gamma-1}\, ds\right)^{1/\beta}, \quad z\in U, \quad f\in S^*(\alpha),$$

où α, β, γ sont des nombres réels, avec

(21) $$\beta>0, \quad \beta+\gamma>0, \quad -\frac{\gamma}{\beta} \le \alpha < 1 .$$

L'on a en (2e) ([1])

(22) $$g \in S^*(\alpha).$$

Si

(23) $$\alpha\in[\alpha_0, 1) \quad ; \quad \alpha_0 = \max\left(\frac{\beta-\gamma-1}{2\beta}, -\frac{\gamma}{\beta}\right),$$

alors ([1])

(24) $$\Delta(I_{\beta,\gamma}(S^*(\alpha))) = \delta(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\beta+\gamma}{F(1, 2\beta(1-\alpha), \beta+\gamma+1; \frac{1}{2})} - \gamma\right],$$

avec

$$F(a,b,c;x) = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\,b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}\,\frac{x^n}{n!},$$

($|x|<1$) la série hypergéométrique. Si en particulier

(25) $\beta+\gamma = N$, N nombre entier ≥ 2, alors (23) s'écrit

(26) $$\alpha\in\left[1-\frac{N+1}{2\beta}, 1\right)$$

et en (24)

(27) $$F(1, 2\beta(1-\alpha), \beta+\gamma+1; \tfrac{1}{2}) = F(1,b,N+1;\tfrac{1}{2}) = 1 + N!\sum_{n=1}^\infty \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{(N+n)!\,2^n}$$

avec $b = 2\beta(1-\alpha)$. Si dans l'identité

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{(N+n)!}\,x^n =$$

$$= \frac{(1-x)^{-(b-N)} - 1 - \sum_{n=1}^{N} (b-N)(b-N+1)\dots(b-N+n-1)\frac{x^n}{n!}}{(b-N)(b-N+1)\dots(b-1)x^N},$$

on fait $x = 1/2$, on a en (27)

$$F(1, b, N+1; \tfrac{1}{2}) = \frac{N!(2^b - 2^N)}{(b-N)(b-N+1)\dots(b-1)} -$$

$$- \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(N-n+1)(N-n+2)\dots N}{(b-n)(b-n+1)\dots(b-1)} 2^n \; ; \; b = 2\beta(1-\alpha),$$

auquel cas (24) s'écrit

$$\delta(\alpha,\beta,\gamma)\Big|_{\gamma=N-\beta} = \frac{1}{\beta}\left[\beta - N + \frac{N}{\frac{N!(2^b-2^N)}{(b-N)(b-N+1)\dots(b-1)} - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{(N-n+1)(N-n+2)\dots N}{(b-n)(b-n+1)\dots(b-1)}2^n}\right]$$

où, dans une forme légèrement changée

$$(28) \quad \delta(\alpha,\beta,\gamma)\Big|_{\gamma=N-\beta} = \frac{1}{\beta}\left[\beta - N + \frac{1}{(N-1)!}\frac{(b-1)(b-2)\dots(b-N)}{2^b - \sum_{n=1}^{N-1} 2^{N-n} C^n_{b-1-N+n}}\right].$$

Si en particulier en (25) $N = 2$, (28) et (26) s'écrivent

$$\delta(\alpha,\beta,\gamma)\Big|_{\gamma=2-\beta} = \frac{1}{\beta}\left[\beta - 2 + \frac{(1-b)(2-b)}{2(2^{b-1}-b)}\right], \alpha \in \left[1-\frac{3}{2\beta}, 1\right).$$

Ainsi donc

$$(29) \quad \delta(\alpha,\beta,\gamma)\Big|_{\gamma=2-\beta} = \begin{cases} f_2(\alpha) = \frac{1}{\beta}\left[\beta-2+\frac{(1-b)(2-b)}{2(2^{b-1}-b)}\right], & \text{si } b = 2\beta(1-\alpha) \neq 1 \; ; \; b \neq 2 \\ & \left(\alpha \neq 1-\frac{1}{2\beta} \; ; \; \alpha \neq 1-\frac{1}{\beta}\right) \\ \frac{1}{\beta}\left[\beta-2+\frac{1}{2(1-\ell)}\right], & \text{si } \alpha = 1-\frac{1}{2\beta} \\ \frac{1}{\beta}\left[\beta-2+\frac{1}{2(2\ell-1)}\right], & \text{si } \alpha = 1-\frac{1}{\beta}. \end{cases}$$

résultat mentionné d'ailleurs en [1].

PROPOSITION 2. <u>La fonction</u> $f_2(\alpha)$ <u>de</u> (29) <u>est une fonction convexe de</u> α <u>et</u> $f_2''(\alpha) > 0$.

<u>Démonstration</u>. Si en (29) on écrit

(30) $b = 2(1-a)$, c'est-à-dire $a = 1 - \beta + \beta\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$,

on a

(31) $f_2(\alpha) = (1/\beta)(\beta - 1 + f_1(a))$,

avec $f_1(a)$ donnée par (1) où l'on remplace α par a et a donné par (30).

Ainsi donc la proposition 1 donne $f_2''(\alpha) = \beta f_1''(a) > 0$, et la proposition est démontrée.

Il va de soi que la proposition 2 donne pour $\beta = 1$ la proposition 1, vu qu'en ce cas $a = \alpha$ et en (29) $f_2(\alpha) = f_1(\alpha)$, avec $f_1(\alpha)$ de (1).

5. Selon (22), en (24) $\delta(\alpha,\beta,\gamma) \geqq \alpha$. En particulier, en (29) $\delta(\alpha,\beta,\gamma)\Big|_{\gamma=2-\beta} \geqq \alpha$. Les propositions 3 et 4 ci-dessous présentent la variation de deux expressions parmi celles qui montrent de combien $\delta(\alpha,\beta,\gamma)$, $\gamma = 2-\beta$ est "plus grand" que α.

PROPOSITION 3. <u>Lorsque</u> α <u>croît de</u> $1 - \frac{3}{2\beta}$ <u>à</u> 1, <u>la différence</u>

$$f_3(\alpha) = \delta(\alpha,\beta,2-\beta) - \alpha = f_2(\alpha) - \alpha,$$

<u>donnée par</u> (29) <u>décroît de manière monotone de</u> $1/2\beta$ <u>à</u> 0.

<u>Démonstration</u>. (31) et (30) donnent $f_3(\alpha) = (1/\beta)(f_1(a) - a)$, de sorte que la proposition 1 (avec a à la place de α) donne

$$(32) \quad f_3'(\alpha) = f_1'(a) - 1, \; f_3''(\alpha) = \beta f_1''(a) > 0.$$

Ainsi donc $f_3'(\alpha) < f_3'(1) = f_1'(1) - 1 = 4\ell - 3 < 0$, (cf. (2)) et (29) donne $f_3(1 - \frac{3}{2\beta}) = 1/2\beta$ et $f_3(1) = 0$ et la proposition est démontrée. Nous en présentons une autre démonstration, qui n'utilise pas la proposition 1.

(32) et (2) donnent

$$(33) \quad f_3'(\alpha) = \frac{E(a)}{2(2^{-2a}+a-1)^2},$$

$$E(a) = -1 + (3 - 2\ell a + 4\ell a^2)2^{-2a} - 2\cdot 2^{-4a},$$

de sorte que

$$(34) \quad E'(a) = 4\ell\cdot 2^{-4a}F(a) \; ; \; F(a) = 2 - \left[2 - (2+\ell)a + 2\ell a^2\right]2^{2a}.$$

Par suite $F'(a) = -2^{2a}P_9(a)$, avec $P_9(a) = 3\ell - 2 - 2\ell^2 a + 4\ell^2 a^2$.

Or, $P_9(1/4) = -\frac{1}{4}(8 - 12\ell + \ell^2) < 0$, du fait que $8 - 12\ell + \ell^2 >$ $> 0{,}0761$, et $P_9(0) = P_9(1/2) = 3\ell - 2 > 0{,}07$, ce qui donne le tableau 6, lequel avec (34) donne le tableau 7, lequel avec (33) démontre la proposition.

a	$-\frac{1}{2}$	0	a_1	a_3	a_2	1/2	1
$P_9(a)$		+	0	−	0	+	
F'(a)		−	0	+	0	−	
F(a)	$F(-\frac{1}{2})$	↘ 0 ↘	$F(a_1)$	↗ 0 ↗	$F(a_2)$	↘ 0 ↘	F(1)

Tableau 6

a	$-\frac{1}{2}$	0	a_3	$\frac{1}{2}$	1
E(a)	E(− 1/2) ↗	0 ↘	$E(a_3)$ ↗	0 ↘	E(1)

Tableau 7

PROPOSITION 4. <u>Lorsque</u> α <u>croît de</u> $1 - \frac{3}{2\beta}$ <u>à</u> 1, <u>le quotient</u>

$$f_4(\alpha) = \frac{\delta(\alpha, \beta, 2-\beta)}{\alpha} = f_2(\alpha)/\alpha ,$$

<u>donné par</u> (29) <u>varie conformément au tableaux</u> 16 - 21. <u>Au tableaux</u> 16 <u>et</u> 17, $\beta_0 = (17 - 24\ell)/4(3 - 4\ell)$, $\alpha_4 = \alpha_4(\beta) = \frac{1}{\beta}(\beta - 1 + a_4(\beta))$, $\alpha_5 = \alpha_5(\beta) = \frac{1}{\beta}(\beta - 1 + a_5(\beta))$ <u>où</u> $a_4 = a_4(\beta)$ <u>et</u> $a_5 = a_5(\beta)$ <u>sont respectivement les racines des fonctions (de la variable</u> a),

$$(35) \quad \begin{cases} \varphi_4(a) = \beta - 1 + f_1(a) - (\beta - 1 + a) f_1'(a) \\ \varphi_5(a) = \beta - 1 + f_1(a), \end{cases}$$

<u>avec</u> $f_1(a)$ <u>obtenue en remplaçant dans</u> (1) α <u>par</u> a.

<u>Demonstration</u>. (31) et (30) donnent

$$(36) \quad f_4(\alpha) = G(a) = \frac{\delta + f_1(a)}{\delta + a}, \quad \delta = \beta - 1, \quad a = 1 - \beta + \beta\alpha .$$

(Il va de soi qu'il n'y a pas de danger de confusion entre δ de (29) et δ de (36), où entre F de (24) et F de (34)).

Ainsi donc

$$(37) \quad G'(a) = \frac{H(a)}{(\delta + a)^2}, \quad H(a) = -\varphi_4(a) = -(\delta + f_1(a)) + (\delta + a) f_1'(\alpha),$$

par suite

$$(38) \qquad H'(a) = (\delta + a) f_1''(a).$$

On supposera d'abord $0 < \beta < 3/2$, c'est-à-dire $-1/2 < -\delta < 1$. En ce cas (38) et la proposition 1 donnent le tableau 8, dans lequel (37), (4) et (2) donnent

$$(39) \quad \begin{aligned} H(-\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2}\left[4\delta(4\ell - 3) - (8\ell - 5)\right], \\ H(1) &= (1 + \delta)(4\ell - 3) < 0 . \end{aligned}$$

a	$-\frac{1}{2}$	$-\delta$	1
H'(a)	−	0	+
H(a)	$H(-\frac{1}{2})$ ↘	$H(-\delta)$ ↗	H(1)

Tableau 8

Dans l'énoncé du théorème, $0 < \beta_0 < 1$, vu que ces inégalités s'écrivent:

$$(40) \qquad 5/8 < \ell < 17/24 < 3/4,$$

et sont évidentes. Si donc $0 < \beta < \beta_0$, c'est-à-dire $\delta < \beta_0 - 1 = \delta_0 < 0$, on a en (39) $H(\delta_0) = 0$ et $H(-\frac{1}{2}) > 0$, auquel cas le tableau 8 donne le tableau 9.

a	$-\frac{1}{2}$	a_4	$-\delta$	1
H'(a)		−	0	+
H(a)	$H(-\frac{1}{2}) > 0$ ↘	0 ↘	$H(-\delta)$ ↗	$H(1) < 0$

Tableau 9

Si $\beta_0 \leqq \beta < 3/2$, c'est-à-dire $\delta_0 \leqq \delta < 1/2$, on a en (39) $H(-\frac{1}{2}) \leqq 0$, auquel cas le tableau 8 donne $H(a) \leqq 0$ (égalité au seul cas $\beta = \beta_0$, $a = -\frac{1}{2}$). Si $\beta \geqq \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\delta \geqq \frac{1}{2}$, alors $a + \delta \geqq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, auquel cas (38) et la proposition 1 donnent $H'(a) \geqq 0$ (égalité au seul cas $\delta = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$), donc $H(a) \leqq H(1) < 0$. Par conséquent, si $\beta \geqq \beta_0$ en (37)

(41) $$H(a) \leqq 0,$$

(égalité au seul cas $\beta = \beta_0$, $a = -\frac{1}{2}$). D'ailleurs, en (36)

(42) $-\frac{1}{2} \leqq \delta < -1$ au seul cas $0 < \beta \leqq \frac{3}{2}$.

Le tableau 9, avec (41), (37), (36) et (42) donnent les tableaux 10 - 15.

a	$-\frac{1}{2}$	a_4	a_5	$-\delta$	1
G'(a)	+	0	−	−	
G(a)	$\frac{2\delta}{2\delta-1} > 0$ ↗	$G(a_4)$ ↘	0 ↘	$\mp\infty$ ↘	1

Tableau 10 ($-1 < \delta < \delta_0$).

a	$-\frac{1}{2}$	a_5	$-\delta$	1
G(a)	$\frac{2\delta}{2\delta-1} > 0$ ↘	0 ↘	$\mp\infty$ ↘	1

Tableau 11 ($\delta_0 \leqq \delta < 0$)

a	$-\frac{1}{2}$	0	1
G(a)	0 ↘	$\mp\infty$ ↘	1

Tableau 12 ($\delta = 0$)

a	$-\frac{1}{2}$	$-\delta$	1
G(a)	$\frac{2\delta}{2\delta-1} < 0$ ↘	$\mp\infty$ ↘	1

Tableau 13 ($0 < \delta < \frac{1}{2}$)

a	$-\frac{1}{2}$	1
G(a)	∞ ↘	1

Tableau 14 ($\delta = \frac{1}{2}$)

a	$-\frac{1}{2}$	1
G(a)	$\frac{2\delta}{2\delta-1}$ ↘	1

Tableau 15 ($\delta > \frac{1}{2}$)

Nous remarquerons que selon la proposition 6 ci-dessous, on a pour $a \in [-\frac{1}{2}, 1)$, $f_1(a) > a$, de sorte qu'en (36) quand $\delta + a = 0$, $\delta + f_1(a) > 0$, c'est-à-dire $\lim_{a \to -\delta} |G(a)| = \infty$. Les tableaux 10 - 15, avec (36) et (30) donnent les tableaux 16-21 et la proposition est démontrée.

α	$1 - \frac{3}{2\beta}$	α_4	α_5	0	1
$f_4(\alpha)$	$\frac{2(\beta-1)}{2\beta-3} > 0$ ↗	$f_4(\alpha_4)$ ↘	0 ↘	$\mp\infty$ ↘	1

Tableau 16 ($0 < \beta < \beta_0$)

α	$1 - \frac{3}{2\beta}$	α_5	0	1
$f_4(\alpha)$	$\frac{2(\beta-1)}{2\beta-3}$ ↘	0 ↘	$\mp\infty$	1

Tableau 17 ($\beta_0 \leqq \beta < 1$)

α	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f_4(\alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{\alpha}$	0 ↘	$\mp\infty$ ↘	1

Tableau 18 ($\beta = 1$)

α	$1 - \frac{3}{2\beta}$	0	1
$f_4(\alpha)$	$\frac{2(\beta-1)}{2\beta-3} < 0$ ↘	$\mp\infty$ ↘	1

Tableau 19 ($1 < \beta < \frac{3}{2}$)

α	0	1
$f_4(\alpha)$	∞ ↘	1

Tableau 20 ($\beta = \frac{3}{2}$)

α	$1 - \frac{3}{2\beta}$	1
$f_4(\alpha)$	$\frac{2(\beta-1)}{2\beta-3}$ ↘	1

Tableau 21 ($\beta > \frac{3}{2}$)

PROPOSITION 5. *Lorsque* α *croît de* $1 - \frac{3}{2\beta}$ *à* 1, *la fonction* $f_2(\alpha)$ *de* (29) (*c'est-à-dire* $\delta(\alpha, \beta, 2-\beta)$) *croît de manière monotone de* $1 - \frac{1}{\beta}$ *à* 1.

Démonstration. (31) et (30) donnent $f_2'(\alpha) = f_1'(a)$. Or, la proposition 1 (avec a à la place de α) donne

(43) $$f_1'(a) \geqq f_1'(-\tfrac{1}{2}) = 8\ell - 5 > 0{,}52,$$

de sorte que $f_2'(\alpha) > 0$ et la proposition est démontrée. Nous retiendrons le cas particulier $\beta = 1$ des propositions 3, 4 et 5 dans la

PROPOSITION 6. *Lorsque* α *croît de* $-\frac{1}{2}$ *à* 1, *la fonction* $f_1(\alpha) - \alpha$ *décroît de manière monotone de* $\frac{1}{2}$ *à* 0, *la fonction* $f_1(\alpha)/\alpha$ *varie conformément au tableau* 18 *et la fonction* $f_1(\alpha)$ *de* (1) *croît de manière monotone de* 0 *à* 1.

Bien entendu, les propositions 4 et 5 pouvaient se démontrer sans utiliser la proposition 1 (ainsi qu'on l'a constaté au cas de la proposition 3), ce que nous ne ferons pas. On peut egalement se demander comment varient, aux tableaux 16 et 17, α_4, α_5 et $f_4(\alpha_4)$ lorsque β croît de 0 à β_o (pour α_4 et $f_4(\alpha_4)$) et de 0 à 1 (pour α_5). On peut répondre (partiellement d'ailleurs) à la question par la

PROPOSITION 7. 1°. Lorsque β croît de 0 à β_o, la fonction $\theta_4(\beta) = f_4(\alpha_4) = (f_2(\alpha_4))/\alpha_4$ du tableau 16 décroît de manière monotone de $2(2\ell - 1)$ à $8\ell - 5$.

2°. Lorsque β croît de 0 à 1, la fonction $\alpha_5(\beta)$ de l'énoncé de la proposition 4 décroît de manière monotone de $-(3-4\ell)/2(2\ell-1)$ à $-\frac{1}{2}$.

Démonstration. 1°. Si l'on écrit en (35) $\varphi_4(a) = \Phi_4(a, \beta)$ et $\varphi_5(a) = \Phi_5(a, \beta)$, alors en tenant compte qu'au tableau 9, $a_4 < -\delta = 1 - \beta$, c'est-à-dire que

$$a_4 + \beta - 1 < 0, \tag{44}$$

de la proposition 1 et de (43), il résulte

$$\left.\frac{\partial \Phi_4}{\partial a}\right|_{a=a_4} = -(\beta - 1 + a_4) f_1''(a_4) > 0, \quad (0 < \beta < \beta_o)$$

et

$$\left.\frac{\partial \Phi_5}{\partial a}\right|_{a=a_5} = f_1'(a_5) > 0 \quad (0 < \beta < 1).$$

Par conséquent, et vu qu'on (35) $\Phi_4(a_4(\beta), \beta) \equiv 0$, $\Phi_5(a_5(\beta), \beta) \equiv 0$, il s'ensuit par dérivation des termes par rapport à β

$$a_4'(\beta) = \frac{1 - f_1'(a_4)}{(\beta - 1 + a_4) f_1''(a_4)}, \quad a_5'(\beta) = -\frac{1}{f_1'(a_5)}. \tag{45}$$

Les expressions de $\alpha_4(\beta)$ et $\alpha_5(\beta)$ de l'énoncé de la proposition 4 donnent donc avec (45)

$$\begin{aligned} \alpha_4'(\beta) &= \frac{1}{\beta^2}(1 - a_4 + \beta a_4'(\beta)) = \\ &= \frac{\beta(1 - f_1'(a_4)) + (1 - a_4)(\beta - 1 + a_4) f_1''(a_4)}{\beta^2(\beta - 1 + a_4) f_1''(a_4)}, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\alpha_5'(\beta) = \frac{1}{\beta^2}(1 - a_5 + \beta a_5'(\beta)) = \frac{1}{\beta^2 f_1'(a_5)}\left[-\beta + (1 - a_5) f_1'(a_5)\right].$$

La relation $\varphi_4(a_4) = 0$ avec $\varphi_4(a)$ de (35) donne

$$\beta = \frac{1 - f_1(a_4) - (1 - a_4) f_1'(a_4)}{1 - f_1'(a_4)} = 1 + \frac{-f_1(a_4) + a_4 f_1'(a_4)}{1 - f_1'(a_4)}. \tag{47}$$

Nous remarquerons que la proposition 1 et (2) donnent

$$f_1'(a) < f_1'(1) = 2(2\ell - 1) < 1. \tag{48}$$

(31) et (30) donnent dans la notation de l'énoncé de la proposition

$$\theta_4(\beta) = \frac{\beta - 1 + f_1(a_4)}{\beta - 1 + a_4}, \tag{49}$$

c'est-à-dire avec l'expression (47) de β, $\theta_4(\beta) = f_1'(a_4)$, de sorte que

$$\theta_4'(\beta) = f_1''(a_4)\, a_4'(\beta) = \frac{1 - f_1'(a_4)}{\beta - 1 + a_4} < 0, \tag{50}$$

(cf. (45), (48) et (44)). Il reste à trouver $\theta_4(0)$ et $\theta_4(\beta_o)$ (vu, plus exactement, $\lim_{\beta \to 0+} \theta_4(\beta)$ et $\lim_{\beta \to \beta_o -} \theta_4(\beta)$). À cet effet, nous remarquerons que si $\beta = 0$, (48) donne en (35) $\varphi_4(1) = 0$, de sorte qu'on tenant compte que selon (37) et le tableau 9 la racine a_4 de $\varphi_4(a)$ est unique, on a

$$\lim_{\beta \to 0+} a_4(\beta) = 1, \tag{51}$$

auquel cas (1) et la règle de l'Hospital donnent en (49)

$$\lim_{\beta \to 0+} \theta_4(\beta) = \lim_{\beta \to 0+} \frac{1 + f_1'(a_4)\, a_4'(\beta)}{1 + a_4'(\beta)}. \tag{52}$$

Or, (48), (44), (51) et la valeur (positive selon (10) et (11)) $8(3 - 5\ell + \ell^2)$ de $f_1'''(1)$ donnée par (2) donnent en (45)

$$\lim_{\beta \to 0+} a_4'(\beta) = -\infty, \tag{53}$$

auquel cas (52) et (48) donnent

(54) $$\lim_{\beta \to 0+} \theta_4(\beta) = 2(2\ell - 1).$$

Si $\beta = \beta_o$, on a en (35) $\varphi_4(-\frac{1}{2}) = 0$, de sorte que

(54') $$\lim_{\beta \to \beta_o -} a_4(\beta) = -\frac{1}{2},$$

auquel cas (49) et (1) donnent $\lim_{\beta \to \beta_o -} \theta_4(\beta) = 8\ell - 5$, ce qui, avec (54) et (50) démontre le premier point de la proposition.

2°. La relation $\varphi_5(a_5) = 0$ avec $\varphi_5(a)$ de (35) donne $\beta = 1 - f_1(a_5)$, auquel cas (46) donne

(55) $$\alpha_5'(\beta) = \frac{\theta_5(a_5)}{\beta^2 f_1'(a_5)},$$

avec $\theta_5(a) = -1 + f_1(a) + (1 - a) f_1'(a)$, de sorte que $\theta_5'(a) = (1 - a) f_1''(a) > 0$ pour $a \in [-\frac{1}{2}, 1)$ (cf. proposition 1), donc

(56) $$\theta_5(a) < \theta_5(1) = 0 \; ; \; \theta_5(a_5) < 0,$$

(cf. (1), (48) et tableau 10 ou 11), auquel cas (43) donne en (55)

(57) $$\alpha_5'(\beta) < 0.$$

Si $\beta = 0$, on a en (35) $\varphi_5(1) = 0$, de sorte qu'en tenant compte que selon (43) la racine a_5 de la fonction $\varphi_5(a)$ de (35) est unique, il résulte $\lim_{\beta \to 0+} a_5(\beta) = 1$, auquel cas l'expression de $\alpha_5(\beta)$ de l'énoncé de la proposition 4, la règle de l'Hospital, (45) et (48) donnent

(58) $$\lim_{\beta \to 0+} \alpha_5(\beta) = 1 + \lim_{\beta \to 0+} a_5'(\beta) = -(3 - 4\ell)/2(2\ell - 1).$$

Si $\beta = 1$, on a en (35) $\varphi_5(-\frac{1}{2}) = 0$, de sorte que $\lim_{\beta \to 1-} a_5(\beta) = -\frac{1}{2}$ (cf. proposition 6), auquel cas l'expression de $\alpha_5(\beta)$ de l'énoncé de la proposition 4 donne $\lim_{\beta \to 1-} \alpha_5(\beta) = -\frac{1}{2}$, ce qui, avec (58) et (57) démontre le second point de la proposition énoncée.

Remarque 3. La recherche de la variation de la fonction $\alpha_4(\beta)$ de l'énoncé de la proposition 4 lorsque β croît de 0 à β_o semble tout au moins avec la méthode utilisée pour la détermination de

la variation de $\alpha_5(\beta)$ du point 2° de la proposition 7 - plus difficile. La méthode respective consiste à déduire de (46) et (47)

(59) $$\alpha_4'(\beta) = \frac{I(a_4)}{\beta^2(\beta - 1 + a_4) f_1''(a_4)},$$

avec $I(a) = -\theta_5(a) - (1 - a) f_1''(a)(f_1(a) - a)/(1 - f_1'(a))$, et $\theta_5(a)$ de (55).

Or, selon (56), $-\theta_5(a) > 0$ et les propositions 1 et 6 et (48) attestent que pour $a \in [-\frac{1}{2}, 1)$, $f_1''(a)(1 - a)(f_1(a) - a)/(1 - f_1'(a))$, de sorte que le signe de l'expression $I(a_4)$ de (59) n'est pas évident. (59) donne

(60) $$I'(a) = K(a)(f_1(a) - a)/(1 - f_1'(a))^2 \; ; \; K(a) = \theta_6(a) f_1''(a) - (1 - a)(1 - f_1'(a)) f_1^{(3)}(a) \; ; \; \theta_6(a) = 1 - f_1'(a) - (1 - a) f_1''(a).$$

Nous sommes ainsi conduits, pour déterminer la variation de $I(a)$ et son signe, de rechercher le signe de $f_1^{(3)}(a)$ (ou celui de $K(a)$), ce qui semble un problème plus difficile. Nous présentons par conséquent pour terminer un résultat conditionné, dans la

PROPOSITION 8. Si en (1)

(61) $$f_1^{(3)}(a) < 0,$$

pour tout $a \in [-\frac{1}{2}, 1)$, alors lorsque β croît de 0 à β_o, la fonction $\alpha_4(\beta)$ de l'énoncé de la proposition 4 croît de manière monotone de $-\infty$ à $-1/(17 - 24\ell)$.

Démonstration. En (60), $\theta_6'(a) = -(1 - a) f_1^{(3)}(a) > 0$, de sorte que (2) donne

(62) $$\theta_6(a) > \theta_6(-\tfrac{1}{2}) = -2 P_{10}(\ell), \quad P_{10}(x) = 15 - 80x + 84x^2.$$

Le polynôme $P_{10}(x)$ admet les racines $y_1 < 1/2$ et $y_2 > 0{,}695\ldots > \ell$ de sorte qu'en (62) $\theta_6(a) > 0$, auquel cas en (60) $K(a) > 0$, $I'(a) > 0$ (cf. (48), (61) et les propositions 1 et 6), ce qui donne en

(59) $I(a) < I(1) = 0$, auquel cas (59), avec (44) et la proposition 1 donnent

(63) $$\alpha_4'(\beta) > 0.$$

Or, l'expression de $\alpha_4(\beta)$ de l'énoncé de la proposition 4, avec (51), (53) et la règle de l'Hospital donnent

(64) $$\lim_{\beta \to 0+} \alpha_4(\beta) = -\infty.$$

L'expression mentionnée de $\alpha_4(\beta)$ et (54') donnent $\lim_{\beta \to \beta_0 -} \alpha_4(\beta) = -1/(17-24\ell)$, ce qui, avec (64) et (63) démontre la proposition énoncée.

<u>Remarque</u> 4. Nous ne savons pas si l'hypothèse (61) est vraie. Elle concorde, en tout cas, avec les valeurs $f_1'''(-\frac{1}{2}) = 8(3 - 14\ell + 14\ell^2)$ et $f_1'''(1) = 8(3 - 5\ell + \ell^2)$ données par (2), parce qu'on a $f_1'''(-\frac{1}{2}) > f_1'''(1)$, du fait que l'inégalité s'écrit $\ell > \frac{9}{13} = 0,692...$ est devient par suite évidente.

B I B L I O G R A P H I E

1 Petru T. Mocanu, Dumitru Ripeanu, Ioan Şerb, <u>The order of starlikeness of certain integral operators</u>, Mathematica, Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, Mathematica, 23 (46) ,2, (1981), 225 - 230.

ABOUT THE DETERMINATION OF EXTREMA OF A HÖLDER FUNCTION

by

Costică Mustăţa

Let (X,d) be a metric space and $\alpha \in (0,1]$. A function $f: X \to R$ is called <u>Hölder of class α on X</u> if there exists $K \geq 0$ such that

$$|f(x) - f(y)| \leq K.d^{\alpha}(x,y) \quad , \tag{1}$$

for all $x,y \in X$.

Put

$$\|f\|_{\alpha,X} = \sup\{|f(x) - f(y)|/d^{\alpha}(x,y) \; : \; x,y \in X, \;\; x \neq y\} \tag{2}$$

Then $\|f\|_{\alpha,X}$ is the smallest constant K for which the inequality (1) holds and it is called the <u>Hölder norm</u> of f .

Denote by $\Lambda_{\alpha}(X,d)$ the set of Hölder functions of class α on X [3]. Then $\Lambda_{\alpha}(X,d)$ is a vector lattice, that is, it is closed under the operations of addition, multiplication by scalars and formation of supremum and infimum of two of its elements.

For a nonvoid subset Y of X , the Hölder norm $\|f\|_{\alpha,Y}$ and the space $\Lambda_{\alpha}(Y,d)$ are defined similarly .

THEOREM 1. <u>Let</u> (X,d) <u>be a metric space</u> , $Y \subset X$ <u>and</u> $\alpha \in (0,1]$. <u>If</u> $f \in \Lambda_{\alpha}(Y,d)$ <u>then the functions</u>

$$F_1(x) = \inf\left\{ f(y) + \|f\|_{\alpha,Y}.d^{\alpha}(x,y) \; : \; y \in Y\right\}, \quad x \in X$$

<u>and</u> (3)

$$F_2(x) = \sup\left\{ f(y) - \|f\|_{\alpha,Y}.d^{\alpha}(x,y) \; : \; y \in Y\right\}, \quad x \in X$$

<u>are extensions of</u> f , <u>i.e.</u>